Ad. Wernickes

Lehrbuch der Mechanik

in elementarer Darstellung

mit Anwendungen und Übungen aus den

Gebieten der Physik und Technik

Erster Teil

Mechanik fester Körper

Ad. Wernickes

Lehrbuch der Mechanik

in elementarer Darstellung

mit Anwendungen und Übungen aus den

Gebieten der Physik und Technik

In zwei Teilen

Erster Teil

Mechanik fester Körper

Von

Dr. Alex. Wernicke

Direktor der Städtischen Oberrealschule und Professor an der Herzogl. Technischen Hochschule
zu Braunschweig

Vierte völlig umgearbeitete Auflage

Erste Abteilung

Einleitung. — Phoronomie. — Lehre vom materiellen Punkte

Mit eingedruckten Abbildungen

Braunschweig
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn
1900

Aus der Vorrede zur ersten Auflage.

Bei den Vorträgen über Mechanik an der hiesigen Provinzial-Gewerbeschule ist mir der Mangel eines geeigneten Lehrbuches, das von den Schülern zur Repetition sowie zum weiteren Studium benutzt werden könnte, von Jahr zu Jahr fühlbarer geworden.

Bei Abfassung des vorliegenden Lehrbuches lag es in meinem Plane, die Grenzen im allgemeinen inne zu halten, die durch das Ministerialreskript vom 15. Juni 1850 für den Unterricht an den preußischen Gewerbeschulen bestimmt sind, und die, meiner Ansicht nach, auch an außerpreußischen Gewerbeschulen erreicht werden müssen, wenn die Schüler zur gewerblichen Laufbahn oder zum Besuche einer höheren polytechnischen Anstalt gehörig vorbereitet werden sollen.

Die Behandlung des Stoffes in dem vorliegenden Lehrbuche ist eine elementare.

Um das Buch für den Schulgebrauch recht geeignet zu machen, habe ich das, was sich für den Vortrag in der Klasse eignet, und das, was zu häuslichen Arbeiten für die Schüler benutzt werden kann, voneinander getrennt, so daß hiernach jede Abteilung in einen theoretischen und einen praktischen Teil zerfällt.

Bei Abfassung des theoretischen Teiles habe ich mich an die Behandlungsweise, wie sie in den Lehrbüchern über analytische Mechanik gebräuchlich ist, angeschlossen. Kräfte und Kräftepaare dienen als Hülfsmittel für die verschiedenartigen Untersuchungen, indem die ersteren bei beabsichtigter oder wirklich erfolgter geradliniger Bewegung, die letzteren bei drehender Bewegung herangezogen werden.

Görlitz, im August 1858. **Ad. Wernicke.**

Aus der Vorrede zur zweiten Auflage.

Das hiermit in verbesserter Auflage erscheinende Lehrbuch der Elementar-Mechanik stimmt in der Behandlung des Gegenstandes mit der in der ersten Auflage überein, dagegen bin ich durch den langjährigen Gebrauch veranlaßt worden, in der Anordnung des Stoffes Änderungen vorzunehmen. Es empfiehlt sich beim Unterrichte an unseren technischen Schulen, wo, vor Behandlung der Mechanik, in der Physik bereits mechanische Probleme vorgeführt werden, mit der Bewegungslehre zu beginnen und, nachdem dieselbe auf den materiellen Punkt Ausdehnung gefunden, die Lehre vom Gleichgewichte folgen zu lassen. Dieser von allen bedeutenderen Verfassern derartiger Lehrbücher eingeschlagene Gang hat den besonderen Vorteil, das Einfache dem Schwierigeren voranzustellen und zugleich die für die Praxis notwendigen Begriffe, wie Masse, Arbeitsgröße, Arbeitsstärke, virtuelles Moment, schon frühzeitig zum Bewußtsein zu bringen. An das Kapitel von der Vereinigung und Zerlegung der Kräfte, in welchem die einfacheren Probleme der Ebene in den Vordergrund gestellt wurden, reiht sich die Lehre vom Schwerpunkte, sowie die Heranziehung der einer Bewegung sich entgegenstellenden Hindernisse. Die Bewegung der Körper hat durch eine rein geometrische Behandlung dieses Gegenstandes eine zweckmäßige Einleitung erfahren, welche mit Benutzung der im zweiten Abschnitte für den materiellen Punkt entwickelten Bewegungsgesetze in den meisten Fällen der praktischen Anwendung ausreichen dürfte. Die beiden Anwendungen der Statik und Dynamik auf Körper, wie sie uns die Natur in Wirklichkeit liefert, die Lehre von der Elasticität und Festigkeit, sowie die Lehre vom Stoß machen den Beschluß dieses ersten Teiles.

Den Rechnungen ist das Kilogramm und das Meter zu Grunde gelegt, entgegen der ersten Auflage, in welcher Pfund und Fuß als Einheiten dienten.

Gleiwitz, im März 1871. **Ad. Wernicke.**

Aus der Vorrede zur dritten Auflage.

Die dritte Auflage stimmt in der Anordnung des Stoffes, sowie in der Behandlung des Gegenstandes fast vollständig mit der zweiten Auflage überein. Der erste Abschnitt hat durch Aufnahme neuer Aufgaben über Bewegungen im allgemeinen und über Schwingungen eine Erweiterung erfahren, das vierte Kapitel ist durch die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt vervollständigt und der im zweiten Teile der zweiten Auflage veröffentlichte Anhang über „graphische Statik“ ist der Natur der Sache nach dem ersten Teile beigegeben worden.

Gleiwitz, im Juni 1877. **Ad. Wernicke.**

Vorrede zur vierten Auflage.

Das Werk meines verstorbenen Vaters, welches hiermit in neuer Gestalt erscheint, hat insofern eine bestimmte Geschichte, als es ursprünglich aus den Bedürfnissen der alten preußischen Gewerbeschulen hervorgewachsen ist und sich deren Entwickelung Schritt für Schritt angepaßt hat, bis diese, unter Abscheidung der (ursprünglich noch „Höhere Gewerbeschulen“ genannten) Oberrealschulen, gegen das Ende der siebziger Jahre ins Stocken geriet.

Hörte das Werk damit auch auf, ein eigentliches Schulbuch zu sein, so hatte es sich doch im Laufe der Jahre so viele Freunde, namentlich im Kreise der Techniker, die es vormals als Schüler kennen gelernt hatten, erworben, daß auch weiter neue Auflagen in Aussicht genommen werden konnten.

Als mein Vater nach einer vielgestaltigen und reich gesegneten Schulthätigkeit in Görlitz, Schweidnitz und Gleiwitz im Herbste 1895 zu Görlitz als Königl. Preußischer Geheimer Regierungsrat die Augen schloß, hatte ihm noch die Aufforderung des Verlages, eine neue Auflage zu bearbeiten, vorgelegen, doch hatte er geglaubt, sich dieser Arbeit nicht mehr unterziehen zu dürfen.

Als mir darauf im Herbste 1898 dieselbe Aufforderung zuging, hielt ich es für geboten, im Verein mit der Verlagsbuchhandlung, zunächst die Bedürfnisfrage unter Rücksprache mit sachverständigen Freunden nochmals zu prüfen.

Auf Grundlage dieser Erörterungen schien mir eine neue Bearbeitung des Werkes, bei welcher dessen Eigenart als technische Mechanik durchaus gewahrt und im besonderen die elementare Behandlung beibehalten werden sollte, hauptsächlich für folgende Kreise von einem gewissen Werte zu sein:

1. Für die technischen Mittelschulen, welche bei der Aufnahme ihrer Schüler das Abgangszeugnis einer sechsstufigen höheren Schule (Einjährig-Freiwilligen-Schein) fordern.
2. Für Studierende der Universität und anderer Hochschulen, insofern sie sich mit Mechanik in elementarer Behandlung beschäftigen wollen.
3. Für Techniker, die es vorziehen, sich der elementaren Methoden zur Lösung bestimmter technischer Aufgaben zu bedienen.
4. Für Kandidaten des höheren Schulamts und für Oberlehrer, welche sich der in der neuen preußischen Prüfungsordnung vom 12. September 1898 eingeführten Angewandten Mathematik zuzuwenden beabsichtigen.

Infolgedessen erklärte ich mich bereit, den in sich geschlossenen ersten Teil des Werkes (Phoronomie, Lehre vom materiellen Punkte, Dynamik starrer Körper und Dynamik fester Körper) selbst neu zu bearbeiten, schlug aber zugleich der Verlagsbuchhandlung vor, den zweiten Teil (Flüssigkeiten und Gase) in andere Hände zu geben, da mir bei meiner ziemlich ausgedehnten amtlichen Thätigkeit nur wenig freie Zeit zur Verfügung stände, während doch an und für sich eine möglichste Beschleunigung der neuen Ausgabe wünschenswert wäre.

Diesem Vorschlage gemäß wurde Herr Dozent **Vater** in Aachen für die Bearbeitung des zweiten Teiles gewonnen, und zwar auf Empfehlung von Herrn Geheimrat Prof. Herrmann in Aachen, einem alten Freunde meines Vaters.

Nachdem die nötigen Verständigungen erzielt worden waren, im besonderen auch darüber, daß die Einteilung des Werkes im allgemeinen erhalten bleiben könne, daß es aber zweckmäßig sei, die „Übungen" der älteren Auflagen in. ausgeführte „Anwendungen"

und einfache „Übungen“ zu zerlegen, wurde die Bearbeitung begonnen, und zwar so, daß jeder Bearbeiter für seinen Teil die volle Verantwortung übernahm.

Während die theoretischen Abschnitte des zweiten Teiles nur geringe Abänderungen forderten, mußte die Theorie im ersten Teile fast ganz von neuem aufgebaut werden; die Anwendungen und Übungen bedurften in beiden Teilen einer sorgfältigen Umarbeitung.

Bei dem **theoretischen Aufbau** des ersten Teiles bin ich davon ausgegangen, daß die Kenntnis der ersten Elemente der Mechanik so, wie sie jetzt der erste Lehrgang der Physik auf unseren sechsstufigen höheren Schulen bezw. in den entsprechenden Klassen unserer Vollanstalten veranschaulicht, vorausgesetzt werden darf.

Von mathematischen Hülfsmitteln wird lediglich die Schulmathematik verwandt, und zwar in der Abgrenzung, wie sie etwa der Reifeprüfung unserer altsprachlichen Gymnasien entspricht[1]), unter gleichmäßiger Berücksichtigung der arithmetischen und der geometrischen Gebiete.

Die Abgrenzung des Stoffes entspricht dem üblichen Umfange in den Lehrbüchern der technischen Mechanik.

Was dessen Anordnung anlangt, so wird in Bezug auf den herrschenden Streit zwischen Systematikern und Methodikern eine gewisse mittlere Linie verfolgt, insofern das Werk als Ganzes durchaus den Anforderungen strenger Systematik genügen will, während im einzelnen, namentlich mit Rücksicht auf Anwendungen und Übungen, gelegentlich auch einmal späteren Entwickelungen vorgegriffen wird. Im besondern wurde darauf Gewicht gelegt, die Begriffe stets an den Punkten einzuführen, wo sie sich naturgemäß einstellen.

Die Behandlung des Stoffes soll, innerhalb der gewählten Grenzen der Genauigkeit, der wissenschaftlichen Kritik stand halten. Am liebsten hätte ich die Reihe des Taylorschen Satzes an die Spitze gestellt, welche ja für ganze algebraische Funktionen leicht auf elementarem Wege abzuleiten ist, so daß ihre weitere Anwendung unter Berücksichtigung des jedesmaligen Restes durchaus verständlich gemacht werden kann, doch habe ich schließlich auf diesen Ausgangspunkt ver-

---

[1]) Vergl. dazu mein Buch „Goniometrie u. s. w.“ bei C. A. Schwetschke u. Sohn (E. Appelhans) in Braunschweig, 1888, die Programm-Abhandlung „Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Maßes“, Braunschweig 1887, und die Aufsätze „Aus dem Gebiete des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasial-Unterrichtes“ in den Haller Lehrproben, Heft 42 u. f.

zichtet, um die ganze Behandlung möglichst elementar zu halten. Dagegen glaubte ich, gerade mit Rücksicht auf das elementare Gepräge des Buches, eine ziemlich weit gehende Verwendung der Vektoren verantworten zu dürfen, zumal dadurch die geometrische (und graphische) Seite der Mechanik zu deren rechnerischer Seite in das Gleichgewicht tritt.

Die **Anwendungen** und **Übungen** wurden den theoretischen Entwickelungen Schritt für Schritt angepaßt. Ihre Auswahl zeigt naturgemäß eine gewisse Willkür, zumal es bei der jetzigen Ausdehnung der Physik und der technischen Wissenschaften nicht mehr möglich ist, in einer Mechanik dieses oder jenes Sondergebiet auch nur einigermaßen erschöpfend darzustellen.

Dem eigentlichen Lehrbuche habe ich eine **Einleitung** vorausgeschickt, welche dem Doppelzwecke dienen soll, dem Lehrenden von vornherein das allgemeine Gepräge des Werkes zu veranschaulichen und dem Lernenden schließlich einen Rückblick auf das ganze durchmessene Gebiet zu gewähren.

Alles in allem habe ich versucht, eine möglichst vollständige Einsicht in die Grundlagen der Mechanik, gemäß den Bedürfnissen der Technik, zu vermitteln, während allerdings auf Vollständigkeit in Bezug auf die Behandlung von Sondergebieten, auch schon im Hinblick auf den zu Gebote stehenden Raum, von vornherein verzichtet werden mußte.

Dabei konnte ich vielfach auf meine, seit Jahren an der Technischen Hochschule zu Braunschweig für die Abteilungen I und IV lehrplanmäßig gehaltenen Vorlesungen und Übungen aus der Mechanik zurückgreifen, bei denen ich im ersten Semester (5 Stunden Vorlesungen und 2 Stunden Übungen in der Woche) in elementarer Behandlung einen Überblick über das gesamte Gebiet der technischen Mechanik zu geben habe.

Diese Vorlesungen und Übungen sind ursprünglich entworfen als ein Ausgleich zwischen der üblichen Behandlung der technischen Mechanik und der theoretischen Auffassung, welche ich in meinen „Grundzügen der Elementar-Mechanik“ (Braunschweig, 1883 bei C. A. Schwetschke u. Sohn) entwickelt habe.

Bei diesem ersten Entwurfe haben mir, abgesehen von der in den „Grundzügen“ angeführten Litteratur und abgesehen von dem Werke meines Vaters, ganz besonders die Ritterschen Arbeiten gute Dienste geleistet, später vor allem noch die Werke von Herrn v. Bach in

Stuttgart und die kleine Schrift „Substanz und Bewegung" von Maxwell (Braunschweig, 1881 bei Friedr. Vieweg u. Sohn).

Bei der Darstellung, wie sie im folgenden vorliegt, konnte ich noch die neuen Lehrbücher von Herrn Keck in Hannover und Herrn Föppl in München mehrfach zu Rate ziehen, ebenso die Arbeiten von Herrn Holzmüller in Hagen.

Die Figuren wurden fast alle neu entworfen, sie zeigen, dem modernen Standpunkte entsprechend, im allgemeinen das Gepräge von Tafelskizzen.

Herrn Dozent Vater in Aachen möchte ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank für seine wertvolle Mitarbeiterschaft aussprechen, ebenso der altbewährten Verlagsbuchhandlung für ihre allseitige Unterstützung.

Schließlich bleibt mir noch übrig, meinem Kollegen an der Oberrealschule, Herrn Prof. Dr. Fenkner, für die freundliche Übernahme einer Durchsicht der Druckbogen herzlich zu danken.

Braunschweig, im Mai 1900.

Alex. Wernicke.

Inhalt

für die

erste Abteilung des ersten Bandes.

Einleitung (S. 1 bis 38). Seite

I. Die Bewegungen materieller Körper 1
II. Mathematische, physikalische und technische Mechanik 4
III. Die grundlegende Einteilung der Mechanik 6
IV. Die weitere Einteilung der technischen Mechanik 16
V. Die Größen der technischen Mechanik 20
1. Unendlich-kleine und unendlich-große Größen 20
2. Veränderliche und beständige Größen 21
3. Einfache Größen (Skalaren) und Richtungsgrößen (Vektoren) . . . 22

Erster Abschnitt.

Phoronomie oder Reine Bewegungslehre.

Erstes Kapitel (S. 39 bis 75).

Die Grundbegriffe der Phoronomie.

§ 1. Bewegung eines starren Körpers 39
§ 2. Verschiebung und Drehung eines starren Körpers 40
§ 3. Die Bewegung eines Punktes auf seiner Bahn und der Fluß der Zeit 44
§ 4. Die gleichförmige Bewegung und ihre Geschwindigkeit 44
§ 5. Die ungleichförmige Bewegung und die Durchschnittsgeschwindigkeit für einen bestimmten Zeitabschnitt bezw. für ein bestimmtes Bahnstück 48
§ 6. Die Stellungsgleichung 49
§ 7. Die Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkte bezw. an einer bestimmten Stelle der Bahn 55
§ 8. Die Durchschnittsbeschleunigung für einen bestimmten Zeitabschnitt bezw. für ein bestimmtes Bahnstück 60
§ 9. Die gleichmäßig-geänderte Bewegung und deren Beschleunigung . . . 61
§ 10. Die Beschleunigung in einem bestimmten Zeitpunkte bezw. in einem bestimmten Punkte der Bahn 65
§ 11. Die erste und die zweite Annäherung für eine beliebige Bewegung. . 66
§ 12. Der graphische Zusammenhang der Größen s, v, j bei beliebigen Bewegungen 69
§ 13. Der rechnerische Zusammenhang der Größen s, v, j bei beliebigen Bewegungen 73
§ 14. Weitere Bemerkungen zu den §§ 11, 12, 13 74
§ 15. Die Dimensionen der phoronomischen Größen 75
§ 16. Die Bedeutung der Konstanten in den Bewegungsgleichungen 75

Zweites Kapitel (S. 76 bis 113).

Die Richtungsgrößen der Phoronomie.

Seite

§ 17. Das Princip der Beharrung (Trägheit) und die Urbewegung 76
§ 18. Die Geschwindigkeit als Vektor und der Hodograph einer beliebigen Bewegung 77
§ 19. Beispiele für unstetige Bewegungsänderungen 78
§ 20. Das Princip des Parallelogramms für Urbewegungen eines Punktes . 80
§ 21. Das Princip des Parallelogramms für beliebige Bewegungen eines Punktes 83
§ 22. Zusammensetzung einer Reihe von Urbewegungen 86
§ 23. Übertragung auf beliebige Bewegungen; die Beschleunigung als Vektor 87
§ 24. Der Krümmungskreis und die Tangential- und die Normalbeschleunigung für eine beliebige Bewegung 90
§ 25. Die Bedeutung der Gesamtbeschleunigung als Vektor 92
§ 26. Die Abweichung von der Urbewegung (Deviation) 93
§ 27. Genauere Betrachtung der zweiten Annäherung für eine beliebige Bewegung 96
§ 28. Die Grundmethode für die Behandlung von Bewegungen 103
§ 29. Die Projektionsmethode für die Behandlung von Bewegungen 103
§ 30. Die Polarmethode für die Behandlung von Bewegungen 105
§ 31. Übertragung der Ergebnisse auf Körperbewegungen 113

Drittes Kapitel (S. 114 bis 151).

Bewegungen starrer Körper.

§ 32. Lagenänderung eines starren Körpers durch Verbindung von Verschiebung und Drehung 114
§ 33. Lagenänderung eines starren Körpers durch Schraubung 117
§ 34. Zusammensetzung von Lagenänderungen eines starren Körpers aus endlichen Verschiebungen und Drehungen und die entsprechenden Zerlegungen 120
§ 35. Zusammensetzungen von Lagenänderungen eines starren Körpers aus elementaren Verschiebungen und Drehungen und die entsprechenden Zerlegungen 127
§ 36. Die ebene Bewegung und die sphärische Bewegung des starren Körpers 133
§ 37. Die allgemeine Bewegung eines starren Körpers 135
§ 38. Allgemeine Behandlung der Mittelbewegung eines Punktes; Satz von Coriolis 136
§ 39. Relativbewegung starrer Körper 138

Anwendungen der Phoronomie (S. 152 bis 198).

1. Die Beschleunigung des freien Falles 152
2. Die Beschleunigung des freien Falles in ihrer Beziehung zur Bewegung des Erdmondes 155
3. Die Normalbeschleunigungen der Planetbewegungen des Sonnensystems . . 156
4. Die Bedeutung der Kepplerschen Gesetze 157
5. Die Bahn der Newtonschen Centralbewegung 160
6. Der freie Fall und der Vertikalwurf und die entsprechenden Bewegungen auf der schiefen Ebene 161
7. Die Wurfbewegung 166
8. Die harmonische (gleichmäßige) Schwingung auf gerader Linie 172
9. Die harmonische (gleichmäßige) Schwingung auf krummer Bahn 176
10. Die Bewegungen des (mathematischen) Pendels in einer Vertikalebene und in einer Horizontalebene 176
Die elliptische Schwingung 179

Seite
12. Die reguläre Wellenbewegung 180
13. Vereinigung zweier regulärer Wellen von verschiedener Amplitude auf einer Geraden 181
14. Die gleichförmige Bewegung auf der (gewöhnlichen) Schraubenlinie 186
15. Phoronomische Betrachtung von Kurven 188
16. Cardanos geradlinige Führung einer ebenen Figur 192
17. Leonardos Bewegung einer ebenen Figur 195
18. Foucaults Pendelversuch 196

Übungen zur Phoronomie (S. 199 bis 227).

Nr. 1 bis 190 199

Zweiter Abschnitt.

Der Übergang von der Phoronomie zur Dynamik (S. 228 bis 271.)
(Lehre vom materiellen Punkte.)

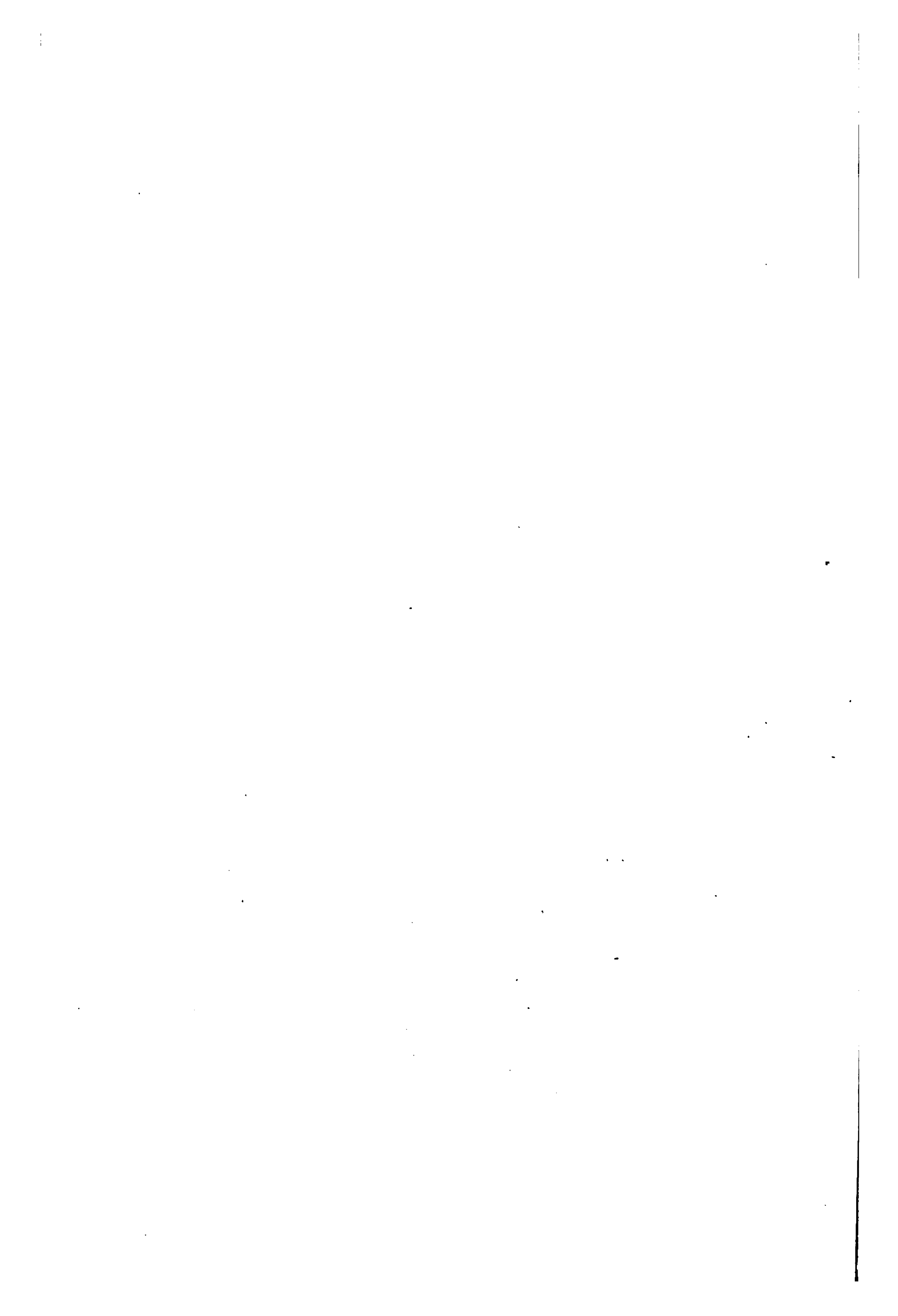
§ 40. Die dynamische Grundgleichung für materielle Körperelemente (Atome) 228
§ 41. Die Beziehung von Kraft und Beschleunigung innerhalb der dynamischen Grundgleichung und das Parallelogramm der Kräfte . . . 231
§ 42. Die Verwendung der dynamischen Grundgleichung bei Bewegungen materieller Körper 231
§ 43. Die Verwendung der dynamischen Grundgleichung bei Bewegungen starrer materieller Körper und deren Charakteristik 233
§ 44. Das Princip der Paarwirkung und die Kräfte am starren Körper . . 234
§ 45. Die Bedeutung der dynamischen Grundgleichung bei Verschiebungen starrer materieller Körper 235
§ 46. Die Bewegungsgleichungen der Dynamik für ein Atom 241
§ 47. Die dynamischen Größen für materielle Körper 249
§ 48. Die Bewegungsgleichungen der Dynamik für Verschiebungen starrer materieller Körper und die Bedeutung des Massenmittelpunktes bei beliebigen Bewegungen 250
§ 49. Folgerungen aus der dynamischen Grundgleichung für Drehungen starrer materieller Körper 253
§ 50. Die einfache Zwangsbewegung eines materiellen Punktes zweiter Art 258
§ 51. Die zusammengesetzte Zwangsbewegung eines materiellen Punktes zweiter Art und die fingierten Kräfte der Relativbewegung 264
§ 52. Die Einheiten und die Dimensionen der dynamischen Größen 269

Anwendungen der Lehre vom materiellen Punkte (S. 272 bis 298).

1. Allgemeines 272
2. Die dynamische Bedeutung des Newtonschen Gesetzes 275
3. Das Potential des freien Falles und der Centralbewegung 280
4. Die Energie der Geschosse 284
5. Die harmonische Schwingung bei konstanter Belastung in Richtung der Schwingungen 284
6. Die Centrifugalbahn 285
7. Das Cykloidenpendel 287
8. Der Schwungkugelregulator 292
9. Die Radialturbine 295
10. Die östliche Abweichung des freien Falles 297

Übungen zur Lehre vom materiellen Punkte (S. 299 bis 314).

Nr. 1 bis 105 299



Einleitung.

I. Die Bewegungen materieller Körper. Unser Leib bildet mit allen anderen Körpern zusammen unsere Außenwelt, im Gegensatz zu der Innenwelt unseres Denkens, Wollens und Fühlens und zu den Innenwelten anderer Wesen. Die mannigfachen Beziehungen zwischen unserer Innenwelt und unserer Außenwelt werden ohne Ausnahme durch unseren Leib vermittelt, und darum übertragen wir die Beobachtungen und Erfahrungen, die wir bewußt und unbewußt an ihm machen, zum großen Teil auf die anderen Körper der Außenwelt, bald mit Recht und bald mit Unrecht.

Da der Menschheit auf der Stufe ihrer Kindheit (wie heute noch zunächst jedem Kinde) alles Bewegliche als lebendig und alles Lebendige als menschenähnlich galt, so läßt sich jene Übertragung auch in der Geschichte der Versuche, die Bewegungen innerhalb der Außenwelt zu erklären, überall nachweisen. Namentlich erinnern die älteren Begriffe Trägheit und Kraft durch ihre Namen deutlich an ihren Ursprung, aber auch so moderne Begriffe wie Arbeit und Energie zeigen, wenigstens bei ihrem ersten Auftreten, noch die Spuren jener Übertragung.

Eine fortschreitende Kritik hat dazu geführt, die Erklärungen für die Bewegungen innerhalb der Außenwelt, welche den Beobachtungen und Erfahrungen am eigenen Leibe entnommen waren, zu berichtigen und deutliche Anschauungen und scharfe Begriffe an ihre Stelle zu setzen. So ist man zu einer Wissenschaft gelangt, deren Aufgabe sich folgendermaßen kennzeichnen läßt:

Die Außenwelt, welche die Gesamtheit der materiellen Dinge (Materie) im Raume umfaßt, ist mit der Zeit veränderlich.

Unter den Veränderungen innerhalb der Außenwelt bilden die Bewegungen die einfachste Klasse: hierbei wechselt ein Körper während einer bestimmten Zeit seine Lage zu anderen Körpern im Raume. Behält ein Körper seine Lage zu anderen Körpern im Raume bei, so befindet er sich in Ruhe.

Obwohl Bewegung und Ruhe zunächst als Gegensätze erscheinen, so führt doch die Betrachtung der Übergänge aus der Ruhe in die Bewegung

und aus der Bewegung in die Ruhe dazu, die Ruhe als einen besonderen Fall der Bewegung, als deren Grenzfall anzusehen.

Namentlich bietet hierzu die Umkehr bei Bewegungen Veranlassung, wie sie ein senkrecht nach oben geworfener Körper zeigt, nachdem er möglichst hoch gestiegen, oder ein Pendel bei seinem größten Ausschlage nach der einen oder nach der anderen Seite. Hier bildet sich mitten in der Bewegung ein Augenblick der Ruhe, vor ihm ein Übergang zur Ruhe, hinter ihm ein Übergang aus der Ruhe und zwar, ohne daß dabei etwa auf die einmal eingeleitete Bewegung noch weiter eingewirkt würde.

Die Untersuchung und Erklärung der Bewegungen innerhalb unserer Außenwelt, einschließlich des Grenzfalles der Ruhe, bildet den Gegenstand der bezeichneten Wissenschaft, welche sich einerseits als der grundlegende Teil der Physik darstellt und anderseits die festen Ausgangspunkte für die Konstruktionen der Technik liefert.

Zu der Aufgabe dieser Wissenschaft ist von vornherein zweierlei zu bemerken:

1. Körper der Außenwelt sind erfahrungsgemäß oft sehr veränderliche Gebilde, bei denen schließlich nur die Menge des Stoffes unveränderlich zu sein scheint. Dieser Veränderlichkeit unterliegt sowohl die äußere Begrenzung (Form und Inhalt) als auch das Innere der Körper. Ein Bild dieser Veränderlichkeit gewinnt man z. B., wenn man sich vorstellt, was ein bestimmtes Stück Eis im Laufe der Zeit gewesen ist und was aus ihm im Laufe der Zeit werden wird.

Da man einer solchen Veränderlichkeit gegenüber im allgemeinen keine Lagenbestimmung vornehmen und demgemäß erst recht keine Lagenänderung untersuchen kann, so macht sich das Bedürfnis geltend, zunächst Körper einzuführen, welche während der Untersuchung als unveränderlich gelten sollen, und die an ihnen gewonnenen Ergebnisse von Fall zu Fall auf die erfahrungsmäßig gegebenen Körper zu übertragen. Man bezeichnet solche Körper als unveränderliche oder als starre Körper.

Im allgemeinen kommen die festen Körper der Außenwelt dem Begriffe eines starren Körpers am nächsten, aber auch eine ruhende Wassermasse läßt sich als starrer Körper auffassen; es kommt dabei nur darauf an, daß die thatsächlich stets vorhandene Veränderlichkeit für die Zwecke der Untersuchung als unerheblich angesehen werden darf.

Aus solchen starren Körpern setzt man ferner bestimmte Systeme starrer Körper zusammen, durch welche bestimmte Körper oder Körpergruppen der Außenwelt möglichst genau dargestellt werden können.

Die starren Körper, welche zu solchen Systemen zusammentreten, müssen für gewisse Zwecke, namentlich bei der Untersuchung der Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen, aber auch schon bei der Untersuchung der Elasticität unserer Baumaterialien, außerdem aber für die Feststellung der grundlegenden Sätze der bezeichneten Wissenschaft so klein vorausgesetzt werden, daß sie nur solche Bewegungen zeigen können, wie man sie auch an einem Punkte der Geometrie studieren kann. Solche starre Körper mögen

Atome[1]) heißen, abzählbare Gruppen von ihnen Moleküle, den Bezeichnungen der Chemie entsprechend.

2. Lage ist ein Beziehungsbegriff (relativer Begriff), d. h. es hat keinen Sinn, von der Lage eines Körpers zu sprechen, wenn man nicht hinzufügt, worauf sich diese Lagenbestimmung beziehen soll. Man muß stets einen Körper A_1 in seiner Lage als gegeben ansehen, wenn man die Lage eines anderen Körpers A_2 bestimmen will. Um zu einer solchen Bestimmung zu gelangen, ersetzt man den Körper A_1 durch einfache, ihm angehörige geometrische Gebilde, und bestimmt zunächst die Lage eines Punktes des Körpers A_2 in Bezug auf diese Gebilde, welche man Koordinatensysteme nennt. Ist z. B. der Körper A_1 unsere Erde, so ersetzt man diese durch ihren Äquator und ihren ersten Meridian, womit natürlich auch ihr Mittelpunkt und ihre gesamte Oberfläche gegeben ist. Handelt es sich nun darum, die Lage eines Punktes in Bezug auf die Erde zu bestimmen, so hat man dessen Länge und Breite und seine Erhebung oder Senkung gegen die Oberfläche anzugeben. Wie viele Punkte des Körpers A_2 in ihrer Lage gemessen werden müssen, um die Lage des Körpers A_2 anzugeben, hängt von dessen Beschaffenheit ab. Läßt sich der Körper A_2 als starrer Körper auffassen, so genügt die Bestimmung für drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen.

Der Körper A_1 muß jedenfalls als starr angesehen werden, wenigstens soweit als die ihm angehörigen geometrischen Gebilde in Frage kommen, welche für die Lagenbestimmung dienen sollen.

Will man besonders hervorheben, daß man in dem Körper A_1 die feste Bestimmung für die Lage eines Körpers A_2 gegeben sieht, so spricht man von der relativen Lage von A_2 gegen A_1. Diese Redeweise ist nötig, wenn man einen Körper A_3 in seiner Lage gegen einen Körper A_2 und diesen wieder in seiner Lage gegen A_1 bestimmt, wodurch dann auch A_3 in seiner Lage gegen A_1 bestimmt wird. Solche vermittelte Lagenbestimmungen spielen bei der Untersuchung von Bewegungen, welche ja als Lagenänderungen eine Reihe von Lagenbestimmungen erfordern, gelegentlich eine Rolle. Man spricht dann von der relativen Bewegung von A_3 gegen A_2 und von der relativen Bewegung von A_2 gegen A_1 und endlich von der relativen Bewegung von A_3 gegen A_1. So bestimmt man die Bewegung eines Körpers (A_3) in der Nähe der Erdoberfläche meist zunächst gegen die Erde (A_2), an deren Bewegungen er teil nimmt; für gewisse Fälle ist es aber notwendig, auch noch die Bewegungen der Erde gegen die Sonne (A_1) zu berücksichtigen und nun auch die Bewegung des Körpers (A_3) gegen diese (A_1) festzustellen. So beschäftigt den Techniker bei der Theorie einer Turbine die Bewegung des Wassers (A_3) zunächst in Bezug auf die Schaufel des Rades (A_2) und dann erst, durch Vermittelung der Bewegung des Rades (A_2) gegen die Erde (A_1), in Bezug auf die Erde (A_1).

[1]) Das Atom wird, wie vorgreifend bemerkt werden mag, vom materiellen Punkte unterschieden. Das Atom ist ein materieller Punkt mit einer Masse, die im Vergleich zu den als endlich angenommenen Massen unendlich klein ist. Reduziert man z. B. ein Schwungrad auf einen materiellen Punkt, so ist dieser materielle Punkt kein Atom.

Im Gegensatze zu der relativen Lage bezw. Bewegung pflegt man auch von der absoluten Lage bezw. Bewegung zu sprechen und erklärt sie als die Lage bezw. Bewegung im unendlichen Raume.

Diese Erklärung ließ sich halten, solange man sich die Sonne oder doch bestimmte Fixsterne ohne jede fortschreitende Bewegung vorstellte, weil man dann in diese feststehenden Körper ein unbewegliches Koordinatensystem gelegt und gegen dieses Lage und Bewegung bestimmt denken konnte. Natürlich darf man die Vorstellung eines unbeweglichen Koordinatensystems im Raume, für welches auch ein bestimmter Teil des Raumes eintreten kann, auch heute noch festhalten, nur läßt sich in der Außenwelt im Hinblick auf die beobachteten Bewegungen aller materiellen Körper kein solches feststellen. Diese Vorstellung ist ein Bild, dem in der Außenwelt nichts genau entspricht, ebenso wie es bei dem Bilde des starren Körpers der Fall ist. Auch hier ist es zweckmäßig, an diesem einfachen Bilde festzuhalten, d. h. sich einen Teil des Raumes oder den ganzen Raum als einen durchaus unbeweglichen Körper zu denken, welcher durch ein durchaus unbewegliches Koordinatensystem ersetzt werden kann, und gegen diese festen Dinge Lage und Bewegung zu bestimmen. Man behält sich bei einer solchen Bestimmung stets vor, das unbewegliche System später beweglich zu denken, falls es die Zwecke der Untersuchung erfordern, und zwar wiederum gegen ein zunächst als unbeweglich vorgestelltes System, welches demselben Vorbehalte unterliegt u. s. f.

Demgemäß verstehen wir unter einer absoluten Bewegung eine relative Bewegung, deren Beziehungskörper (A_1) für die Zwecke unserer Untersuchung als unbeweglich gelten kann.

Für viele Untersuchungen reicht es aus, die Erde als unbeweglich anzusehen. So muß z. B. die Bewegung eines Menschen in einem Eisenbahnzuge gegen diesen als relative Bewegung bezeichnet werden, während die Bewegung des Zuges in Bezug auf die Erde und die durch sie vermittelte Bewegung des Menschen gegen die Erde als absolute Bewegungen gelten können. Entsprechendes gilt für die oben erwähnten Beispiele.

Hat man bei einer Untersuchung die notwendige Bestimmung über den Körper getroffen, welcher bei ihr als unbeweglich gelten darf, so kann statt dieses Körpers auch das Bild des unbeweglichen Raumes eintreten, so daß man sagen darf:

Die Bewegung eines Körpers ist bestimmt, wenn man zu jeder Zeit von jedem seiner Punkte angeben kann, in welchem Punkte des Raumes er ruht.

II. Mathematische, physikalische und technische Mechanik. Die Bemerkungen zu der Aufgabe der bezeichneten Wissenschaft haben schon gezeigt, daß man mit bestimmten Vorstellungen, welchen in der Außenwelt kein genaues Abbild entspricht, an die Untersuchung ihrer Bewegungen herantreten muß. Dies wird sich auch weiter bestätigen. Solche Vorstellungen pflegt man als mathematische Anschauungen und Begriffe zu bezeichnen, sie gehören unserer Innenwelt an, welche durch Vermittelung unseres Kör-

pers mit der ganzen Außenwelt in Verbindung steht, und sind durch Anregung von außen in uns entstanden.

Man bezeichnet die Lehre von der Bewegung jetzt allgemein durch das Wort Mechanik, welches ursprünglich ein Name für die spärlichen Anfänge der in unserer Zeit so breit und tief entwickelten technischen Wissenschaften war.

Man kann diese Mechanik von drei verschiedenen Gesichtspunkten aus entwickeln und unterscheidet demgemäß mathematische (reine), physikalische und technische Mechanik.

Diese drei Gebiete stellen gewissermaßen drei übereinander gelagerte Platten von abnehmender Grundfläche dar, woraus man aber weder auf eine entsprechende Abnahme der Rauminhalte der einzelnen Platten, noch auf eine entsprechende Verminderung ihres Wertes schließen darf.

Die mathematische Mechanik sucht die mathematischen Anschauungen und Begriffe, zu deren Bildung die Beobachtung der Bewegungen der Außenwelt Veranlassung gegeben hat, in möglichster Verallgemeinerung zu einem wissenschaftlichen Systeme auszugestalten.

Im Gegensatze zu ihr beschränkt sich die physikalische Mechanik darauf, mit Hülfe jener mathematischen Anschauungen und Begriffe die Bewegungen, welche die Außenwelt wirklich darbietet, zu untersuchen und zu erklären, bemüht sich aber dafür, diese, unterstützt von Beobachtung und Versuch, so genau als möglich in einer Theorie zur Darstellung zu bringen.

Während die physikalische Mechanik das gesamte Gebiet der Bewegungen, welche die Außenwelt darbietet, mit gleichmäßiger Teilnahme bearbeitet, treten für die technische Mechanik die Teile jenes Gebietes in den Vordergrund, welche den Zwecken der Technik dienen. Diese hat ja die Aufgabe, den Bedürfnissen der menschlichen Gesellschaft entsprechend, die Materie zu neuer und fruchtbarer Formung zu zwingen, d. h. von der Erklärung der Naturerscheinungen zu deren Verwendung fortzuschreiten.

Die Technik fordert aber nicht bloß eine Einschränkung des Gebietes der physikalischen Mechanik, sie verlangt auch, daß die Teilgebiete, welche ihren Zwecken dienen sollen, eine eigenartige und ins Einzelne gehende Durchbildung erfahren. Dabei tritt namentlich die zeichnerische (graphische) Behandlung der Aufgaben neben deren rechnerische Lösung. Außerdem sind stets besondere Überlegungen nötig in Bezug auf den Grad der Genauigkeit, welcher einerseits für eine bestimmte Konstruktion erforderlich und anderseits bei ihr, nach Maßgabe der gewonnenen Erfahrungen, erreichbar ist. Im besonderen genügt für die technische Mechanik oft die Kenntnis gewisser Grenzwerte eines Vorganges, ohne daß dieser selbst in seinen Einzelheiten bekannt zu sein braucht. So läßt sich z. B. die Standfestigkeit einer Mauer bestimmen, wenn man den größten Wert des Erddruckes kennt, der auf sie einwirken kann, ohne daß man dabei die sehr verwickelten Verhältnisse im Inneren lockerer Masse genauer zu kennen braucht. Die Beschränkung auf das Wesentliche und die Ausscheidung des Überflüssigen bei jedem Ansatze einer Aufgabe und bei deren Durchführung ist wegen des ökonomischen Gepräges der technischen Mechanik besonders wichtig. Überhaupt wirkt die

wirtschaftliche Seite der Technik hier ein, so daß z. B. auch die Kosten einer Anlage (Materialersparnis u. s. w.) bei den Konstruktionen von vornherein mit zu berücksichtigen sind.

Besonders mag noch hervorgehoben werden, daß die Technik sehr oft die Lösung eines Problems erzwingen muß und demnach da, wo die physikalische Mechanik keine ausreichende Grundlage bietet, von der technischen Mechanik einen möglichst annehmbaren Ersatz für eine solche Grundlage fordert und dadurch auch wieder die physikalische Mechanik zu weiterem Fortschreiten drängt.

Thatsächlich sind es die Anforderungen der Technik gewesen, welche ursprünglich die Anregung zu der Ausbildung der Mechanik gegeben haben, und diese anregende Kraft ist auch heute noch nicht erloschen.

III. Die grundlegende Einteilung der Mechanik. Von welchem Gesichtspunkte aus man auch die Bewegungen betrachten mag, ihre Untersuchung und Erklärung wird stets in zwei Stufen zerfallen müssen. Zunächst hat man die Bewegungen als gegebenes Material anzusehen, sie zu betrachten, zu vergleichen und zu ordnen, etwa so, wie es der Botaniker oder Zoologe als Systematiker mit den verschiedenen Pflanzen oder Tieren macht. Darauf hat man die Bedingungen festzustellen, unter denen bestimmte Bewegungen entstehen und vergehen, d. h. man hat etwa einen Standpunkt einzunehmen, wie der Botaniker oder Zoologe als Entwickelungstheoretiker.

Man bezeichnet die erste Stufe als Phoronomie (Lehre von den Gesetzen der Bewegung), die zweite als Dynamik (Lehre von den Kräften).

Auf der ersten betrachtet man nur das Bild, welches eine Bewegung darbietet; auf der zweiten berücksichtigt man auch die gegenseitige Beeinflussung der beweglichen Dinge. So kann man z. B. die Bewegung einer Pendelkugel einmal betrachten, indem man nur die Bewegung des Mittelpunktes der Pendelkugel auf seinem Kreisbogen ins Auge faßt, man kann sie aber auch mit Rücksicht auf die gegenseitige Anziehung von Pendelkugel und Erde, mit Rücksicht auf die Fadenspannung u. s. w., behandeln. Innerhalb der physikalischen und innerhalb der technischen Mechanik kommen für die Abgrenzung dieser beiden Stufen bestimmte Principien zur Geltung, d. h. grundlegende Auffassungen, deren Rechtfertigung in der durchgängigen Übereinstimmung zwischen den aus ihnen gezogenen Folgerungen und den entsprechenden Erfahrungen liegt. Man kann solche Principien nicht beweisen, aber man kann ihre Folgerungen von Fall zu Fall an den Vorgängen der Außenwelt veranschaulichen, wobei man sich gelegentlich mit Vorteil besonderer Modelle, Apparate u. s. w. bedient.

Zunächst kommt hier ein Prinzip in Frage, das man früher Princip der Trägheit nannte, während es jetzt meist als Princip der Beharrung bezeichnet wird. Die grundlegende Auffassung, welche durch dieses Princip für die Bewegung zur Geltung kommt, steht in scharfem Gegensatze zu einer anderen Auffassung, welche die Menschheit auf ihrem Kulturwege nur sehr langsam überwunden hat. Die allmählich erwachende Kritik führte im Zeitalter Galileis u. a. dazu, daß man der leblosen Materie, welcher

man bisher eine Art von niederem Wollen und Handeln zugeschrieben hatte, nun diese Eigenschaften absprach und sie als träge bezeichnete, d. h. im besonderen als unfähig, aus sich heraus eine Bewegung zu beginnen oder ihre vorhandene Bewegung abzuändern. Man kann sich diese neue Auffassung an folgendem Bilde klar machen: Wäre im ganzen Weltenraume nur ein Atom vorhanden, so würde es stets in Ruhe bleiben, wenn es einmal in Ruhe ist, oder stets ohne Wechsel der Richtung, dem Flusse der Zeit entsprechend, gleichförmig fortschreiten, wenn es einmal in Bewegung ist. Die Veranlassung zu einer Änderung seiner Bewegung (nach Richtung und Geschwindigkeit) könnte nur von außen kommen, d. h. etwa von einem zweiten, im Weltenraume plötzlich auftretenden Atome.

Bezeichnet man die von außen herantretende Ursache einer Bewegungsänderung, als deren Sonderfälle die Übergänge aus der Ruhe und in die Ruhe erscheinen, mit dem Namen Kraft[1]), so stellen die Kräfte die Bedingungen dar, unter denen Bewegungen entstehen oder vergehen bezw. sich überhaupt ändern, während die Bewegung an und für sich stets sich selbst gleich bleibt, d. h. beharrt. Demgemäß sagt das Princip der Beharrung aus: Jede Bewegung ist ihrem Wesen nach unveränderlich.

Dieses Princip wird ergänzt durch den Satz: Alle Bewegungsänderungen werden durch Kräfte bestimmt.

Nicht zur Erhaltung einer Bewegung ist demnach eine Kraft erforderlich, sondern zu ihrer Änderung. Scheint eine Kraft der Erhaltung einer Bewegung zu dienen (z. B. die Zugkraft einer Lokomotive), so dient sie thatsächlich zur Überwindung anderer Kräfte (z. B. der Reibung), welche für sich die Bewegung verzehren würden.

Solange man Kraft nicht begrifflich genauer bestimmt, als es bisher geschehen (Ursache der Bewegungsänderung), ist der Ergänzungssatz zum Principe der Beharrung ziemlich unfruchtbar, er giebt nur einen Ausdruck statt eines anderen. Freilich könnte man bei dem Worte Kraft ohne weiteres an die Erfahrungen denken, die man an seinem eigenen Körper macht, wenn man durch ihn Bewegungsänderungen anderer Körper hervorruft, z. B. durch Wurf, Schlag, Zug, Druck u. s. w. Das hat man auch ursprünglich gethan, aber diese Erfahrungen sind viel zu verwickelt und lückenhaft, als daß sie ein deutliches Bild von dem geben könnten, was man mit dem Namen Kraft bezeichnen will.

Hierzu kommt noch die Schwierigkeit, daß mit dem Worte Kraft schon etwas anderes[2]) bezeichnet wird, nämlich zunächst der Zug, den ein in der Nähe der Erdoberfläche aufgehangener Körper auf seine Oberlage, oder der Druck, den ein in der Nähe der Erdoberfläche unterstützter Körper auf

---

[1]) Bezeichnet man die Kraft, wie es wohl auch geschieht, als Ursache der Bewegung, so denkt man bei dem Worte Bewegung nicht an einen Zustand, sondern an den Übergang aus der Ruhe in die Bewegung oder an den Übergang aus der Bewegung in die Ruhe.

[2]) Daß der Gebrauch des Wortes Kraft außerdem noch manche andere Schwankungen zeigt, wird man leicht an Beispielen bestätigt finden; besonders mag noch an den Ausdruck „lebendige Kraft“ erinnert werden.

seine Unterlage ausübt, sodann alle Erscheinungen, welche sich mit diesem Schwerzug oder diesem Schwerdruck, in gemeinem Leben Gewicht genannt, zahlenmäßig vergleichen lassen, wie der Zug oder Druck, der bei der Muskelarbeit der Menschen und Tiere auftritt, der Druck des Wassers und des Windes, des Dampfes u. s. w.

Daß ein solcher Zug oder Druck gelegentlich Bewegungsänderungen hervorrufen kann (z. B. bei dem Übergange eines gestoßenen oder gezogenen Wagens aus der Ruhe in die Bewegung, beim Reißen eines Seiles oder dem Fortfall einer Stütze), legt zwar die Vermutung nahe, daß man mit dem einen Worte Kraft auskommen kann, um sowohl die Bedingung einer Bewegungsänderung als auch Zug oder Druck zu bezeichnen. Diese Vermutung aber zu bestätigen und zwar in einer Weise, daß an die Stelle des Wortes Kraft eine brauchbare Begriffsbestimmung tritt, war eine gewaltige geistige Leistung. Nennen wir den älteren Begriff der Kraft (Zug und Druck), welcher sich auf ruhende Körper bezieht, den statischen Kraftbegriff, und den neueren Begriff der Kraft, wonach dieselbe Bedingung einer Bewegungsänderung sein soll, den kinetischen Kraftbegriff, so handelte es sich darum, diese beiden Begriffe in eine Beziehung zu setzen, welche für die Untersuchung und Erklärung der Bewegungen (und der Ruhe) innerhalb der Außenwelt fruchtbringend ist. Diese Aufgabe wurde Schritt für Schritt durch Galilei, Huyghens und Newton gelöst.

Die Arbeiten Galileis ermöglichten es zwar, die Bewegungsänderung (in Bezug auf Richtung und Geschwindigkeit) zunächst bei der Bewegung eines Atoms für jeden Augenblick durch eine wohl bestimmte Größe von bestimmter Richtung, welche man jetzt Beschleunigung nennt, auszudrücken, sie zeigten aber noch nicht, wie diese Größe zur Bestimmung der Kraft verwandt werden kann. Das einfachste Beispiel für eine solche Beschleunigung ist die Beschleunigung des freien Falles, welche stets nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet ist und im Meter-Sekundensystem im Mittel den Zahlenwert 9,81 hat. Sie wird allgemein durch g bezeichnet.

Auf die Bestimmung der Kraft durch die Beschleunigung deuteten erst die Arbeiten von Huyghens hin, welcher die Untersuchung des physischen Pendels neben die von Galilei durchgeführte Untersuchung des mathematischen Pendels stellte und damit die Bildung eines ganz neuen Begriffs, den wir heute Masse nennen, vorbereitete. Dessen Vollendung verdanken wir Newton, der damit in den Stand gesetzt wurde, auch die Begriffsbestimmung der Kraft zu geben.

Newtons Leistung bestand darin, den Schwerdruck oder Schwerzug, den man lange als etwas Einheitliches angesehen hatte, in ein unveränderliches Element (Masse) und ein veränderliches Element (Beschleunigung) zu spalten und diese Zerlegung des statischen Kraftbegriffs zugleich für die Definition des kinetischen Kraftbegriffs nutzbar zu machen.

Man kann die Leistung Newtons am einfachsten als eine erschöpfende Kritik des Begriffes Trägheit der Materie bezeichnen. Da näm-

lich die Ursache einer Bewegungsänderung erfahrungsmäßig von Körpern der Außenwelt ausgeht, so ist es ebenso einseitig, die Materie als träge zu bezeichnen, wie es einseitig war, ihr eine Art von niederem Wollen und Handeln beizulegen. Die Körper der Außenwelt beeinflussen sich vielmehr stets gegenseitig, d. h. es sind mindestens zwei voneinander getrennte Atome im Raume erforderlich, wenn Bewegungsänderungen zu stande kommen sollen, sie gehen dann aber von beiden Atomen aus und treten an beiden Atomen zu Tage, so daß beide zugleich in gewissem Sinne thätig und in gewissem Sinne leidend sind. Diese sich folgerichtig aufdrängende Auffassung vertiefte sich für Newton, der sowohl das Galilei-Huyghenssche als auch das Kopernikus-Keplersche Erbe angetreten hatte und sich auch Descartes' Vermächtnis zu eigen gemacht hatte, zu der grundlegenden Erkenntnis, daß jedem bestimmten Körper der Außenwelt eine bestimmte Maßzahl zukommt, welche sowohl für seine Einwirkung auf andere Körper als auch für die Einwirkung anderer Körper auf ihn, sowohl bei statischen als auch bei kinetischen Verhältnissen, von Bedeutung ist. Bei demselben Stoffe (z. B. Blei) wächst diese Maßzahl unter sonst gleichen Umständen mit dem Rauminhalte des betreffenden Körpers, d. h. mit der Menge des Stoffes, die den Körper bildet. Bei verschiedenen Stoffen (z. B. Blei und Eisen) ist eine Vergleichung dieser Maßzahlen möglich, wenn man zwei Mengen beider Stoffe als gleich ansieht, falls sie als Belastungen der gewöhnlichen gleicharmigen Hebelwage deren Balken horizontal stellen. (Eindeutige Bestimmung der Stellung, ganz abgesehen von allen dynamischen Voraussetzungen.) Denkt man sich aus den verschiedenen Stoffen einen bestimmten Stoff A ausgewählt und etwa mit einem Kubikcentimeter (ccm) davon alle anderen Stoffe auf der gleicharmigen Hebelwage verglichen, so erhält man für jeden Stoff die Anzahl von Kubikcentimetern, welche dem einen Kubikcentimeter des Stoffes A gleichwertig sind. Die so gewonnene Tabelle gestattet jede Menge eines Stoffes B in eine Menge des Stoffes A umzurechnen, so daß man nun die verschiedenen Stoffe so behandeln kann, als wenn sie Verdichtungen eines und desselben Grundstoffes wären. Die Menge dieses gedachten Grundstoffes (Materie) wird Masse genannt. Um zu ihrer Messung zu gelangen, wählt man einen Stoff, der überall leicht in gleicher Beschaffenheit zu haben ist, als Vergleichungsstoff (Stoff A) aus, man nimmt Wasser im Zustande seiner größten Dichte, d. h. bei 4° C. Stellt ein Kubikcentimeter von solchem Wasser die Einheit der Masse dar, so wird dieselbe Masse durch 0,0884 ccm Blei oder durch 0,1333 ccm Eisen dargestellt, weil diese Stoffmengen dem einen Kubikcentimeter Wasser an der gleicharmigen Hebelwage als Belastungen entsprechen. Es enthält 1 ccm Blei demnach 11,3 Wassereinheiten, 1 ccm Eisen 7,5 Wassereinheiten, d. h. in Bezug auf Wasser stellt Blei gewissermaßen eine Verdichtung des Stoffes vom Verhältnis 11,3 : 1, Eisen vom Verhältnis 7,5 : 1 dar. Man nennt die Zahlen, wie 11,3 und 7,5, auch wirklich Dichtigkeiten[1]) der betreffenden Stoffe unter der Voraussetzung, daß Wasser als

[1]) Sie stimmen überein mit den specifischen Gewichten.

Einheit gilt. Natürlich kann man die Tabelle der Dichtigkeiten leicht für jeden anderen Stoff als Einheit umrechnen. Hat man die Einheit festgesetzt, so ergiebt sich die Maßzahl der Masse für jeden Körper als Produkt aus der Maßzahl seines Rauminhaltes und der Dichtigkeit des Stoffes, aus dem er besteht. So gelangt man zu dem Princip der Masse, welches man folgendermaßen aussprechen kann: Jedem Körper kommt eine bestimmte Maßzahl zu, welche das Produkt ist aus der Maßzahl seines Rauminhaltes und der Dichtigkeit des Stoffes, aus dem er besteht, sie wird die Maßzahl der Masse genannt. Die gegenseitige Beeinflussung der Körper wird stets durch deren Massen mitbestimmt.

Sollen Atome zum Aufbau von Körpern der Außenwelt dienen, so muß man auch ihnen Masse beilegen und dabei stets die Annahme machen, daß die Masse eines zusammengesetzten Gebildes mit der Summe der Massen seiner Teile übereinstimmt. Nachdem der Begriff Masse eingeführt ist, läßt sich auch die Begriffsbestimmung der Kraft vornehmen, zunächst in Beziehung auf ein Atom, und zwar auf folgende Weise: Jede Bewegungsänderung eines Atomes weist auf eine Kraft zurück, deren Maßzahl das Produkt aus der Maßzahl der Masse des bewegten Atomes und der Maßzahl der an ihm erscheinenden Beschleunigung ist. Die Richtung der Beschleunigung ist zugleich die Richtung der Kraft. Die Fruchtbarkeit dieser Definition, welche an und für sich nicht ohne Willkür gebildet zu sein scheint, liegt zunächst darin, daß sie auch den älteren Begriff der Kraft, wonach diese Zug und Druck bezeichnet, mit umfaßt. Dies folgt aus der Annahme, daß Zug und Druck überhaupt nichts anderes anzeigen, als behinderte Bewegungsänderungen materieller Körper, und aus der Übereinstimmung dieser Annahme mit der Erfahrung. Demgemäß ist statische Kraft nur gehemmte kinetische Kraft.

So erwächst im besondern der Schwerzug oder Schwerdruck aus der Hemmung, welche der freie Fall eines Körpers durch Zwischenkörper erfährt, und darum läßt sich dieser Zug oder Druck, zunächst für ein Atom, durch $\mu . g$ darstellen, falls man dessen Masse mit μ und die Beschleunigung des freien Falles durch g bezeichnet. Da aber dieser Zug oder Druck erfahrungsmäßig proportional zur Masse wächst, so gilt der Ansatz $\mu . g$ auch für ausgedehnte Körper. Hierbei ist die Spaltung des statischen Kraftbegriffs (Zug oder Druck) in ein unveränderliches Element (Masse) und ein veränderliches Element (Beschleunigung) deutlich zu sehen.

Die Auffassung der statischen Kraft als gehemmter kinetischer Kraft ist natürlich als Princip zu betrachten.

Hierzu ist zu bemerken, daß die Auflösung einer in der Außenwelt gegebenen statischen Kraft in das Produkt aus Masse und Beschleunigung, wie sie sich beim Schwerdruck oder Schwerzug ergiebt, durchaus nicht immer nötig, vielleicht auch gar nicht immer möglich ist.

Wenn wir z. B. damit rechnen, daß der Winddruck höchstens 125 **kg** für den Quadratmeter beträgt, so sehen wir davon ab, daß mit dem Worte „Winddruck" ein sehr verwickelter Vorgang bezeichnet wird, für dessen genaueres Verständnis die Bewegungsänderungen der einzelnen Luftatome beim

Anprall an eine feste Mauer zu untersuchen wären. Die Vergleichung mit dem, auf die Fläche von 1 qm gleichmäßig verteilten Schwerdrucke von 125 **kg** genügt uns vollkommen, um die Sicherheit der Mauer zu prüfen.

Ferner ist zu bemerken, daß die übliche Unterscheidung der Kräfte in Massenkräfte und in Oberflächenkräfte für die principielle Beziehung der statischen und kinetischen Kräfte keine Bedeutung hat, ebenso wenig die Frage, ob sich die Massenkräfte auf Oberflächenkräfte zurückführen lassen oder ob das Umgekehrte gilt oder ob wir bei dieser Unterscheidung stehen bleiben müssen.

Dies folgt aus der Überlegung, daß wir eine stets zugängliche Massenkraft, den Schwerdruck oder Schwerzug eines Belastungsstückes in der Nähe der Erdoberfläche, welcher auf der gegenseitigen Anziehung der Massen von Erde und Belastungsstück beruht, zum Messen aller anderen Kräfte benutzen, dabei aber die Belastung für den belasteten Körper nur als Oberflächenkraft verwenden können.

Die Fruchtbarkeit der Definition der Kraft zeigt sich ferner darin, daß nur bei ihr die gegenseitige Einwirkung zweier Körper auf die einfachste Form gebracht werden kann, welche sich vorstellen läßt. Bisher ist über den Ursprung der Kraft keine ausreichende Festsetzung gemacht worden, es wurde nur gesagt, daß sich an einem Atom, welches allein im Weltenraume vorhanden wäre, keine Bewegungsänderung und somit auch keine Kraft zeigen würde. Demgemäß ist die Kraft, welche der Bewegungsänderung eines Atoms entspricht, nicht allein durch dieses Atom bestimmt. Stellt man sich vor, daß sich zwei Atome A_1 und A_2 ruhend im Raume befinden, aber auch nur diese zwei, und daß diese, abgesehen von den Maßzahlen ihrer Massen, völlig gleichartig sind, so erscheint es natürlich, daß an jedem der beiden Atome eine Kraft auftritt, wenn überhaupt Bewegungsänderungen vorhanden sind. Soll der ganze Vorgang eindeutig bestimmt sein, so müssen diese Kräfte in der Verbindungsgeraden der beiden Atome liegen und entgegengesetzten Sinn haben. Haben die beiden Atome A_1 und A_2 die Massen μ_1 und μ_2 und die Beschleunigungen j_1 und j_2, so treten an ihnen bezw. die Kräfte $\mu_1 j_1$ und $\mu_2 j_2$ auf. Handelt es sich bei diesen Kräften um den, die ganze Außenwelt beherrschenden Sonderfall der Massenanziehung, wie ihn der fallende Stein und die Erde, der Mond und die Erde, die Erde und die Sonne für Körper darstellen, so liegt es nahe, die Beschleunigung von A_1 dem Atome A_2 zuzuschreiben und sie dessen Masse proportional zu setzen und ebenso die Beschleunigung von A_2 dem Atom A_1 zuzuschreiben und sie dessen Masse proportional zu setzen. Unter dieser Voraussetzung ist $j_1 = C \,.\, \mu_2$ und $j_2 = C \,.\, \mu_1$, so daß die beiden Kräfte die Gestalt $K_1 = \mu_1 \,.\, C \,.\, \mu_2$ und $K_2 = \mu_2 \,.\, C \,.\, \mu_1$ annehmen, d. h. die beiden Kräfte, welche hier aufeinander zustreben, erhalten dieselben Werte.

Verbindet man mit diesem Ergebnisse die Erfahrung, daß auch die Kräfte, welche man als Zug und Druck bezeichnet, stets paarweise auftreten und zwar so, daß jedem Zuge in seiner Richtung ein Gegenzug von gleichem Werte und jedem Drucke in seiner Richtung ein Gegendruck von gleichem

Werte entspricht, so gelangt man durch Verallgemeinerung zu einem Princip, welches **Princip der Paar-Wirkung** genannt werden mag.

Bezeichnet man zwei Kräfte von gleichem Werte, welche in einer Geraden liegen und entgegengesetzten Sinnes sind, als **Gegenkräfte**, so läßt sich dieses Princip, vollständig allerdings zunächst nur für zwei Atome, folgendermaßen aussprechen: **Kräfte treten stets paarweise auf, und zwar als Gegenkräfte.** Für zwei Atome liegen sie in deren Verbindungsgeraden und zwar tritt an jedem der beiden Atome eine der beiden Kräfte auf. Man pflegt diese beiden Gegenkräfte als Aktion und Reaktion zu unterscheiden, wenn man sein Augenmerk erst auf die eine (Aktion) richtet und dann die andere als deren Gegenwirkung (Reaktion) auffaßt. Darum heißt dieses Princip auch das **Princip der Gleichheit von Wirkung (Aktion) und Gegenwirkung (Reaktion).**

Ein Beispiel für die Auffassung zweier Gegenkräfte als Aktion und Reaktion bieten die in der Nähe der Erdoberfläche beweglichen Körper in ihrer Beziehung zur Erde. Bei ihnen fällt uns einerseits ihr freier Fall und anderseits, falls sie aufgehangen oder unterstützt werden, ihr Schwerdruck oder Schwerzug (Gewicht) auf, während wir die Gegenkraft, welche an der Erde haftet, zunächst nicht bemerken. Diese Gegenkraft, welcher bei der äußerst großen Masse der Erde eine äußerst kleine Bewegungsänderung der Erde entspricht, erregt erst unsere Aufmerksamkeit, wenn wir das Gleichgewicht aufgehangener und unterstützter Körper näher untersuchen. Nun kommt sie uns als Reaktion der Erde bezw. der mit dieser fest verbundenen Oberlage oder Unterlage zum Bewußtsein, bald als **eine** Kraft, bald in Seitenkräfte gespalten. Nun sprechen wir von der Reaktion einer Tragplatte oder eines Hakens oder von den beiden Stützreaktionen eines horizontal gelagerten Balkens u. s. w.

Hierbei tritt die Erdreaktion als statische Kraft auf, während ihre kinetische Wirkungsweise sich z. B. im Rückpralle fallender, mehr oder minder elastischer Körper zeigt.

Auf den Umstand, daß oft nur die eine Seite des Vorganges, den man als Paar-Wirkung bezeichnet, unsere Aufmerksamkeit fesselt, ist es auch zurückzuführen, daß man überhaupt von **einer**, auf einen Körper wirkenden Kraft zu sprechen pflegt und in dieser gegebenenfalls die Ursache seiner Bewegungsänderung sieht.

Hängen wir an die Kette einer gewöhnlichen Wanduhr den zugehörigen Gewichtskörper, so daß die Uhr in Gang kommt, so geben wir der gegenseitigen Einwirkung vom Gewichtskörper und Erde Gelegenheit, die Uhr zu treiben. Statt dessen sagen wir, daß eine Kraft, der Schwerzug (Gewicht) des Gewichtskörpers, an der Kette wirkt.

Bringen wir unsere Handflächen unter Anspannung der Muskulatur mit einem Gegenstande in Berührung, um ihn fortzuschieben, so fesselt uns meist die Wirkung unserer Thätigkeit und nicht die Rückwirkung des Gegenstandes auf unseren Körper. Deshalb sprechen wir auch hier von der Kraft, die den Gegenstand angreift.

Streng genommen, müßten wir bei jeder Paar-Wirkung stets beide Körper zusammen in ihrer gegenseitigen Wirkung als die Ursache der be-

trachteten Vorgänge ansehen. Von einem Winddrucke z. B. kann erst die Rede sein, wenn der Wind ein mehr oder minder festes Hindernis trifft. Wie auf anderen Gebieten pflegt man aber auch hier einen Teil der Bedingungen allein als Ursache zu bezeichnen, unter der stillschweigenden Voraussetzung, daß alles Übrige als Selbstverständliches hinzugedacht wird. Unter dieser Voraussetzung rechtfertigt es sich auch, die Kraft, wie es üblich ist, als Ursache der Bewegungsänderung zu bezeichnen, nur müßte man sie dann auch die Ursache des Zuges oder Druckes nennen, denn Kraft bedeutet ja in beiden Fällen den Teil einer Paar-Wirkung, welcher gerade unsere Aufmerksamkeit fesselt.

Bei vielen Aufgaben betrachten wir zugleich den einen Teil der vorhandenen Paar-Wirkungen vollständig, den anderen nur nach der einen Seite seiner Wirksamkeit. Dieses geschieht jedesmal, wenn wir einen bestimmten Körper der Außenwelt oder eine bestimmte Körpergruppe in ihr für die Betrachtung von allen übrigen Körpern trennen wollen oder müssen. Denkt man sich diese bestimmten Körper oder diese bestimmte Körpergruppe durch eine gewöhnliche allseitig geschlossene Fläche von allen übrigen Körpern abgegrenzt, so nennt man alle Kräfte, welche Paar-Wirkungen innerhalb des begrenzten Raumes entsprechen, innere Kräfte, die Kräfte aber, welche innerhalb des begrenzten Raumes auftreten, während ihre Gegenkräfte sich an außerhalb desselben gelegenen Körpern zeigen, äußere Kräfte des Körpers oder der Körpergruppe. Die Gegenkräfte der äußeren Kräfte fesseln unsere Aufmerksamkeit ebensowenig wie die Paar-Wirkungen, welche vollständig außerhalb des begrenzten Raumes vor sich gehen. Ändern wir die Begrenzung, so ändert sich auch das System der inneren und äußeren Kräfte.

So beschäftigen uns z. B. bei einem fallenden Körper nur die gegenseitigen Einwirkungen seiner Atome als innere Kräfte und die Einwirkung der Erde auf ihn als äußere Kraft.

Im Verein mit der Definition der Kraft, wonach diese für ein Atom das Produkt aus einer, dem Atome zugehörigen Konstanten (Masse) und dessen Beschleunigung ist, liefert das Princip der Paar-Wirkung eine ziemlich umfassende Grundlage für alle weitere Betrachtungen.

Aus der Gleichheit der Gegenkräfte folgt nämlich, daß sich die Massen zweier Atome, wenn diese allein im Raume vorhanden sind, umgekehrt verhalten wie die Beschleunigungen, welche an ihnen zugleich auftreten. Demgemäß könnte man das Verhältnis dieser Massen aus dem Verhältnisse der gleichzeitig an ihnen beobachteten Beschleunigungen ableiten und so, nachdem die Einheit der Masse festgestellt ist, zu einer Bestimmung ihrer Massen gelangen.

Auch das Princip der Beharrung wird durch das Princip der Paar-Wirkung umfaßt. Wenn jede Bewegungsänderung einer Kraft entspricht und Kräfte nur paarweise an je zwei Atomen auftreten, so ist jede Bewegungsänderung, im besonderen auch der Übergang aus der Ruhe und der Übergang in die Ruhe, für ein allein im Weltenraume befindliches Atom ausgeschlossen.

Da es sich in der Außenwelt nicht um ein Atom oder ein Paar von Atomen, sondern um ausgedehnte Körper handelt, so muß das Princip der Paar-Wirkung in seiner Beschränkung auf zwei Atome durch ein Princip ergänzt werden, welches den Übergang von Atomen zu ausgedehnten Körpern ermöglicht.

Steht ein Atom A einer Gruppe von n Atomen gegenüber, welche zunächst als starrer Körper aufgefaßt werden mag, so hat man, abgesehen von den gegenseitigen Wirkungen innerhalb der Gruppe, die gegenseitige Einwirkung jedes Atomes der Gruppe und des Atomes A zu betrachten. Gilt das Princip der Paar-Wirkung für je zwei Atome, so erhält A durch jedes Atom der Gruppe eine Beschleunigung, so daß an ihm die Beschleunigungen $j_1, j_2, \ldots, j_n$ und die entsprechenden Kräfte $\mu . j_1, \mu . j_2, \ldots, \mu . j_n$ zusammen auftreten, während umgekehrt von deren Gegenkräften an jedem Atome der Gruppe eine erscheint.

Hier erhebt sich sofort die Frage, ob sich alle diese Kräfte voneinander unabhängig und unabhängig von etwa schon vorhandenen Bewegungen bilden, d. h. ob sie der Reihe nach so berechnet werden können, als wenn es sich jedesmal nur um ein Paar von Atomen handelte. Dazu kommt die weitere Frage nach einer Vereinigung der einzelnen Kräfte am Atom A und innerhalb der Gruppe, da ja das Atom bei seiner Bewegung nur eine Linie verfolgen und die Gruppe, welche ja als starrer Körper vorausgesetzt wurde, auch nur eine bestimmte Art der Bewegung zeigen kann.

Dieselben Fragen treten noch dringlicher auf, wenn sich zwei Atomgruppen gegenüberstehen oder gar zwei Körper innerhalb der ganzen Außenwelt, welche ja, abgesehen von ihrer gegenseitigen Einwirkung, auf jeden anderen Körper der Außenwelt einwirken und zugleich dessen Wirkungen ausgesetzt sind.

Das Princip, welches hier die weitere Untersuchung beherrscht, sagt aus, daß alle Bewegungen, welche in einem Augenblicke an einem Atome zugleich auftreten, voneinander unabhängig sind und stets nach einer und derselben Vorschrift vereinigt werden können. In seiner Anwendung auf Kräfte ist dieses Princip aus dem ersten Lehrgange der Physik als Satz vom Parallelogramm der Kräfte bekannt.

Um dieses Princip auf Atomgruppen und ausgedehnte Körper auszudehnen, müssen über deren Beschaffenheit von Fall zu Fall bestimmte Voraussetzungen gemacht werden, welche den in der Außenwelt gegebenen Beziehungen möglichst genau entsprechen. So genügt z. B. die Annahme, daß ein Körper starr ist, um für diesen die Untersuchung weiter durchführen zu können.

Man bezeichnet das Princip, welches zur Ergänzung des Principes der Paar-Wirkung herangezogen werden muß, als Princip der Superposition (Übereinanderlagerung) der Bewegungen oder als Princip der Unabhängigkeit der Bewegungen oder als Princip des Parallelogramms. Wir werden den letzten Namen wählen.

Unter allen Umständen denkt man sich in diesem Principe sowohl die Voraussetzung der erwähnten Unabhängigkeit der einzelnen Bewegungen als auch die Vorschrift für ihre Vereinigung zusammengefaßt.

Das Princip des Parallelogramms ist ursprünglich in zwei verschiedenen Sätzen zur Geltung gekommen, in dem Satze vom Parallelogramm der Bewegungen (Aristoteles, Galilei, Newton) und im Satze vom Parallelogramm der Kräfte (Stevin, Varignon, Newton).

Es ist wieder ein Zeichen für die Fruchtbarkeit der Definition der Kraft, daß sich durch ihn diese beiden Sätze zusammenziehen und zu einem Principe erheben lassen. Da nach dieser Definition Kräfte, welche an einem Atome zugleich wirken, den augenblicklichen Beschleunigungen proportional sind und deren Richtungen haben, so muß für die Vereinigung der Kräfte und für die Vereinigung der Beschleunigungen dieselbe Vorschrift gelten. Die Vorschrift für die Vereinigung der Beschleunigungen folgt aber aus der Vorschrift für die Vereinigung der Wege, welche man als Parallelogramm der Bewegungen bezeichnet. Dieses lautet in seiner einfachsten Form, nämlich für zwei gleichförmige Bewegungen auf gerader Linie: Würde ein Atom in einer bestimmten Zeit durch eine Bewegung I von O nach A_1 und durch eine Bewegung II von O nach A_2 geführt, so wird es durch beide Bewegungen zusammen in derselben Zeit von O nach dem vierten Eckpunkte A des Parallelogramms geführt, welches durch die Punkte O, A_1, A_2 bestimmt ist und zwar auf der Diagonale OA.

Das Princip der Paar-Wirkung und das Princip des Parallelogramms beherrschen, im Verein mit der Definition der Kraft, die gesamte physikalische und technische Mechanik.

Mit ihnen ist die Reihe der Principien, welche in der Mechanik zur Geltung kommen, allerdings durchaus noch nicht erschöpft, aber ihre Besprechung genügt für ein genaueres Verständnis der Gliederung und des Aufbaues der technischen Mechanik.

Für die physikalische Mechanik ist weiter zu bemerken, daß durchaus nicht alle Bewegungen der Körper durch die Gesetze der Bewegung und den Massenbegriff vollständig erklärt werden können, es gilt dies für einen großen Teil der Bewegungen, als deren Träger man ursprünglich, im Gegensatze zu der wägbaren Masse, sogenannte Imponderabilien einführte. Als Beispiele mögen die Bewegungen eines Ankers zu seinem Magnete oder die Lagenänderungen beweglicher, von elektrischen Strömen durchflossener Drahtspiralen angeführt werden. Für die Behandlung dieser Erscheinungen sind wiederum Principien nötig, welche in einer physikalischen Mechanik ihre Stelle finden müssen.

Innerhalb der technischen Mechanik werden diese Erscheinungen vorläufig ausgeschlossen, weil die Entwickelung der Technik erst verhältnismäßig spät dazu geführt hat, auch diese Gebiete wenigstens teilweise nutzbar zu machen, nur das Gebiet der Wärmeerscheinungen kann bereits als angegliedert gelten. Obwohl das Gebiet solcher Angliederungen sicherlich mit der Zeit wachsen wird, so wird doch, schon im Hinblick auf die nötige Arbeitsteilung, der alte Stamm der technischen Mechanik, nämlich die Lehre von den Bewegungen, welche durch den Begriff Masse beherrscht werden, ein für sich bestehendes Ganzes bleiben.

Diesem Gebiete gelten unsere weiteren Betrachtungen.

Für alle principiellen Bestimmungen aber, welche innerhalb dieses Gebietes und seiner möglichen Erweiterungen etwa nötig werden, gilt als oberster Grundsatz, daß sie eindeutig sind, d. h. daß bei ihrer Verwendung kein Zweifel darüber entsteht, welche Bewegung ein Körper der Außenwelt unter bestimmten Bedingungen ausführt.

IV. Die weitere Einteilung der technischen Mechanik. Die beiden Hauptabschnitte unserer Wissenschaft, die Phoronomie und die Dynamik, lassen sich nun genauer kennzeichnen.

1. In der Phoronomie handelt es sich darum, die Bewegung eines starren Körpers möglichst vollständig zu untersuchen und darzustellen, ohne dabei den Begriff Masse zu verwenden oder Begriffe, die aus ihm abgeleitet werden können, wie z. B. der Begriff Kraft. Dabei zeigt es sich, daß die Bewegungen eines starren Körpers, zunächst die Parallelverschiebung und die Achsendrehung, stets auf die Bewegungen von Punkten zurückweisen, so daß die Untersuchung und Darstellung der Bewegung eines Punktes in den Mittelpunkt der Phoronomie tritt. In ihr wird, unter Berücksichtigung des Principes der Beharrung, die scharfe Begriffsbestimmung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung eines Punktes für einen bestimmten Zeitpunkt gewonnen. Mit dem Begriffe Verlegung (Dislokation) zusammen bilden sie die Grundlage jeder weiteren Untersuchung. Verlegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung gehören zu den Richtungsgrößen, d. h. sie erfordern neben der Angabe eines bestimmten Wertes noch die Angabe einer bestimmten Richtung, wenn sie bekannt sein sollen. Ihre Vereinigung und Zerlegung wird unter gewissen, von Fall zu Fall zu bestimmenden Voraussetzungen durch das Princip des Parallelogramms beherrscht. Innerhalb der technischen Mechanik ist es nicht üblich, in der Phoronomie auch andere Körper zu behandeln als starre, man überweist die phoronomische Untersuchung anderer Körper, wenn sie innerhalb der Dynamik notwendig wird, diesem Abschnitte.

Die Größen der Phoronomie sind aus zwei Grundeinheiten gebildet, der Einheit der Länge, welche die ganze Geometrie beherrscht (Inhalt des Rechtecks $= a \cdot b$, Inhalt des Rechtkants $= a \cdot b \cdot c$) und der Einheit der Dauer, als welche im allgemeinen Meter und Sekunde gewählt werden.

Für Phoronomie ist auch das gleichbedeutende Wort Kinematik[1]) in Gebrauch, ebenso der Ausdruck Reine Bewegungslehre oder Mathematische Bewegungslehre.

2. In der Dynamik tritt neben den Einheiten der Phoronomie die Einheit der Masse als neue Einheit auf, so daß die abgeleiteten Einheiten hier auf die drei Grundeinheiten der Länge, Dauer und Masse zurückweisen.

---

[1]) Das Wort Kinematik wird auch gebraucht, um den Teil der Phoronomie zu bezeichnen, welcher die Bewegung lediglich im Sinne der Geometrie, d. h. ohne Berücksichtigung der Zeit, betrachtet. Dieser heißt auch Geometrie der Bewegung oder Geometrische Bewegungslehre.

Die Einheit der Masse ist innerhalb der technischen Mechanik früher stets aus der Einheit der statischen Kraft abgeleitet worden. Man ging von einem bestimmten Schwerdruck oder Schwerzug (Gewicht) aus als Einheit der Kraft und leitete daraus gemäß der Gleichung:

$$\text{Gewicht} = \text{Masse} \times \text{Fallbeschleunigung}$$

die Masse ab.

Für ein Kilostück als Einheit der Kraft, welches Kraft-Kilo heißen mag, hat man somit als Masse anzusetzen:

$$\frac{1 \text{ Kraft-Kilo}}{\text{Fallbeschleunigung}} = \frac{1}{g}$$

und demnach wird die Einheit der Masse hier durch g Kilostücke dargestellt.

Mit diesem technischen Maßsysteme für Kraft und Masse ringt augenblicklich noch das physikalische Maßsystem für Kraft und Masse.

Hier wird für technische Verhältnisse die Masse eines Kilostückes als Einheit der Masse genommen, sie mag Massen-Kilo heißen. Ihr entspricht gemäß der Gleichung:

$$\text{Gewicht} = \text{Masse} \times \text{Fallbeschleunigung}$$

das Gewicht

$$1 \text{ Massen-Kilo} \times \text{Fallbeschleunigung} = g$$

und demnach wird die Einheit der Kraft hier durch das Gewicht von $\frac{1}{g}$ Kilostück dargestellt, sie ist also unabhängig von g.

Die Beziehung beider Maßsysteme wird dadurch bestimmt, daß die Einheiten des technischen Systems g-mal (d. h. angenähert 10mal) größer sind als die Einheiten des physikalischen, für technische Zwecke gebrauchten[1]) Systems.

Der gleichzeitige Gebrauch beider Systeme innerhalb der Technik und der Umstand, daß ein Kilostück einmal in Bezug auf seinen Schwerdruck oder Schwerzug (Gewicht) und einmal in Bezug auf seine Masse gewertet wird, mahnt zur Vorsicht.

Es ist zweckmäßig, stets in Erinnerung zu behalten, daß die gewöhnliche Hebelwage der Massenvergleichung dient. Steht ihr Balken für bestimmte Belastungen horizontal, so behält er diese Stellung bei, unabhängig von dem Orte, an dem man sich befindet. Dagegen dienen zur Messung der Kräfte sogenannte Dynamometer, welche in kleinem Maßstabe als Federwagen, bald für Zug und bald für Druck eingerichtet, im täglichen Gebrauche sind (z. B. als Briefwagen, Fleischwagen u. s. w.). Die Stellung, welche der Zeiger einer solchen Wage bei einer bestimmten Belastung zeigt, ist durchaus abhängig von der Stelle, an der man sich befindet, weil der Schwerzug oder Schwerdruck als Produkt aus Masse und Fallbeschleunigung durch die Veränderlichkeit der Fallbeschleunigung selbst verändert wird.

Da nun das Gewicht eines Körpers von g abhängt und g auf der Erde, innerhalb und oberhalb derselben veränderlich ist, so muß man bei

[1]) In der Physik wählt man Gramm und Centimeter statt Kilogramm und Meter.

strenger Betrachtung im technischen System hinzufügen, für welche Stelle der Erde die Definition des Kraft-Kilos gelten soll. Man wählt meistens eine Stelle im Meeresniveau unter 45° Breite. Da die Veränderlichkeit von g auf der Oberfläche der Erde für technische Verhältnisse im allgemeinen verschwindend klein ist, so hat diese genaue Bestimmung jedoch meist keinen praktischen Wert.

Neben der Kraft ist unter den Einheiten der Dynamik besonders eine hervorzuheben, welche bald als Kraftmoment, bald als Arbeit und bald als Energie erscheint. Man hat neuerdings mehrfach versucht, diese Einheit und zwar als Energie in der Dynamik an die Stelle der Kraft treten zu lassen.

Der erste Abschnitt der Dynamik dient der Verbindung von Phoronomie und Dynamik, er wird in der technischen Mechanik meist als Lehre vom materiellen Punkte bezeichnet. Damit soll ausgedrückt werden, daß der Punkt, welcher in der Phoronomie nur als geometrisches Gebilde behandelt wird, jetzt als Träger von Materie (Masse) erscheint und somit geeignet wird, bei der Darstellung von Körpern der Außenwelt verwendet zu werden. Materielle Punkte sind nicht notwendig mit einer Masse belastet zu denken, welche unendlich-klein ist im Vergleich mit den Massen, die wir wirklich beobachten. Soll dieses der Fall sein, so wird der materielle Punkt als Atom bezeichnet. Diesen Abschnitt beherrscht die Definition der Kraft, welche man wohl auch die dynamische Grundgleichung nennt.

Für die weitere Entwickelung der Dynamik müssen die Aufgaben, bei welchen Körper unter dem Einfluß von Kräften in Ruhe sind, getrennt werden von den Aufgaben, bei welchen die Körper unter dem Einfluß der Kräfte in Bewegung sind; man nennt das erste Gebiet Statik, das zweite Kinetik[1]). Diese Unterscheidung kreuzt sich mit einer zweiten Einteilung, wonach in der Dynamik der Reihe nach die starren Körper und die den Aggregatzuständen entsprechenden Körperarten der Außenwelt behandelt werden müssen.

In der technischen Mechanik ist es üblich, mit der Dynamik des starren Körpers zu beginnen und das Bild, welches er darstellt, mehr und mehr den Beziehungen anzupassen, welche die Körper der Außenwelt, namentlich die festen Körper, zeigen. Nachdem man den starren Körper ganz allgemein unter dem Einfluß von Kräften behandelt hat, setzt man voraus, daß er sich in gegenseitiger Einwirkung mit der Erde befindet und untersucht zunächst das System der dabei an dem Körper auftretenden Kräfte in der Lehre vom Schwerpunkte. Darauf behandelt man die entsprechende Erdreaktion, welche bei aufgehangenen und gestützten Körpern, meist in mehrere Seitenkräfte gespalten, auftritt, und verwandte Reaktionen in der Lehre von den Reaktionen. Dann betrachtet man die Tangentialreaktionen, welche in den Berührungsflächen der Körper auftreten, wenn sie aufeinander gepreßt werden, in der Lehre von der Reibung.

[1]) Für Kinetik ist auch noch die ältere Bezeichnung Dynamik in Gebrauch, so daß dann ein Wort für die Zusammenfassung von Statik und Dynamik zur Lehre von den Kräften fehlt.

Die beiden Abschnitte von den Reaktionen und von der Reibung bilden die Grundlage für die Behandlung statischer Aufgaben, doch leitet die Lehre von der Reibung bereits zur Kinetik über, da es sich bei den entsprechenden Aufgaben schon um Bewegungen unter Einfluß von Kräften handelt, allerdings meist von Kräften, die sich gegenseitig aufheben. Den Beschluß bildet die Kinetik starrer Körper.

In der Folge behandelt man die festen Körper der Außenwelt, welche sich oft als starre Körper auffassen lassen, mit Rücksicht auf ihre thatsächlichen Formänderungen, zunächst wieder in statischer, dann in kinetischer Hinsicht. Dies führt zu den beiden Kapiteln Elasticität und Festigkeit und Stoß fester Körper, denen noch die allgemeine Grundlage für eine Theorie der Maschinen zur Seite tritt.

Darauf geht man zu den Flüssigkeiten und Gasen über, welche man als Flüssigkeiten von bleibendem Volumen und Flüssigkeiten von veränderlichem Volumen unterscheidet, weil Flüssigkeiten und Gase zusammen den festen Körpern gegenüber so viel Gemeinsames bieten, daß dagegen ihr Unterschied verhältnismäßig zurücktritt.

Auch hier beginnt man mit den statischen Aufgaben und geht dann zu den kinetischen über.

Statische und kinetische Aufgaben stehen in allen Gebieten in einem engen Zusammenhange, welcher durch das Princip von d'Alembert zum Ausdruck gebracht wird.

Entsprechend den alten Elementen „Feuer, Wasser, Luft und Erde“, welche thatsächlich ein Bild der drei Aggregatzustände und des Mittels für ihre Überführungen (Feuer) darstellen, hat man lange Zeit die Erde als Beispiel der festen, das Wasser als Beispiel der flüssigen und die Luft als Beispiel der gasigen Körper angesehen. Darauf beruhen jetzt noch übliche Namen für einzelne Abschnitte der Mechanik, welche gerade in den Lehrbüchern der technischen Mechanik ein zähes Leben fristen.

Man unterscheidet[1]) in dieser Hinsicht:

1. Geodynamik
   a) Geostatik
   b) Geokinetik
   } in Bezug auf die festen Körper.
2. Hydrodynamik
   a) Hydrostatik
   b) Hydrokinetik = Hydraulik[2])
   } in Bezug auf die flüssigen Körper.
3. Aerodynamik
   a) Aerostatik
   b) Aerokinetik
   } in Bezug auf die gasigen Körper.

---

[1]) Dabei ist für Kinetik wiederum zum Teil noch das Wort Dynamik in Gebrauch, während für die Lehre von den Kräften eine Bezeichnung fehlt. Vergl. Anmerk. S. 18.

[2]) Eigentlich „Bewegung des Wassers in Röhren“. An diesem wichtigen Beispiele wurde die Untersuchung ursprünglich geführt.

Sehen wir von diesen veralteten Bezeichnungen ab, so gewinnen wir folgende Einteilung der technischen Mechanik.

I. Phoronomie (Reine Bewegungslehre) als Lehre von den Gesetzen der Bewegung ohne Rücksicht auf die bewegenden Kräfte bezw. auf die Masse:
   1. Die Grundbegriffe.
   2. Die Richtungsgrößen.
   3. Die Bewegung des starren Körpers.

II. Dynamik als Lehre von den Kräften:
   1. Der materielle Punkt.
   2. Die Dynamik des starren Körpers.
      a) Kräfte am starren Körper.
      b) Der Schwerpunkt.
      c) Statik (Lehre vom Gleichgewicht) als Lehre von der Ruhe unter dem Einfluß von Kräften.
         α) Reaktionen.
         β) Reibung.
      d) Kinetik als Lehre von der Bewegung unter dem Einfluß von Kräften.
   3. Die Dynamik fester Körper.
      a) Elasticität und Festigkeit.
      b) Stoß.
      c) Allgemeine Theorie der Maschinen.
   4. Die Dynamik flüssiger Körper von bleibendem und veränderlichem Volumen.

V. Die Größen der technischen Mechanik. Die Größen, welche in der Mechanik auftreten, geben noch zu drei Bemerkungen Anlaß.

Erstens spielen neben den auch im Verkehr des gewöhnlichen Lebens verwendeten Größen auch Größen eine wichtige Rolle, welche man im Gegensatz zu diesen als unendlich-klein zu bezeichnen pflegt. Sie treten mit Notwendigkeit auf, weil sich die Principien der Mechanik zunächst nur für Bewegungen von Atomen und auch für diese nur in Bezug auf eine verschwindend-kleine Zeit aussprechen lassen. Aus einer, jede angebbare Zahl übersteigenden Menge solcher unendlich-kleinen Größen hat man die endlichen Größen aufzubauen, d. h. die Größen, welche man gemeinhin kennt. Dem Aufbau entspricht natürlich eine entsprechende Zerlegung. Größen, die zu den endlichen Größen in derselben Beziehung stehen, wie diese zu den unendlich-kleinen, werden unendlich-groß genannt.

Das Arbeiten mit solchen Größen fordert besondere Betrachtungen, die man als Grenzbetrachtungen zu bezeichnen pflegt, weil weder das Unendlich-Kleine noch das Unendlich-Große etwas Anschauliches ist, sondern durch die Betrachtung einer unbegrenzten Abnahme bezw. Zunahme endlicher Größen erschlossen werden muß. Man stellt dabei der Grenze Null die Grenze Unendlich, welche durch das Zeichen ∞ dargestellt wird, gegenüber und sagt: Eine Größe heißt unendlich-klein bezw. unendlich-groß, wenn sie

durch Abnahme einer endlichen Größe bis zur Grenze Null bezw. durch Zunahme einer endlichen Größe bis zur Grenze Unendlich entstanden gedacht wird.

Besonders spielen die Verhältnisse unendlich-kleiner Größen bezw. auch unendlich-großer Größen bei diesen Betrachtungen eine große Rolle, weil diese Verhältnisse endlich sein können. Daß dieses der Fall ist, zeigt am einfachsten die fortgesetzte Erweiterung eines Bruches, einmal durch einen echten Bruch und einmal durch einen unechten Bruch. Man hat z. B.:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{3 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}}{3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}} = \cdots\cdots$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \, . \, 5}{3 \, . \, 5} = \frac{2 \, . \, 5 \, . \, 5}{3 \, . \, 5 \, . \, 5} = \cdots\cdots$$

Im ersten Falle werden auf der rechten Seite Zähler und Nenner immer kleiner bis zur Grenze Null, im zweiten Falle werden auf der rechten Seite Zähler und Nenner immer größer bis zur Grenze Unendlich, während die linke Seite der Gleichung in beiden Fällen den Werth $\frac{2}{3}$ anzeigt.

Die zweite Bemerkung steht mit der ersten in engem Zusammenhange. Da das Unendlich-Kleine bezw. das Unendlich-Große durch Abnahme bezw. Zunahme einer endlichen Größe gewonnen wird, so muß man sich endliche Größen, welche zu einem Schlusse auf das Unendlich-Kleine bezw. Unendlich-Große benutzt werden, sehr oft nicht starr, sondern flüssig denken. Man nennt sie dann veränderliche oder variabele Größen, auch wohl kurz Veränderliche oder Variabelen, und bezeichnet im Gegensatz zu ihnen Größen von fester Maßzahl als beständige oder konstante Größen, kurz als Beständige oder Konstanten. Das einfachste Bild für eine veränderliche Größe ist der Weg, den ein Punkt bei seiner Bewegung[1]) zurücklegt. Denkt man sich die Strecke AB von A nach B ohne Umkehr durchlaufen, so wächst der durchlaufene Weg (von A aus gerechnet), während der noch zu durchlaufende Weg (von B aus gerechnet) abnimmt und zwar während der Bewegung bezw. von 0 bis AB und von BA bis 0. Ersetzt man die Strecke AB durch einen Halbstrahl von A aus, so werden die Grenzen des Weges Null und Unendlich. Denkt man den Halbstrahl mit der Gesamtheit der positiven Zahlen besetzt, so daß die Null auf A fällt, so kann man jede Zahl als die Maßzahl des bis zu ihr durchlaufenen Weges auffassen und damit die Vorstellung verbinden, daß sie gerade so entstanden ist wie jener Weg. Dehnt man diese Betrachtung auf einen zweiten Halbstrahl aus, der mit dem ersten zusammen eine Gerade bildet, so kann man diese Auffassung auch auf die Gesamtheit der negativen Zahlen ausdehnen und so das ganze Gebiet der reellen Zahlen als den Spielraum einer Variabeln ansehen. Die Bewegung ist stetig, d. h. sie überspringt keinen Punkt der

[1]) Diese weist wiederum auf den Fluß der Zeit zurück.

Bahn, und darum denkt man sich auch die Variabele, wenn sie von $-\infty$ über 0 nach $+\infty$ wandert, in stetigem Flusse. Faßt man die Variabele nicht bloß als Zahl auf, sondern als Maßzahl einer Größe, so überträgt man das Bewegungsbild auch auf diese.

Bezeichnet man einen Rechenausdruck, welcher aus Zahlen bezw. aus Maßzahlen von Größen gebildet ist, als eine Funktion dieser Größen, so ist die Funktion von Konstanten wieder eine Konstante, während eine Funktion, welche nur oder auch Variabelen enthält, meist selbst veränderlich ist.

Ob eine bestimmte Größe als Konstante aufzufassen ist, hängt sehr oft von dem Grade der Genauigkeit ab, mit dem man arbeitet. So ist z. B. die Fallbeschleunigung g für viele Beziehungen als Konstante zu betrachten, während sie bei genaueren Ansätzen als Variabele erscheint, abhängig von der geographischen Breite des Beobachtungsortes und von seiner Höhenlage zur Erdoberfläche.

Drittens zerfallen die Größen der Mechanik noch in ganz anderer Hinsicht in zwei verschiedene Klassen.

Die Größen der einen Klasse sind durch Angabe der Einheit und einer Maßzahl vollständig bestimmt und lassen sich infolgedessen nach den Regeln der Arithmetik behandeln. Hierher gehören Winkel, Länge, Fläche, Volumen, Dauer, Durchschnittsgeschwindigkeit, Durchschnittsbeschleunigung, Masse u. s. w.

Innerhalb dieser Klasse lassen sich Größen von derselben Einheit zunächst addieren und subtrahieren. In formeller Hinsicht steht auch der Anwendung der anderen Rechnungsarten auf sie nichts entgegen, doch kann hier nur von Fall zu Fall entschieden werden, ob dem Ergebnisse der Rechnung eine bestimmte Bedeutung zukommt. So führt z. B. für 3 m das Quadrieren zu 9 qm, während das Quadrieren von 3 Sekunden an und für sich keine Bedeutung hat.

Bei der Bildung der abgeleiteten Größen der Mechanik spielt auch die Multiplikation und Division von Größen verschiedener Einheit eine Rolle. Diese abgeleiteten Größen, deren Einheiten aus den drei Grundeinheiten Länge, Dauer und Masse gebildet werden, sind sogar geradezu durch die Rechnungsarten gekennzeichnet, welche zu ihrem Aufbau nötig sind.

Man überträgt hier die Rechnungsarten, welche an den Maßzahlen zu vollziehen sind, auf die Größen selbst, während diese, streng genommen, als Zahlen, nämlich im Verhältnis zu ihrer Einheit, in die Rechnung eintreten. Die Art des Aufbaues aus den Grundeinheiten wird dabei Dimension genannt, und man bezeichnet dabei die Länge durch l, die Dauer durch t, die Masse durch m.

So hat z. B. die Geschwindigkeit als Verhältnis zwischen Weg und Zeit die Dimension „Länge : Dauer" oder kürzer $\frac{l}{t} = l^1 . t^{-1}$. So hat die Beschleunigung als Verhältnis zwischen Geschwindigkeit und Zeit die Dimension „(Länge : Dauer) : Dauer" oder kürzer $\frac{l}{t^2} = l^1 . t^{-2}$. So hat die Kraft

als Produkt aus Masse und Beschleunigung die Dimension $m^1 . l^1 . t^{-2}$, das Kraftmoment als Produkt aus Kraft und Arm die Dimension $m^1 . l^2 . t^{-2}$, die Arbeit als Produkt aus Kraft und Weg ebenfalls die Dimension $m^1 . l^2 . t^{-2}$, die Energie als halbes Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat wiederum die Dimension $m^1 . l^2 . t^{-2}$. Die Gleichungen zwischen den Größen dieser Klasse müssen stets homogen sein, d. h. es müssen auf der linken und der rechten Seite der Gleichung Größen derselben Art stehen, wobei die Art lediglich durch die Dimension bestimmt ist. So ist z. B. die Gleichung:

7 Arbeitseinheiten — 3 Geschwindigkeitseinheiten = 4 Wegeinheiten

ohne jeden Sinn, während die Gleichung:

7 Arbeitseinheiten — 3 Kraftmomentseinheiten = 4 Energieeinheiten

einen wohl bestimmten Sinn giebt, weil hier alle auftretenden Größen von der Dimension $m^1 . l^2 . t^{-2}$ und demnach vergleichbar sind. Die Dimension kennzeichnet die Einheit ihrer Art nach, bestimmt sie aber nicht völlig, weil außerdem festgestellt werden muß, welche Länge (z. B. Meter oder Centimeter u. s. w.) als Einheit der Längenmessung u. s. w. gelten soll. Für den Übergang von einer Einheit zur anderen, z. B. von Kilogramm zu Gramm, leisten die Dimensionsformeln gute Dienste.

Man hat für die Größen dieser ersten Klasse den Namen Skalaren vorgeschlagen, weil die Gesamtheit der Maßzahlen einer bestimmten Größe dieser Klasse die einfache Skala der reellen Zahlen giebt bezw. einer entsprechenden Einteilung (Längenmaß) entspricht.

Im Gegensatz zu dieser ersten Klasse steht eine zweite Klasse von Größen, welche für ihre Bestimmung neben der Angabe einer Maßzahl und einer Einheit auch noch die Angabe einer Richtung erfordern. Man nennt sie Richtungsgrößen.

Das Wort Richtung wird hier eindeutig gebraucht und zwar in folgendem Sinne: Denkt man sich von einem Punkte O im Raume alle möglichen Halbstrahlen gezogen, so bezeichnet jeder dieser Halbstrahlen in seinem Verlaufe von O aus eine bestimmte Richtung (Halbstrahlenbündel).

Die beiden Richtungen, welche zwei auf derselben Geraden gelegene Halbstrahlen des Bündels haben, heißen entgegengesetzte Richtungen.

Von der Richtung ist der Sinn zu unterscheiden. Denkt man sich eine beliebige Linie AB einmal von A nach B und einmal von B nach A durchlaufen, so unterscheidet man diese beiden Arten des Durchlaufens, indem man von dem Sinne AB und dem Sinne BA spricht, welche einander entgegengesetzt sind. Oft vergleicht man den Sinn mit der Bewegung des Uhrzeigers (+) und deren Gegenbewegung (—).

Für gerade Linien wäre es nicht nötig, den Sinn AB von dem Sinn BA zu unterscheiden, hier käme man mit der Angabe der beiden Richtungen AB und BA aus.

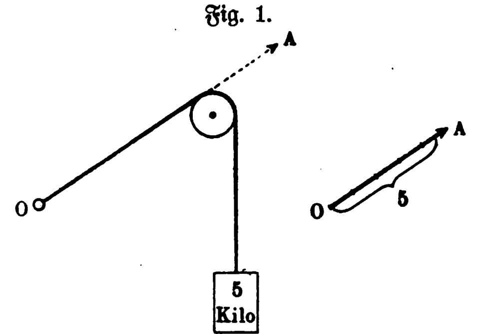
Legt man einer Richtungsgröße eine bestimmte Richtung bei, so sagt man damit, daß sie einem bestimmten Halbstrahle des Bündels parallel ist und so verläuft, wie dieser Halbstrahl von O aus gezogen ist.

Das Arbeiten mit solchen Richtungsgrößen wird sehr erleichtert, wenn man sie durch **Vektoren** (Richtungsstrecken) darstellt.

Schon in dem einleitenden Lehrgange der Physik kommen solche Richtungsgrößen und auch die entsprechenden Vektoren vor, mindestens bei der Behandlung der Kräfte.

Um eine Kraft durch einen Vektor darzustellen (vergl. Fig. 1), giebt man einer Strecke, welche die Richtung der Kraft hat, eine Länge, deren Maßzahl mit der Maßzahl der Kraft übereinstimmt (z. B. 5 cm bei 5 kg). Die Richtung bezeichnet man entweder durch einen Pfeil oder durch die Angabe OA.

Fig. 1.

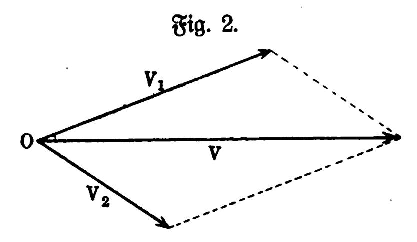


Allgemein ist ein Vektor eine Strecke, welche die Richtung und Maßzahl einer Richtungsgröße in ihrer Richtung und Maßzahl darstellt.

Der Punkt (O), von dem der Vektor ausgeht, wird **Ursprung** genannt.

Auch die **Grundlage der Vektorenlehre** wird bereits in dem ersten Lehrgange der Physik zur Anschauung gebracht, sie tritt hier als Parallelogramm der Kräfte auf. Um zwei Kräfte, welche von einem Punkte ausgehen, zu vereinigen, stellt man sie durch ihre Vektoren mit dem gemeinsamen Ursprunge O dar und zieht in dem, durch diese Vektoren bestimmten Parallelogramm die von O ausgehende Diagonale. Diese stellt eine neue Kraft dar, welche die Wirkung der beiden gegebenen Kräfte in sich vereinigt, aber auch wieder in jene beiden Kräfte zerlegt werden kann.

Fig. 2.



Allgemein gilt (vergl. Fig. 2): Zwei Vektoren V_1 und V_2 werden vereinigt, indem man ihnen denselben Ursprung O giebt und in dem, nun **durch sie bestimmten Parallelogramm** die Diagonale V aus O zieht. Diese Diagonale V ersetzt die beiden gegebenen Vektoren V_1 und V_2. Umgekehrt wird ein von O ausgehender Vektor V in zwei Vektoren zerlegt, indem man ihn zur Diagonale **irgend eines** Parallelogramms macht. Die beiden Vektoren V_1 und V_2, welche von O ausgehen und also mit der Diagonale gleichen Ursprungs sind, ersetzen den gegebenen Vektor V.

V_1 und V_2 heißen **Seitenvektoren**, V heißt **Mittelvektor**. Die **Zusammensetzung** der Seitenvektoren zu einem Mittelvektor ist **eindeutig**, die **Zerlegung** eines Vektors in Seitenvektoren ist **unendlich-vieldeutig**.

Dieses „Parallelogramm der Vektoren“ ist kein Lehrsatz, es bezeichnet eine Vorschrift für die Vereinigung und Zerlegung von Vektoren. Ob diese Vorschrift auf bestimmte Richtungsgrößen der Mechanik, welche man als Vektoren dargestellt hat, angewandt werden darf oder nicht, läßt sich nur von Fall zu Fall entscheiden und zwar durch das Princip des Parallelogramms.

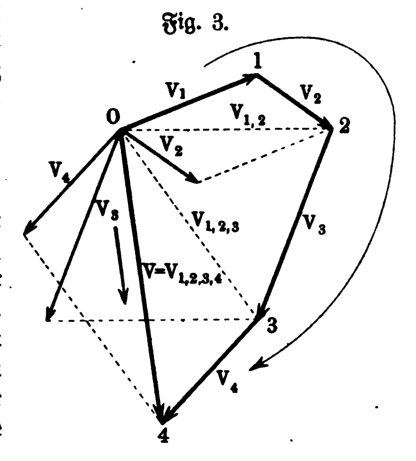
Für die Vereinigung und Zerlegung der Richtungsgrößen, bei welchen diese Anwendung erlaubt ist, ergeben sich wichtige Folgerungen.

Hat man nämlich eine Reihe von Vektoren, $V_1, V_2, \ldots, V_n$ zu vereinigen, so giebt man ihnen zunächst denselben Ursprung O und vereint dann V_1 und V_2 zu einem Mittelvektor $V_{1,2}$, diesen Mittelvektor $V_{1,2}$ und V_3 zu einem neuen Mittelvektor $V_{1,2,3}$ u. s. f., indem man jeden einzelnen Schritt durch das Parallelogramm ausführt.

Fig. 3 stellt das Verfahren für vier Vektoren dar, der letzte Vektor $V_{1,2,3,4}$, welcher V_1, V_2, V_3, V_4 zusammenfaßt, ist auch durch V bezeichnet, außerdem durch $O\,4$.

Um diesen Vektor V zu finden, bedarf man offenbar nicht der ganzen Figur, welche der fortgesetzten Konstruktion des Parallelogramms entspricht, es genügt dazu deren Randlinie O 1 2 3 4, welche aus den, zu einem offenen Streckenzuge von einheitlichem Sinne zusammengefügten Vektoren V_1, V_2, V_3, V_4 besteht ($1\,2 \# V_2$, $2\,3 \# V_3$, $3\,4 \# V_4$). Der Vektor V oder $O\,4$ schließt den offenen Streckenzug O 1 2 3 4 und zwar ist sein Sinn dem Sinne des Streckenzuges entgegen; in der Figur entspricht der Sinn des offenen Streckenzuges der Bewegung eines Uhrzeigers, der Sinn der Schlußlinie verläuft dieser Bewegung entgegen.

Fig. 3.



Demgemäß gewinnt man den Satz: Eine Reihe von Vektoren $V_1 V_2, \ldots, V_n$ wird vereinigt, indem man sie der Reihe nach zu einem Streckenzuge von einheitlichem Sinne vereinigt und diesen Streckenzug durch einen Vektor von entgegengesetztem Sinne abschließt. Der schließende Vektor V ersetzt die Reihe der einzelnen Vektoren.

Ferner gilt: Ein Vektor V wird in eine Reihe von Vektoren $V_1, V_2, \ldots, V_n$ zerlegt, indem man ihn zur Schlußlinie irgend eines offenen n-gliedrigen Streckenzuges von einheitlichem, ihm entgegengesetztem Sinne macht. Die n Seiten des Streckenzuges, deren Richtungen durch den Sinn des Streckenzuges bestimmt werden, ersetzen, als Reihe von Vektoren aufgefaßt, den gegebenen Vektor V.

Man nennt auch hier die Vektoren V_1, V_2, ..., V_n Seitenvektoren und V Mittelvektor. Die Vereinigung ist wieder eindeutig, die Zerlegung ist wieder unendlich-vieldeutig.

Die ganze Betrachtung gilt für Vektoren von beliebiger Richtung im Raume. Da sich auf dem Reißbrette Parallelen sehr leicht ziehen lassen, so ist diese Vereinigung und Zerlegung durch Zeichnung sehr einfach zu erhalten, namentlich für den Fall, daß alle Vektoren in einer Ebene liegen.

Der Satz lehrt auch, daß von dem Parallelogramm, welches den Ausgangspunkt der Betrachtung bildete, nur die eine Hälfte, d. h. ein Dreieck, nötig ist, um bei zwei Vektoren die Vereinigung oder Zerlegung durchzuführen. (Vergl. Fig. 4.)

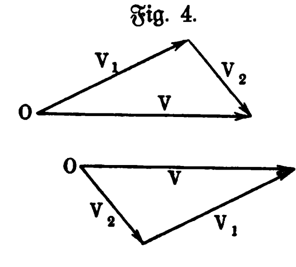
Dabei zeigt sich, daß es gleichgültig ist, welches der beiden Dreiecke benutzt wird. Der Streckenzug des einen Dreieckes ist aber durch die Reihe V_1, V_2, der andere durch die Reihe V_2, V_1 gebildet, so daß also bei zwei Vektoren die Reihenfolge für die Bildung der Schlußlinie des Streckenzuges gleichgültig ist.

Es fragt sich, ob die Reihenfolge der Vektoren auch bei n Vektoren gleichgültig ist für die Bildung der Schlußlinie. Um diese Frage zu beantworten, geht man davon aus, daß jede Reihenfolge von n Elementen in jede andere Reihenfolge dieser n Elemente übergeführt werden kann durch fortgesetzte Vertauschung von je zwei Nachbarelementen.

Soll z. B. die Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5 in die Reihenfolge 2, 4, 1, 5, 3 übergeführt werden, so vertauscht man erst 1 und 2, dann 3 und 4, darauf 1 und 4 und endlich 3 und 5.

Wenn also die Schlußlinie eines Streckenzuges aus Vektoren bei der Vertauschung zweier beliebiger benachbarter Strecken unverändert bleibt, so bleibt sie auch bei beliebiger Anordnung der Vektoren unverändert.

Fig. 4.



Da nun die Vertauschung zweier beliebiger benachbarter Strecken lediglich das eine Teildreieck ihres Parallelogramms durch dessen anderes Teildreieck ersetzt und dieser Tausch ohne Einfluß auf die Größe und Lage der zugehörigen Diagonale ist, so ist die Schlußlinie eines Streckenzuges aus Vektoren von der Reihenfolge der Vektoren unabhängig.

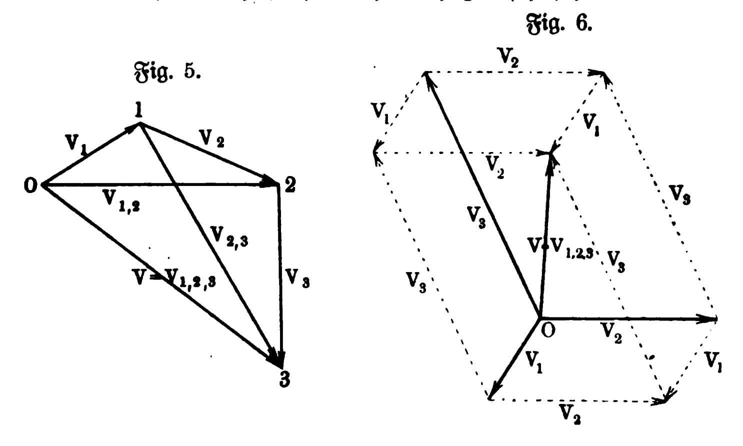
Demgemäß gelten die Sätze über Vereinigung und Zerlegung von Vektoren auch bei beliebiger Anordnung.

Dieses Ergebnis erinnert an die gewöhnliche Addition (und Subtraktion) der Arithmetik, für welche die Anordnung der Posten beliebig ist, weil für zwei von ihnen das Vertauschungsgesetz $a + b = b + a$ gilt.

Es liegt daher nahe, zu fragen, ob auch das zweite Gesetz der gewöhnlichen Addition, das Verschmelzungsgesetz, für die Vektoren eines Streckenzuges gilt. Es entspricht der Formel $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$ und sagt aus, daß es gleichgültig ist, ob man innerhalb der Reihe der zu addierenden Posten zwei für sich vereinigt und dann den nächsten hinzufügt oder ob man zu dem ersten die Summe der beiden folgenden hinzunimmt.

Daß auch dieses Gesetz für die Vereinigung und Zerlegung von Vektoren gilt, zeigt Fig. 5 für drei Vektoren. Hier entsprechen sich V_1, V_2, V_3 und a, b, c; $V_{1,2}$ und $a + b$, $V_{2,3}$ und $b + c$, $V_{1,2,3}$ und $a + b + c$.

Da nun die beiden Grundgesetze der gewöhnlichen Addition (und Subtraktion) bei der Vereinigung (und Zerlegung) von Vektoren in Geltung sind, so liegt es nahe, für diese Vereinigung (und Zerlegung) auch das geläufige Wort „Addition" zu gebrauchen und es durch einen Zusatz genauer zu kennzeichnen. Man nennt diese Vereinigung, welche auch als Polygonbildung bezeichnet werden kann, Vektorenaddition oder geometrische Addition im Gegensatz zu der gewöhnlichen Zahlenaddition (und Skalarenaddition) oder arithmetischen Addition. Wegen ihrer Verwendung auf dem Reißbrette heißt sie wohl auch graphische Addition.



Besonders häufig kommt neben dem einfachen Parallelogramm der Fall vor, in dem es sich um drei Vektoren handelt, welche nicht in einer Ebene liegen. (Vergl. Fig. 6.)

Hier sind von O aus sechs Streckenzüge möglich, gemäß den Anordnungen 1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 2; 3, 2, 1.

Sie bilden zusammen ein Parallelepipedon, in welchem die in O entspringende Diagonalachse V die Vereinigung der gegebenen Vektoren V_1, V_2, V_3 darstellt, so daß sich umgekehrt V in diese Vektoren zerlegen läßt. Alle sechs Streckenzüge führen von O zu dem Endpunkte von V (oder von diesem zu O).

Man nennt diesen Fall das Parallelepipedon der Vektoren.

Haben n Vektoren dieselbe Richtung, so wird ihr Streckenzug eine einzige Strecke, die Schlußlinie dieselbe Strecke, einschließlich der Richtung. In diesem Falle steht die geometrische Addition der arithmetischen sehr nahe.

Haben unter den n Vektoren m dieselbe Richtung und $(n - m)$ die entgegengesetzte Richtung, so kann man erst die m Vektoren zu einer Strecke I vereinigen und dann die $(n - m)$ Vektoren zu einer Strecke II. Beide Strecken haben, in O angebracht, entgegengesetzte Richtung. Ist I $>$ II, so ist die Schlußlinie ein Vektor von der Richtung I; ist II $>$ I, so ist die Schlußlinie

ein Vektor von der Richtung II; ist II = I, so hat die Schlußlinie den Wert Null.

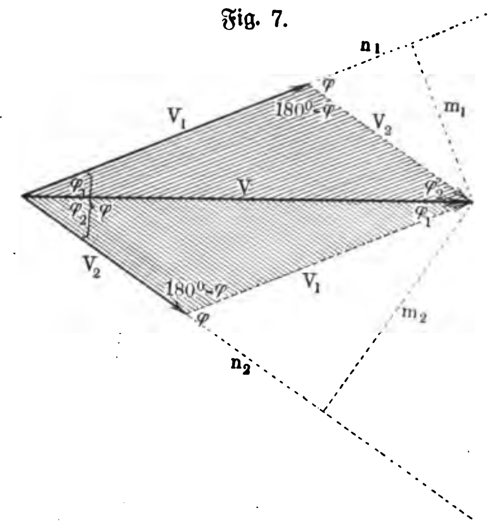
In diesem Falle ist es zweckmäßig, auf einer Geraden, welche die beiden Richtungen enthält, die eine dieser Richtungen durch einen Pfeil hervorzuheben und alle Vektoren dieser Richtung als positiv, die anderen als negativ zu bezeichnen. Man kann dann die Vektoren einfach algebraisch (+ und —) addieren und an dem Vorzeichen der Summe entscheiden, ob bei der Vereinigung ein Vektor der einen oder der anderen Richtung entsteht. Der Sonderfall Null entspricht der Null der Rechnung.

Das Ergebnis Null wird nicht bloß in diesem Sonderfalle erreicht, sondern jedesmal, wenn sich der Streckenzug der Vektoren von selbst schließt.

Für drei Vektoren bildet sich dabei z. B. ein Dreieck von einheitlichem Sinne seines Umfanges.

Will man Vektoren als solche hervorheben, so kann man sich des Zeichens $[V]$ bedienen, so daß V die Maßzahl des Vektors $[V]$ bezeichnet.

Fig. 7.



Benutzt man außerdem für die Vektorenaddition, den Zeichen $+, -, =$ entsprechend, die Zeichen $\overset{\times}{+}, \overset{\times}{-}, \overset{\times}{=}$, so kann man die Vereinigung und Zerlegung bei n Vektoren durch die Gleichung:

$$[V_1] \overset{\times}{+} [V_2] \overset{\times}{+} \ldots [V_n] \overset{\times}{=} [V]$$

darstellen, ohne Verwechselungen befürchten zu müssen, und nun nach den Regeln der gewöhnlichen (arithmetischen) Addition und Subtraktion arbeiten und auch deren Ausdrücke (Summe, Differenz ꝛc.) benutzen.

Für zwei Vektoren gilt z. B.:

$$[V_1] \overset{\times}{+} [V_2] \overset{\times}{=} [V]$$
$$[V_1] \overset{\times}{=} [V] \overset{\times}{-} [V_2]$$
$$[V_2] \overset{\times}{=} [V] \overset{\times}{-} [V_1].$$

Oft ist es zweckmäßig, die Richtungen der Vektoren durch Winkel zu messen und zwischen diesen und ihren Längen Gleichungen aufzustellen, welche die Vereinigung und die Zerlegung von Vektoren zahlenmäßig darstellen.

Dies gilt zunächst für den einfachsten Fall, in dem es sich um zwei Vektoren handelt, welche ja bei gemeinsamem Ursprunge O stets in einer Ebene liegen.

In Fig. 7 ist der Winkel zwischen V_1 und V durch φ_1, zwischen V_2 und V durch φ_2, zwischen V_1 und V_2 durch φ bezeichnet, so daß $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$ ist.

Jedes Teildreieck des Parallelogramms enthält die Stücke V_1, V_2, V, φ_1, φ_2 und $180^0 - \varphi$.

Demgemäß lassen sich alle Aufgaben aus dem Gebiete dieser Größen durch die Formeln der gewöhnlichen Trigonometrie lösen.

Besonders hervorzuheben sind die Gleichungen, welche dem Kosinussatz und dem Sinussatz entsprechen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} V^2 &= V_1^2 + V_2^2 - 2\, V_1 V_2 \cos(180^0 - \varphi) \\ &= V_1^2 + V_2^2 + 2\, V_1 V_2 \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 1)$$

und

$$\left.\begin{aligned} V_1 : V_2 : V &= \sin\varphi_2 : \sin\varphi_1 : \sin(180^0 - \varphi) \\ &= \sin\varphi_2 : \sin\varphi_1 : \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 2)$$

Wichtig sind die Sonderfälle $\varphi = 0^0$, 90^0, 180^0, 270^0. Für $\varphi = 0$ ist $V = V_1 + V_2$. Dies zeigt auch die Gleichung für V^2, da $\cos 0^0 = 1$ und also $V^2 = (V_1 + V_2)^2$ und $V = \overset{+}{(-)} (V_1 + V_2)$ ist. Für $V_1 = V_2$ gilt $V = 2\, V_1 = 2\, V_2$. Für $\varphi = 90^0$ ist das Parallelogramm ein Rechteck, so daß der Satz des Pythagoras gilt. Hier ist $\cos 90^0 = 0$ und $V^2 = V_1^2 + V_2^2$; ebenso gilt $V \,.\, \cos\varphi_1 = V_1$ und $V \,.\, \cos\varphi_2 = V_2$ oder $V \,.\, \sin\varphi_1 = V_2$ und $V \,.\, \sin\varphi_2 = V_1$ wegen $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^0$. Für $V_1 = V_2$ ist $\varphi_1 = \varphi_2 = 45^0$. Für $\varphi = 180^0$ ist $V = \pm (V_1 - V_2)$ und zwar gilt für $V_1 > V_2$ das Zeichen $+$ und für $V_2 > V_1$ das Zeichen $-$, falls V positiv ausfallen soll. Für $V_1 = V_2$ gilt $V = 0$. Für $\varphi = 270^0$ ist das Ergebnis für die Rechnung dasselbe wie für $\varphi = 90^0$.

Außerdem verdient noch der Sonderfall $V_1 = V_2$ allgemein hervorgehoben zu werden. Hier ist das Parallelogramm eine Raute; man hat $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}\varphi$ und $V = 2\, V_1 \cos\frac{\varphi}{2}$.

Für manche Zwecke sind auch (vergl. Fig. 7) noch die folgenden Gleichungen nützlich:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{m_1}{V_1 + n_1} = \frac{V_2 \,.\, \sin\varphi}{V_1 + V_2 \,.\, \cos\varphi},$$

$$\cot\varphi_1 = \frac{V_1 + V_2 \,.\, \cos\varphi}{V_2 \,.\, \sin\varphi} = \cot\varphi + \frac{V_1}{V_2 \,.\, \sin\varphi}.$$

Die Formeln für zwei Vektoren gelten auch bei drei Vektoren für den Sonderfall, daß sich ihr Streckenzug schließt, daß also die Vektorensumme Null ist.

Hier tritt nur V_3 an die Stelle von V als Vektor mit entgegengesetzter Richtung.

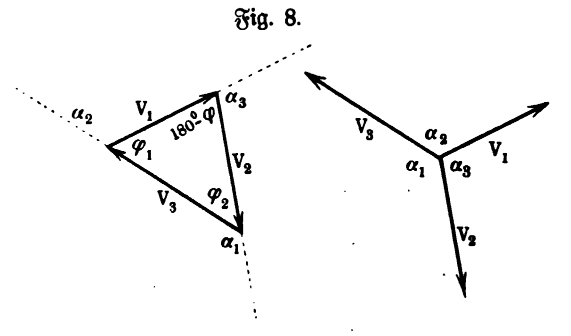
Führt man die Außenwinkel α_1, α_2, α_3 des Vektorendreiecks ein, so sind diese zugleich die Zwischenwinkel der Vektoren bei gemeinsamem Ursprunge. (Vergl. Fig. 8 a. f. S.)

Die Gleichung $V_1 : V_2 : V_3 = \sin\varphi_2 : \sin\varphi_1 : \sin\varphi$ geht dann über in:

$$V_1 : V_2 : V_3 = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 3)$$

Man legt dieses Ergebnis in einem besonderen Satze nieder, dem Satz von den drei Vektoren, welcher lautet: Schließt sich der Streckenzug dreier Vektoren, so verhalten sie sich wie die Sinus ihrer Zwischenwinkel.

Fig. 8.



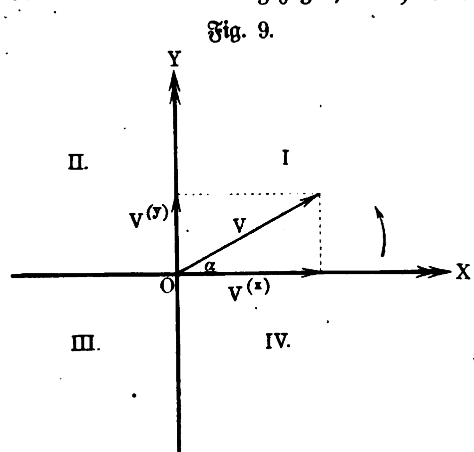
Wollte man diese Art zu rechnen, nämlich mit Hülfe der Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ zwischen den Seitenvektoren und dem Mittelvektor, auf n Vektoren ausdehnen, so würde selbst in dem Falle, daß alle Vektoren in einer Ebene liegen, schon für $n = 3$ ein Ergebnis von sehr zweifelhaftem Werte gewonnen werden.

Man schlägt deshalb einen ganz anderen Weg ein. Für den Fall eines ebenen Streckenzuges führt man die ganze Rechnung auf den Sonderfall $\varphi = 90^0$ bezw. $\varphi = 270^0$ für zwei Vektoren zurück.

Dazu zerlegt man jeden Vektor nach Angabe der Fig. 9.

Durch den Ursprung O des Vektors sind zwei, aufeinander senkrechte Gerade OX und OY gezogen, welche Koordinatenachsen heißen und, falls es nötig ist, als Abscissenachse oder X-Achse und Ordinatenachse oder Y-Achse unterschieden werden. Auf jeder Achse bezeichnet ein Doppelpfeil die Richtung der Vektoren, welche als positiv gelten soll. Durch die Achsen wird für V ein Parallelogramm vom Winkel $\varphi = 90^0$ angedeutet, welchem die Zerlegung von $[V]$ in $V^{(x)} = V \, . \, cos \, \alpha$ und $V^{(y)} = V \, . \, sin \, \alpha$ entspricht. Der Winkel α wird von dem Pfeile der X-Achse aus im Sinne des beigegebenen Drehungspfeiles gemessen, so daß α für einen Vektor im Winkelraume I zwischen 0^0 und 90^0, für einen Vektor im Winkelraume II zwischen 90^0 und 180^0 liegt u. s. w.

Fig. 9.



Für $[V]$ im Winkelraume		ist $V^{(x)}$		und $V^{(y)}$
Für $[V]$ im Winkelraume	I	ist $V^{(x)}$	positiv	und $V^{(y)}$ positiv.
„ „ „ „	II	„ „	negativ	„ „ positiv.
„ „ „ „	III	„ „	negativ	„ „ negativ.
„ „ „ „	IV	„ „	positiv	„ „ negativ.

Dasselbe Vorzeichenschema gilt für $cos \, \alpha$ und $sin \, \alpha$.

Infolgedessen stellen die Gleichungen $V^{(x)} = V \,.\, \cos\alpha$ und $V^{(y)} = V \,.\, \sin\alpha$ die Größen $V^{(x)}$ und $V^{(y)}$ einschließlich des Vorzeichens in allen vier Winkelräumen dar, so daß man auf diese Vorzeichen bei der Zerlegung von $[V]$ gar nicht besonders zu achten braucht.

Man hat also allgemein folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Gegeben: } V, \alpha & \text{Gegeben: } V^{(x)}, V^{(y)} \\ V^{(x)} = V \,.\, \cos\alpha & V^2 = (V^{(x)})^2 + (V^{(y)})^2 \\ V^{(y)} = V \,.\, \sin a & \cos\alpha = \frac{V^{(x)}}{V} \text{ und } \sin\alpha = \frac{V^{(y)}}{V}. \end{array}\right\} \quad 4)$$

Wendet man diese Zerlegung auf n Vektoren $V_1, V_2, \ldots, V_n$ an, welche mit der X-Achse bezw. die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bilden, so erhält man n Seitenvektoren in der X-Achse und n Seitenvektoren in der Y-Achse, welche bezw. durch $V_1^{(x)}, V_2^{(x)}, \ldots, V_n^{(x)}$ und $V_1^{(y)}, V_2^{(y)}, \ldots, V_n^{(y)}$ bezeichnet werden mögen. Durch gewöhnliche algebraische (+ und —) Addition lassen sich die n Vektoren in der X-Achse zu X und die n Vektoren der Y-Achse zu Y vereinigen, so daß man hat:

$$\left.\begin{array}{l} X = V_1 \cos\alpha_1 + V_2 \cos\alpha_2 + \cdots V_n \cos\alpha_n \\ Y = V_1 \sin\alpha_1 + V_2 \sin\alpha_2 + \cdots V_n \sin\alpha_n \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 5)$$

Damit ist das System der n Vektoren zurückgeführt auf zwei Vektoren, von denen einer in der X-Achse und einer in der Y-Achse liegt. Diese lassen sich ($\varphi = 90^0$) zu einem Vektor $[V]$ vereinigen, gemäß der Gleichung 4) bezw. Fig. 9, wobei $V^{(x)}$ und X sowie $V^{(y)}$ und Y sich entsprechen. Demgemäß gilt, falls $[V]$ mit der X-Achse den Winkel α bildet:

$$\left.\begin{array}{l} V^2 = X^2 + Y^2 \\ V \,.\, \cos\alpha = X \text{ und } V \,.\, \sin\alpha = Y \\ \cos\alpha = \frac{X}{V} \text{ und } \sin\alpha = \frac{Y}{V} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 6)$$

Das oben gegebene Vorzeichenschema, auf X und Y bezw. $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ angewandt, zeigt von vornherein den Winkelraum an, in dem $[V]$ liegt. Um diese Betrachtung auf n Vektoren auszudehnen, deren Streckenzug sich im Raume windet, errichtet man in O senkrecht zu den Achsen OX und OY eine dritte Achse OZ (vergl. Zimmerecke). Die Ebene, welche durch die X-Achse und die Y-Achse bestimmt wird, heißt XY-Ebene, u. s. w., der Raum zerfällt hier in acht Winkelräume. Man gelangt nun zu einem, dem Sonderfalle $\varphi = 90^0$ in der Ebene entsprechenden Verfahren im Raume, wenn man einen Vektor $[V]$, dem Parallelopipedon der Vektoren entsprechend, nach den Achsen zerlegt. Man bestimmt dabei (vergl. Fig. 10 a. f. S.) die Richtung des Vektors $[V]$ gegen die Achsen, indem man die drei Winkel α, β, γ stets auf dem kürzesten Wege gegen die mit Pfeilspitzen versehenen Seiten der Achsen mißt, so daß diese Winkel in den Grenzen $0^0 \ldots 180^0$ liegen. Es ist dann, wie für α und γ in Fig. 10 deutlich (vergl. die Diagonalen in den Seitenebenen) zu sehen ist:

$$V^{(x)} = V \cos \alpha,$$
$$V^{(y)} = V \cos \beta,$$
$$V^{(z)} = V \cos \gamma.$$

Da nach einem bekannten Satze der Stereometrie das Quadrat der Diagonalachse eines Rechtkants gleich der Summe der Quadrate dreier anstoßenden Kanten ist, so gilt:

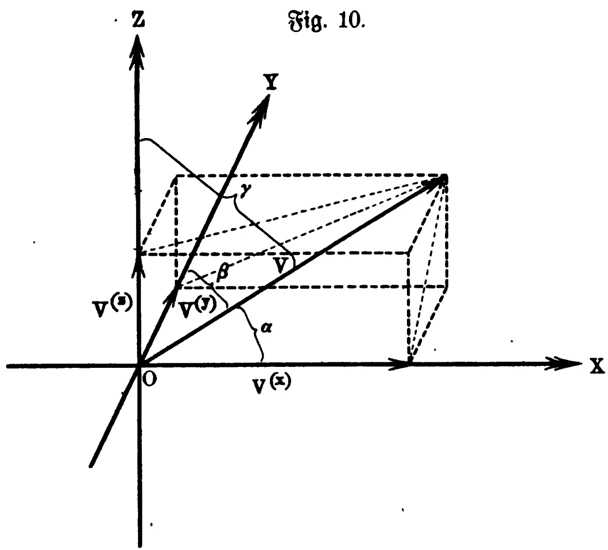
$$V^2 = (V^{(x)})^2 + (V^{(y)})^2 + (V^{(z)})^2$$
$$= V^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma).$$

Demnach ist:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

d. h. die drei Winkel α, β, γ sind, wie auch in geometrischer Hinsicht leicht zu ersehen ist, nicht voneinander unabhängig. Hat man zwei von ihnen,

Fig. 10.



z. B. α und β, bestimmt, so ist auch $\cos^2 \gamma$ eindeutig bestimmt und demnach auch $\cos \gamma$ bis auf das Vorzeichen $\pm$.

Um $\cos \gamma$ wirklich zu bestimmen, formt man $\cos^2 \alpha$ und $\cos^2 \beta$ um gemäß der Gleichung $1 + \cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi$ und gelangt so zu:

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{- \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)}.$$

Liegt $[V]$ in der XY-Ebene, so ist $\alpha + \beta = 90^0$ und demnach $\cos \gamma = 0$, d. h. $\gamma = 90^0$. Liegt $[V]$ nicht in der XY-Ebene, so ist $\alpha + \beta > 90^0$ und demnach $-\cos(\alpha + \beta)$ eine positive Größe, so daß der Ausdruck unter der Quadratwurzel durch $-\cos(\alpha + \beta)$ nicht negativ wird.

Die Richtung von $[V]$ ist demnach durch Angabe von α und β und des Vorzeichens von $\cos \gamma$ eindeutig bestimmt; statt des Vorzeichens von $\cos \gamma$ kann auch die Angabe dienen, ob γ spitz oder stumpf ist.

Allgemein mag bemerkt werden, daß eine Richtung in der Ebene durch **einen** Winkel (vergl. α im System XY) bestimmt ist, im Raume durch **zwei** Winkel (vergl. hier α und β im Systeme XYZ) und eine ergänzende Bestimmung. Letzteres zeigt auch das System der Längen und Breiten für die Erdoberfläche, wo jedenfalls für die Breite hinzugefügt werden muß, ob sie nördlich oder südlich zu nehmen ist.

Das Vorzeichenschema für die acht Winkelräume, einmal für die Seitenvectoren und einmal für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ angesetzt, zeigt auch hier, daß die Gleichungen der Figur. 10 für jede Lage von $[V]$ gelten. Man hat also allgemein:

Gegeben: V, α, β, γ

$$V^{(x)} = V\cos\alpha$$
$$V^{(y)} = V\cos\beta$$
$$V^{(z)} = V\cos\gamma$$

Gegeben: $V^{(x)}, V^{(y)}, V^{(z)}$

$$V^2 = (V^{(x)})^2 + (V^{(y)})^2 + (V^{(z)})^2$$
$$\cos\alpha = \frac{V^{(x)}}{V}$$
$$\cos\beta = \frac{V^{(y)}}{V}$$
$$\cos\gamma = \frac{V^{(z)}}{V} \qquad 7)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \text{ oder } \cos\gamma = \pm\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

Hat man nun n Vektoren $V_1, V_2, \ldots, V_n$, welche mit den Achsen bezw. die Winkel $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $\ldots$, $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ bilden, so behandelt man jeden dieser Vektoren am Ursprunge O nach den Gleichungen 7).

So erhält man je n Seitenvektoren innerhalb jeder Achse. Die Vektoren in der X-Achse $V_1^{(x)}, V_2^{(x)}, \ldots, V_n^{(x)}$ lassen sich, wie im Falle des ebenen Streckenzuges, zu einem Vektor X zusammenfassen, u. s. w. Man hat dann:

$$\left.\begin{aligned} X &= V_1\cos\alpha_1 + V_2\cos\alpha_2 + \cdots V_n\cos\alpha_n \\ Y &= V_1\cos\beta_1 + V_2\cos\beta_2 + \cdots V_n\cos\beta_n \\ Z &= V_1\cos\gamma_1 + V_2\cos\gamma_2 + \cdots V_n\cos\gamma_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 8)$$

Aus diesen drei Seitenvektoren bildet man nun gemäß Fig. 10 einen Mittelvektor $[V]$, wobei sich $V^{(x)}$ und X, $V^{(y)}$ und Y, $V^{(z)}$ und Z entsprechen. Bildet $[V]$ mit den Achsen bezw. die Winkel α, β, γ, so gilt:

$$\left.\begin{aligned} V^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2 \\ V\cos\alpha &= X,\ V\cos\beta = Y,\ V\cos\gamma = Z \\ \cos\alpha &= \frac{X}{V},\ \cos\beta = \frac{Y}{V},\ \cos\gamma = \frac{Z}{V} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 9)$$

Daß die Gleichungen 8) und 9) die Gleichungen 5) und 6) als Sonderfall enthalten, ist leicht zu ersehen.

In welchem Winkelraume der Mittelvektor V liegt, ist aus dem Vorzeichenschema für die acht Winkelräume von vornherein zu erkennen.

Die rechnerische Behandlung der geometrischen Addition gestattet eine elegante Zusammenfassung, wenn man den Satz benutzt: Die Projektion eines geschlossenen Streckenzuges von einheitlichem Sinne hat für jede Achse den Wert Null.

Bei der Vereinigung von n Vektoren gelangt man im allgemeinen zu einem offenen Streckenzuge von einheitlichem Sinne und zu einer Schlußlinie von entgegengesetztem Sinne, so daß eine Umkehrung des Sinnes der Schlußlinie zu einem geschlossenen Streckenzuge von einheitlichem Sinne führt.

Durch Projektion dieses Streckenzuges auf die X-Achse gewinnt man sofort die Gleichung:

$$V_1 \cos\alpha_1 + V_2 \cos\alpha_2 + \cdots V_n \cos\alpha_n - V \cos\alpha = 0,$$

welche mit den entsprechenden Gleichungen für die Y-Achse und Z-Achse wieder zu den Gleichungen 8) und 9) führt.

Soll sich der Streckenzug der Vektoren von selbst schließen, so muß dessen Projektion auf alle drei Achsen den Wert Null haben.

Dieser wichtige Fall, in welchem die Vektorensumme bei geometrischer Addition Null ist, zeigt sich in den Gleichungen 6) und 9) dadurch an, daß zugleich

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \quad \ldots\ldots \quad 10)$$

ist.

Da nämlich V^2 die Summe der Quadrate der reellen Größen X, Y, Z ist, so kann V nur den Wert Null haben, wenn jede dieser Größen selbst den Wert Null hat.

Bei manchen Aufgaben spielt auch der rechnerische Ausdruck für den Zwischenwinkel φ zweier Vektoren V_1 und V_2 im Raume, der dem Winkel φ des Parallelogramms in der Ebene genau entspricht, eine Rolle.

Haben V_1 und V_2 bezw. die Winkel $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ und $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ gegen die Achsen, so gilt:

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \quad \ldots \quad 11)$$

Verbindet man die Endpunkte der in O entspringenden Vektoren $[V_1]$ und $[V_2]$ durch eine Strecke m, so ist nach dem gewöhnlichen Kosinussatze:

$$1. \quad \cos\varphi = \frac{V_1^2 + V_2^2 - m^2}{2\, V_1 V_2}.$$

Da aber m Diagonalachse in einem Parallelepipedon ist, dessen anstoßende Kanten bezw. die Unterschiede von $V_1^{(x)}$ und $V_2^{(x)}$, $V_1^{(y)}$ und $V_2^{(y)}$, $V_1^{(z)}$ und $V_2^{(z)}$ sind, so ist mit Rücksicht auf die Gleichungen 7):

$$2. \quad m^2 = \left(V_1^{(x)} - V_2^{(x)}\right)^2 + \left(V_1^{(y)} - V_2^{(y)}\right)^2 + \left(V_1^{(z)} - V_2^{(z)}\right)^2$$
$$= V_1^2 + V_2^2 - 2\left(V_1^{(x)} V_2^{(x)} + V_1^{(y)} V_2^{(y)} + V_1^{(z)} V_2^{(z)}\right).$$

Aus 2. und 1. folgt, gleichfalls mit Rücksicht auf die Gleichungen 7):

$$3. \quad \cos\varphi = \frac{V_1^{(x)} V_2^{(x)} + V_1^{(y)} V_2^{(y)} + V_1^{(z)} V_2^{(z)}}{V_1 V_2}$$
$$= \frac{V_1^{(x)}}{V_1} \cdot \frac{V_2^{(x)}}{V_2} + \frac{V_1^{(y)}}{V_1} \cdot \frac{V_2^{(y)}}{V_2} + \frac{V_1^{(z)}}{V_1} \cdot \frac{V_2^{(z)}}{V_2}$$
$$= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2.$$

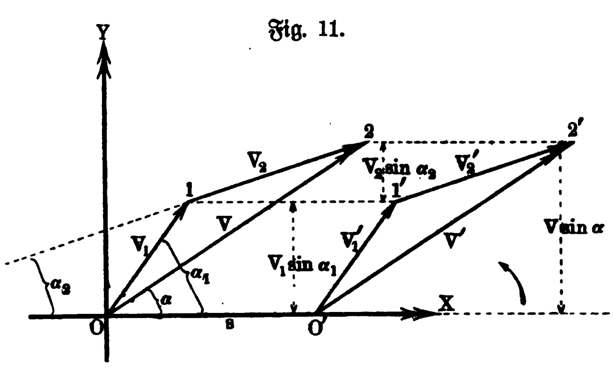
Soll $\varphi = 90^0$ sein, so ist $\cos\varphi = 0$, d. h. man hat:

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

für $\varphi = 90^0$.

Zum Schlusse betrachten wir noch die Beziehungen zwischen zwei Vektorendreiecken aus denselben Vektoren bei verschiedenen Ursprüngen, und zwar unter der Voraussetzung, daß dabei die ganze Figur in einer Ebene liegt. In Fig. 11 ist die Konstruktion für die beiden Ursprünge O und O' durchgeführt. Man sieht sofort, daß die drei Parallelogramme, von denen jedes durch die verschiedenen Lagen desselben Vektors bestimmt wird, in einer einfachen Beziehung stehen. Fügt man nämlich der Summe der Parallelogramme $O 1 1' O'$ und $1 2 2' 1'$ auf der rechten Seite das Vektorendreieck $O' 1' 2'$ hinzu, während man auf der linken Seite das Vektorendreieck $O 1 2$ fortnimmt, so entsteht das Parallelogramm $O 2 2' O'$.

Fig. 11.



Um diese Beziehung auf einen geeigneten Ausdruck zu bringen, denken wir uns das Vektorendreieck erst am Ursprunge O gezeichnet und dann an den Ursprung O' verschoben, so daß O dabei auf OX gleitet und die Dreiecksseiten stets parallel zu sich selbst bleiben. Für diese Verschiebung gilt dann der Satz: Die Summe der Parallelogrammflächen, welche die beiden Seitenvektoren V_1 und V_2 beschreiben, ist gleich der Parallelogrammfläche, welche der Mittelvektor V beschreibt.

Bezeichnet man die Winkel der Vektoren gegen die X-Achse bezw. mit α_1, α_2 und α, so haben diese Parallelogramme für $O O' = s$ als Grundlinie bezw. die Höhen $V_1 \sin\alpha_1$, $V_2 \sin\alpha_2$ und $V \sin\alpha$, d. h. man hat:

$$V_1 s \sin\alpha_1 + V_2 s \sin\alpha_2 = V s \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

oder nach Tilgung von s

$$V_1 \sin\alpha_1 + V_2 \sin a_2 = V \sin\alpha.$$

Diese Gleichung stellt die bereits entwickelte Beziehung der Komponenten von V_1, V_2 und V nach der Y-Achse dar, so daß sich aus ihr wiederum durch Multiplikation mit s die entsprechende Gleichung zwischen den Parallelogrammflächen gewinnen läßt.

Multipliziert man die Gleichung für die Komponenten nach der X-Achse mit s, so erhält man:

$$V_1 s \cos\alpha_1 + V_2 s \cos\alpha_2 = V s \cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

Diese Gleichung bezieht sich auf eine entsprechende Verschiebung des Vektorendreiecks, bei der O auf der Y-Achse um s vorrückt.

Diese Betrachtung läßt sich ohne weiteres auf beliebig viele Vektoren $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ausdehnen.

Von den beiden Komponenten $V \cos\alpha$ und $V \sin\alpha$ eines Vektors $[V]$ liegt stets die eine $V \cos\alpha$ innerhalb der Geraden OX, welche durch die Verschiebung s bestimmt wird, die andere $V \sin\alpha$ außerhalb dieser Geraden und zwar senkrecht zu ihr. Infolgedessen bezeichnet man $V s \cos\alpha$ als inneres und $V s \sin\alpha$ als äußeres Produkt des Vektors $[V]$ und der Verschiebung s. Faßt man auch die Verschiebung s als Vektor auf, so kann man noch die Komponenten $s \cos\alpha$ und $s \sin\alpha$ bilden, von denen die erstere innerhalb der Geraden liegt, welche durch $[V]$ bestimmt wird, während die letztere außerhalb dieser Geraden liegt und zwar senkrecht zu ihr. Das innere Produkt der Vektoren $[V]$ und $[s]$ wird demnach gebildet, indem man den einen Vektor mit der Komponente des anderen multipliziert, welche innerhalb der Geraden des ersten Vektors liegt. Die andere Komponente liefert das entsprechende äußere Produkt.

Demgemäß lassen sich die Gleichungen 13) und 14) in ihrer Ausdehnung auf n Vektoren folgendermaßen aussprechen:

Wenn n Vektoren $[V_1], [V_2], \ldots, [V_n]$ den Mittelvektor $[V]$ liefern, so ist sowohl das innere als auch das äußere Produkt des Mittelvektors $[V]$ und einer Verschiebung $[s]$ gleich der Summe der entsprechenden Produkte der einzelnen Seitenvektoren.

Dabei sind die Vorzeichen der einzelnen Produkte sorgfältig zu beachten, wie sie den Gleichungen 13) und 14) bezw. 5) und 6) entsprechen.

Das äußere Produkt $V s \sin\alpha$ hat für $\alpha = 0^0 \ldots 180^0$ das Vorzeichen $+$ und für $\alpha = 180^0 \ldots 360^0$ das Vorzeichen $-$.

Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse ist es zweckmäßig, von dem Endpunkte O' der Verschiebung $[s]$ auf $[V]$ ein Lot p zu fällen. Für die Lage von $[V]$ und $[s]$ in Fig. 12 ist $p = s \sin\alpha$ und demnach $Vp = Vs \sin\alpha$, so daß also das äußere Produkt aus V und p gebildet erscheint. Soll diese Beziehung für jede Lage von $[V]$ und $[s]$ gelten, so muß man dem Produkte Vp für $\alpha = 0^0 \ldots 180^0$ das Vorzeichen $+$ und für $\alpha = 180^0 \ldots 360^0$ das Vorzeichen $-$ geben. Denkt man sich O' als Drehpunkt für eine Bewegung, welche dem Pfeile von $[V]$ entspricht, so stimmt diese Bewegung in ihrem Sinne für $\alpha = 0^0 \ldots 180^0$ überein mit der Uhrzeigerbewegung, für $\alpha = 180^0 \ldots 360^0$ mit deren Gegenbewegung, d. h. man hat dem Produkte Vp das Vorzeichen $+$ oder $-$ zu geben, je nachdem die Bewegung um O' mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmt oder nicht.

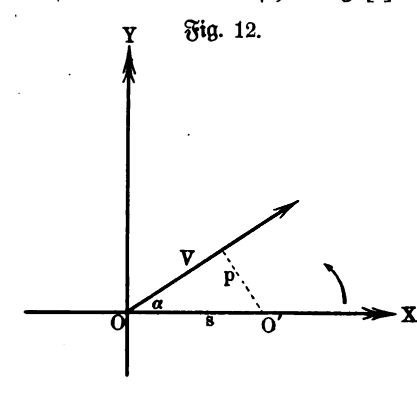


Fig. 12.

Für den Ausdruck „äußeres Produkt“ ist auch der Name „Moment“ gebräuchlich, namentlich wenn $[V]$ eine Kraft darstellt, und zwar gemäß folgender

Definition: Unter dem **Momente eines Vektors in Bezug auf einen Punkt** O' versteht man das Produkt aus der Maßzahl des Vektors und der Maßzahl des von O' auf ihn gefällten Lotes (Arm des Vektors für O') und zwar mit dem Vorzeichen + oder —, je nachdem die Bewegung um O' mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmt oder nicht.

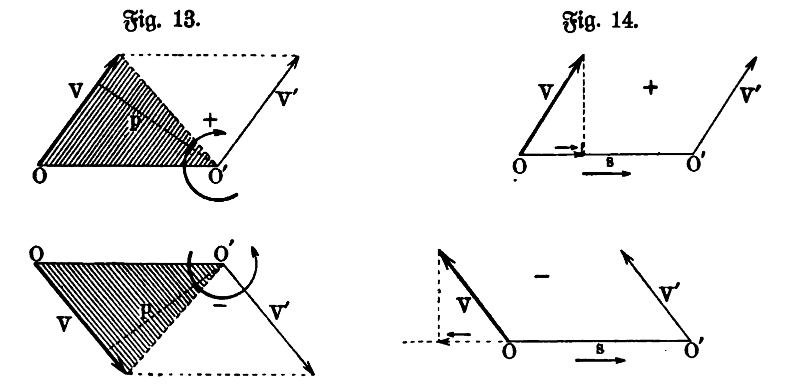
In Fig. 13 sind beide Fälle dargestellt: die Parallelogrammflächen stellen das Moment, die schraffierten Dreiecksflächen das halbe Moment dar.

Der Satz über das **äußere** Produkt gewinnt innerhalb dieser Veranschaulichung, bei welcher **alle** Vektoren ihren Ursprung in O haben, nun folgende Form:

Für n Vektoren vom Ursprunge O ist das Moment des Mittelvektors in Bezug auf einen Punkt O' gleich der Summe der Momente der einzelnen Vektoren in Bezug auf denselben Punkt O'.

Man bezeichnet diesen Satz als den **Momentensatz** für Vektoren.

Das **innere** Produkt $Vs\cos\alpha$ hat für $\alpha = 0^0 \ldots 90^0$ und für $\alpha = 270^0 \ldots 360^0$ das Vorzeichen + und für $\alpha = 90^0 \ldots 270^0$ das



Vorzeichen —. Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse ist es zweckmäßig, die Verschiebung im Sinne des Vektors von der entgegengesetzten Verschiebung zu unterscheiden, je nachdem die Komponente $[V\cos\alpha]$ in ihrer Richtung mit der Richtung von $[s]$ übereinstimmt oder nicht. Das Vorzeichen + entspricht dem ersteren, das Vorzeichen — dem letzteren Falle. Für den Ausdruck „**inneres Produkt**" ist auch der Name „**Arbeit**" gebräuchlich, namentlich wenn $[V]$ eine Kraft darstellt, und zwar gemäß folgender Definition: Unter der **Arbeit eines Vektors für eine Verschiebung** $[s]$ versteht man das Produkt aus den Maßzahlen der Verschiebung und der Komponente des Vektors, welche in die durch die Verschiebung bestimmte Gerade fällt, und zwar mit dem Vorzeichen + oder —, je nachdem die Verschiebung im Sinne des Vektors erfolgt oder nicht.

In Fig. 14 sind beide Fälle dargestellt.

Der Satz über das **innere** Produkt gewinnt innerhalb dieser Veranschaulichung, bei welcher **alle** Vektoren ihren Ursprung in O haben, nun folgende Form:

Für n Vektoren vom Ursprunge O ist die Arbeit des Mittelvektors für eine Verschiebung $OO' = s$ gleich der Summe der Arbeiten der einzelnen Vektoren für dieselbe Verschiebung $OO' = s$.

Auf einen Unterschied des inneren und des äußeren Produktes bezw. des Momentes und der Arbeit mag noch aufmerksam gemacht werden. Denkt man sich die Ebene der Zeichnung einmal von oben und einmal von unten betrachtet, so bleiben die Bestimmungen der Vorzeichen für die Arbeit dieselben, während die Bestimmungen der Vorzeichen für das Moment sich umkehren. (Zeichnung auf Glas oder Pauspapier!) Will man auch für das Moment eine durchaus eindeutige Bestimmung haben, so muß man die eine Seite der Zeichenebene, z. B. die obere, ein- für allemal als diejenige Seite hervorheben, auf welche der Beschauer blickt, und in welcher auch das zur Vergleichung dienende Zifferblatt der Uhr liegend gedacht wird. Da es sich aber für die Praxis nur um den Unterschied in den Vorzeichen der Momente handelt, so ist es ziemlich gleichgültig, welche Momente als positiv und welche als negativ bezeichnet werden, wenn nur der Gegensatz selbst scharf beachtet wird.

Erster Abschnitt.

Phoronomie oder Reine Bewegungslehre.

Erstes Kapitel.

Die Grundbegriffe der Phoronomie.

1. Bewegung eines starren Körpers. Die Lage eines starren Körpers (vergl. Einleitung, S. 2 u. f.) im Raume ist bekannt, wenn man von jedem seiner Punkte angeben kann, in welchem Punkte des Raumes er liegt.

Um diese Lagenbestimmungen durchzuführen, schränkt man die freie Beweglichkeit des Körpers nach und nach ein.

Wählt man zunächst einen Punkt A des Körpers aus und legt ihn in den Punkt A' des Raumes, so kann sich der Körper noch um A bezw. A' bewegen, er kann Schwenkungen (Punktdrehungen) um A bezw. A' ausführen. Dabei bewegt sich jeder andere Punkt B des Körpers auf einer, seinem festen Abstande von A entsprechenden Kugel, er beschreibt eine sphärische Linie.

Beispiel: Kugelgelenk eines Gasarmes.

Wählt man noch einen zweiten Punkt B des Körpers aus und legt ihn in den Punkt B' des Raumes ($AB = A'B'$), so ist die Gerade AB des Körpers in ihrer Lage bestimmt, d. h. allen Punkten des Körpers, welche auf der Geraden AB liegen, sind bestimmte Punkte des Raumes eindeutig angewiesen. Der Körper kann sich noch um die Achse AB bezw. $A'B'$ bewegen, er kann Drehungen (Achsendrehungen) um AB bezw. $A'B'$ ausführen. Dabei bewegt sich jeder andere Punkt C des Körpers auf einem seinem festen Abstande von der Achse entsprechenden Kreise, dessen Ebene senkrecht zur Achse ist.

Beispiele: Räder, Hebel, Wellen u. s. w.

Wählt man noch einen dritten Punkt C des Körpers aus, welcher sich natürlich nicht auf der bereits festgelegten Geraden AB befinden darf, und legt ihn in den Punkt C' des Raumes ($AC = A'C'$ und $BC = B'C'$), so ist der ganze Körper in seiner Lage bestimmt, d. h. allen Punkten des

Körpers sind bestimmte Punkte des Raumes eindeutig angewiesen. Der Körper ist unbeweglich.

Beispiele: Aufstellung eines dreibeinigen Tisches. Stoppen eines sich drehenden Rades durch Festklemmen des Radkranzes.

Der Beweis dieser Betrachtungen folgt unmittelbar aus den Grundsätzen (Axiomen) der Geometrie, wonach ein Punkt im Raume einen und nur einen Punkt, zwei Punkte im Raume eine und nur eine Gerade, drei Punkte im Raume, welche nicht in einer Geraden liegen, eine und nur eine Ebene bestimmen.

Denkt man sich die Punkte A, B, C des Körpers zu einem starren Dreieck verbunden, welches in der Folge Bewegungsdreieck heißen mag, so ist die Lagenbestimmung des Körpers auf die Lagenbestimmung eines solchen Dreiecks zurückgeführt.

Beispiel: Wählt man für die Erde den Nordpol, den Mittelpunkt und den Nullpunkt der Längenmessung (auf dem Äquator) als Ecken des Bewegungsdreiecks, so ist die Lage der Erde im Raume gegeben, sobald die Lage dieses Dreiecks im Raume bekannt ist.

Bestimmt man nun die Lagenänderung eines solchen Bewegungsdreiecks des starren Körpers, so bestimmt man damit zugleich die Lagenänderung des Körpers selbst.

Demgemäß ist die Bewegung eines starren Körpers bestimmt, wenn man:

1. die Lage des Bewegungsdreiecks ABC im Körper kennt

und wenn man

2. die Lage des Bewegungsdreiecks ABC im Raume für jeden Zeitpunkt angeben kann.

2. Verschiebung und Drehung eines starren Körpers. Unter den Bewegungen eines starren Körpers sind zwei, sowohl in theoretischer als auch in praktischer Hinsicht von besonderer Bedeutung, die Verschiebung, genauer Parallelverschiebung (Translation), und die Drehung, genauer Achsendrehung (Rotation).

In theoretischer Hinsicht ist zu bemerken, daß sich alle Bewegungen eines starren Körpers auf Verschiebungen und Drehungen zurückführen lassen, in praktischer Hinsicht, daß die Bewegungen, welche bei unseren Maschinen verwendet werden, in überwiegender Mehrzahl Verschiebungen und Drehungen sind.

Beispiele: Maschinenmodelle.

Die Bewegung eines starren Körpers wird Verschiebung genannt, wenn ein Bewegungsdreieck ABC des Körpers sich stets parallel zu sich selbst bewegt. Liegt das Dreieck einmal in den Raumpunkten A'_1, B'_1, C'_1 und ein ander Mal in den Raumpunkten A'_2, B'_2, C'_2, so ist dann hier $A'_1 B'_1 \parallel A'_2 B'_2$ und $A'_1 C'_1 \parallel A'_2 C'_2$ und auch $B'_1 C'_1 \parallel B'_2 C'_2$, d. h. zwei Lagen des Bewegungsdreiecks lassen sich als Grundflächen eines dreiseitigen Prismas auffassen und demnach sind auch als dessen Kanten die Strecken $A'_1 A'_2$, $B'_1 B'_2$, $C'_1 C'_2$ einander gleich und parallel.

Nimmt man einen beliebigen Punkt des Körpers D hinzu, dessen entsprechende Lagen im Raum D'_1 und D'_2 sind, so ist $A'_1 D'_1 \,//\, A'_2 D'_2$ u. s. w. und darum ist auch $D'_1 D'_2 = A'_1 A_2$ und $D'_1 D'_2 \,//\, A'_1 A'_2$ u. s. w., d. h. alle Punkte des Körpers sind in der zweiten Lage gegen die erste Lage um Strecken verschoben, die unter sich gleich und einander parallel sind.

Sind $A'_1, A'_2, A'_3, \ldots$ Lagen von A, welche nacheinander während der Bewegung eingenommen werden, und sind $B'_1, B'_2, B'_3, \ldots$ die entsprechenden Lagen von B, so ist der Streckenzug $A'_1 A'_2 A'_3 \ldots$ dem Streckenzuge $B'_1 B'_2 B'_3 \ldots$ kongruent, und die entsprechenden Strecken beider Züge, wie $A'_2 A'_3$ und $B'_2 B'_3$, sind einander parallel.

Je näher aneinander man die Lagen $A'_1, A'_2, A'_3, \ldots$ von A annimmt, um so näher rücken auch die Lagen $B'_1, B'_2, B'_3, \ldots$ von B aneinander, und um so genauer stellen jene Streckenzüge die Linien dar, auf denen sich A und B thatsächlich bewegen.

Wenn sich also A auf einer beliebigen Linie bewegt, so beschreibt B eine dieser Linie kongruente Linie. Beide Linien sind parallel-gelagert, d. h. zwei entsprechende Punktpaare A'_2, A'_3 und B'_2, B'_3 bilden ein Parallelogramm.

Bringt man die beiden Linien durch Verschiebung von A'_1 nach B'_1 zur Deckung, so unterscheiden sich die Bewegungen von A und B in keiner Weise, d. h. die Bewegung von B ist ein genaues Abbild der Bewegung von A.

Dasselbe gilt für die Bewegung von A und C, von A und D u. s. w.

Bei der Verschiebung eines starren Körpers sind also die Bewegungen aller Punkte des Körpers genau dieselben und gehen auf unter sich kongruenten und parallel-gelagerten Linien vor sich.

Demnach hat man nur die Bewegung eines Körperpunktes A genauer zu untersuchen, um die Bewegung des ganzen Körpers zu bestimmen, vorausgesetzt, daß man außerdem die Stellung des Bewegungsdreiecks ABC im Raume für einen beliebigen Punkt der von A beschriebenen Linie kennt. Die Linie, welche A beschreibt, heißt eine Leitlinie für die Verschiebung der Körperbewegung.

Beispiel: Die Bewegung der Erdachse bei ihrer Bewegung um die Sonne ist (in erster Annäherung) eine Verschiebung. Wählt man den Mittelpunkt der Erde als Punkt A, so ist die von A durchlaufene Linie die Erdbahn. Kennt man die Lage der Erdachse im Raume für einen Punkt dieser Bahn, so kennt man sie auch für alle anderen Punkte der Bahn. Nordpol und Südpol beschreiben Linien, welche der Erdbahn kongruent und zu ihr parallel-gelagert sind; die Achse selbst beschreibt einen schiefen Cylinder. Würde sich die Erde nicht um ihre Achse drehen, so würde die einmalige Feststellung der Lage des Bewegungsdreiecks im Raume (außer der Achse käme noch etwa der Nullpunkt der Längenmessung auf dem Äquator in Frage) für die Lage der ganzen Erde im Raume bestimmend sein.

Die Bewegung eines starren Körpers wird Drehung, genauer Achsendrehung (Rotation) genannt, wenn zwei Punkte A und B eines Bewegungsdreiecks mit zwei Punkten A' und B' des Raumes zusammenfallen, so daß sich der Körper nur um die Gerade AB bezw. $A'B'$, welche Achse heißt, bewegen kann. (Vergl. § 1.)

Der dritte Punkt C des Bewegungsdreiecks beschreibt einen Kreis, dessen Ebene zur Achse senkrecht steht, und zwar ist der Abstand des Punktes C von der Achse der Radius dieses Kreises.

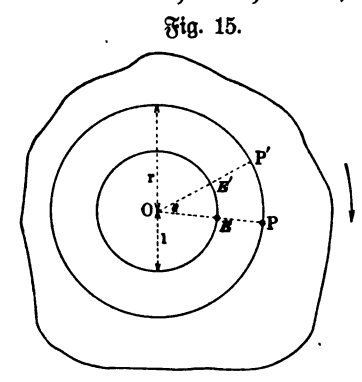
Dasselbe gilt von jedem vierten Punkte D des Körpers, falls er nicht in der Achse AB liegt.

Auch bei dieser Bewegung läßt sich die Bewegung des ganzen Körpers auf die Bewegung eines Punktes zurückführen.

Alle Punkte des Körpers, welche denselben Abstand r von der Achse haben, liegen auf einem geraden Kreiscylinder vom Radius r, dessen Achse die Drehungsachse ist. Alle diese Punkte haben genau dieselbe Bewegung, d. h. die Bahnen, welche sie durchlaufen, sind kongruent, und bei entsprechender Deckung dieser Bahnen sind die Bewegungen der einzelnen Punkte nicht voneinander zu unterscheiden.

Zwei Punkte von den Abständen r_1 und r_2 haben verschiedene Bewegungen. Um diese Bewegungen miteinander zu vergleichen, zeichnet man die Punkte des Körpers aus, welche die Einheit der Längenmessung (im allgemeinen 1 m) als Abstand von der Achse haben. Ihre Gesamtheit bildet den Einheitscylinder, welcher durch eine Ebene senkrecht zur Achse in einem Einheitskreise geschnitten wird. Auf einem solchen Einheitskreise bewegt sich jeder der ausgezeichneten Punkte, der sogenannten Einheitspunkte.

Fig. 15.



Legt man nun senkrecht zur Drehungsachse eine Ebene, so werden der Cylinder vom Radius r und der Einheitscylinder bezw. in Kreisen vom Radius r und vom Radius 1 geschnitten, deren gemeinsamer Mittelpunkt O in der Drehungsachse liegt. Punkte beider Kreise, welche auf einem Radius liegen, mögen entsprechende Punkte heißen.

Bewegt sich nun (vergl. Fig. 15) ein Punkt W des Körpers, welcher den Abstand r von der Achse hat, aus der Lage P' in die Lage P, so bewegt sich der entsprechende Einheitspunkt aus der Lage E' in die Lage E.

Aus $\widehat{P'P} : \widehat{E'E} = r : 1$ folgt $\widehat{P'P} = r \,.\, \widehat{E'E}$, d. h. der Bogen $\widehat{P'P}$, den ein beliebiger Punkt W vom Abstande r beschreibt, ist stets das Produkt aus dem entsprechenden Bogen am Einheitskreise $\widehat{E'E}$ und dem Abstande r.

Demgemäß braucht man nur die Bewegung eines Einheitspunktes zu bestimmen, um die Bewegung jedes beliebigen Punktes W vom Abstande r darzustellen.

Für die Berechnung von $\widehat{E'E}$ gilt für $\measuredangle\, E'OE = \varepsilon$:

$$\widehat{E'E} : 2\pi = \varepsilon^0 : 360^0$$

d. h.:

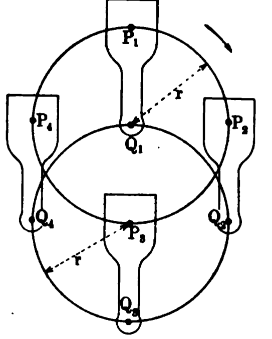
$$\widehat{E'E} = \frac{\varepsilon^0}{360^0} \cdot 2\pi.$$

Man bezeichnet $\frac{\varepsilon}{360^0} \cdot 2\pi$ mit „Arcus von ε“ oder „Arcus ε“ und kürzt diese Bezeichnung ab durch *arc* ε, wobei das Wort Arcus (Bogen) stets den Bogen am Einheitskreise bedeutet, d. h. an einem Kreise, dessen Radius die Einheit der gewählten Längenmessung (im allgemeinen 1 m) ist. Für 3^0 hat man z. B. $\frac{3^0}{360^0} = \frac{1}{120}$ mit 2π zu multiplizieren, um *arc* 3^0 zu erhalten. Die gebräuchlichen Logarithmentafeln enthalten meist auch Arcustabellen, welche diese Rechnung ersparen. Es entsprechen sich 360^0 und 2π, 180^0 und π, 90^0 und $\frac{\pi}{2}$, 60^0 und $\frac{\pi}{3}$, 45^0 und $\frac{\pi}{4}$, 30^0 und $\frac{\pi}{6}$ u. s. f. Durch die Einführung des Arcus geht die Gleichung für $\widehat{P'P}$ über in:

$$\widehat{P'P} = r \cdot arc\, \varepsilon.$$

Setzt man für eine bestimmte Rechnung fest, daß der Winkel ε stets durch seinen Arcus ausgedrückt werden soll, so kann man der Kürze wegen ε statt *arc* ε schreiben, also auch $\widehat{P'P} = r \cdot \varepsilon$.

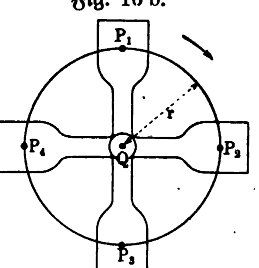
Fig. 16 a.



Den Bogen $\widehat{E'E}$, welcher durch die reine Zahl *arc* ε bestimmt wird, nennt man auch Arcusweg oder Winkelweg; er entsteht aus dem entsprechenden Wege $\widehat{P'P}$ eines Punktes im Abstande r von der Achse durch Reduktion auf die Einheit $\left(\frac{P'P}{r}\right)$.

Legt man durch den Körperpunkt W, welcher zunächst mit P' zusammenfällt, und die Drehungsachse eine Ebene, so dreht sich diese Ebene um den Winkel ε, während W von P' nach P gelangt. Die beiden Achsenpunkte A und B bilden mit W ein Bewegungsdreieck.

Fig. 16 b.



Geht man von dem ursprünglichen Bewegungsdreieck ABC aus, so hat man von C ein Lot CQ auf die Achse AB zu fällen, auf diesem Lote die Lage des Einheitspunktes E zu bestimmen, so daß $QE = 1$ ist, und nun die Bewegung dieses Punktes E auf seinem Kreise zu verfolgen. Kennt man die Lage von E zu jeder Zeit, so kennt man auch zu jeder Zeit die Lage des starren Körpers.

Beispiele: Achsendrehung der Erde unter Berücksichtigung von Punkten in verschiedenen Breiten, in Schächten und im Luftraume. Verschiedene Punkte auf dem Radius eines sich drehenden Rades.

Um den Unterschied von Translation und Rotation zu veranschaulichen, lassen wir einen bestimmten Körper einmal eine Translation auf einem Kreise vom Radius r und einmal eine Rotation ausführen. In Fig. 16 (a. v. S.) ist die Bewegung eines Schnittes des Körpers für beide Fälle dargestellt; bei der Translation beschreibt jeder Punkt einen Kreis vom Radius r, bei der Rotation beschreibt jeder Punkt einen, seinem Abstande von der Achse entsprechenden Kreis.

Als Beispiel für die Zusammensetzung einer verwickelteren Bewegung aus Verschiebungen und Drehungen mag bereits vorläufig die gewöhnliche Schraubenbewegung (Korkzieher u. s. w.) angeführt werden. Sie entsteht, wenn ein Körper sich geradlinig verschiebt und sich zugleich um eine bestimmte Leitlinie der Verschiebung dreht und wenn dabei sowohl die durch die Verschiebung als auch die durch die Drehung erzeugten Linien stets der Zeit proportional wachsen.

Aus den Betrachtungen des ganzen Paragraphen folgt, daß die Untersuchung der Bewegungen eines Punktes die Grundlage für die Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers bildet.

3. Die Bewegung eines Punktes auf seiner Bahn und der Fluß der Zeit. Die Linie, welche ein Punkt bei seiner Bewegung beschreibt, wird Bahn genannt.

Man vergleicht die Bewegung eines Punktes auf seiner Bahn mit dem gleichförmigen Flusse der Zeit, welcher angenähert durch die Bewegung der Spitze eines Uhrzeigers veranschaulicht wird.

Um diese Vergleichung bei einer bestimmten Bewegung durchzuführen, mißt man immer die Zeitdauer (z), innerhalb welcher ein bestimmtes Bahnstück, Weg genannt, durchlaufen wird, sowie die Länge dieses Weges (w) und sucht aus einer Reihe solcher Messungen über die Art der Bewegung Aufschluß zu erhalten. Im allgemeinen mißt man den Weg (w) in Metern (m) und die Zeit (z) in Sekunden ($''$).

4. Die gleichförmige Bewegung und ihre Geschwindigkeit. Man nennt die Bewegung eines Punktes gleichförmig, wenn sie dem Flusse der Zeit entspricht, d. h. wenn in gleichen, noch so kleinen Zeitteilen gleiche Bahnstücke (Wege) durchlaufen werden, so daß also der durchlaufene Weg (w) der Zeit (z), innerhalb welcher er zurückgelegt wird, stets proportional ist.

Bei dieser Bewegungsart genügt wegen der Proportionalität von w und z eine einzige Messung von zusammengehörigen Werten von Weg und Zeit, um eine genaue Kenntnis der ganzen Bewegung zu erlangen.

Werden z. B. 5 Meter in 2 Sekunden durchlaufen, so hat man den Ansatz:

$$w \text{ Meter} : 5 \text{ Meter} = z \text{ Sekunden} : 2 \text{ Sekunden},$$

oder kürzer, unter Tilgung der Einheiten Meter und Sekunden,

$$w : 5 = z : 2.$$

Man gelangt hier zu der Gleichung $2w = 5z$, d. h. $w = 2{,}5z$ oder $z = 0{,}4w$, welche nun gestattet, den Weg w zu berechnen, welcher während einer bestimmten Zeit z zurückgelegt wird, und umgekehrt. Setzt man z. B. $z = 10$, so folgt $w = 25$, d. h. während 10″ wird ein Weg von 25 m durchlaufen; setzt man $w = 17{,}5$, so folgt $z = 7$, d. h. ein Weg von 17,5 m wird in 7″ durchlaufen.

Dem Beispiele $w = 2{,}5z$ entspricht die allgemeine Gleichung $w = c \cdot z$. Die Beziehung zwischen Weg (w) und Zeit (z) wird also bei der gleichförmigen Bewegung durch eine Gleichung dargestellt, welche in w und z vom ersten Grade ist.

Der feste Wert (Konstante) c der Gleichung $w = c \cdot z$ ergiebt sich als $\frac{w}{z}$ und läßt sich demnach durch Division zusammengehöriger Werte von w und z bestimmen. Werden, wie oben, 5 m in 2″ durchlaufen, so ist $c = \frac{5}{2} = 2{,}5$ und man gelangt wieder zu der Gleichung $w = 2{,}5z$.

Man nennt die Konstante c die Maßzahl (Wert) der Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung, weil sie das langsamere oder raschere gleichmäßige Fortschreiten des Punktes auf seiner Bahn bestimmt.

Die Einheiten Meter und Sekunden, welche bei der Bestimmung von c verwandt wurden, setzt man gelegentlich hinzu, z. B. $c = \frac{5\,\text{m}}{2''} = 2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und liest dabei $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ als „Meter durch Sekunde" oder „Meter in der Sekunde". Setzt man allen Zahlen der Gleichung $w = c \cdot z$ ihre Einheiten zu, so geht die Zahlengleichung $w = c \cdot z$ über in die Größengleichung:

$$w \text{ Meter} = \left(c\,\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}\right) \cdot \left(z \text{ Sekunden}\right).$$

Sieht man die Einheiten Meter und Sekunden in dieser Gleichung wie algebraische Zahlen an, so hebt sich auf der rechten Seite „Sekunde" gegen „Sekunde", und es bleiben auf beiden Seiten der Gleichung Größen derselben Art, nämlich „Meter", stehen; hebt man auch noch „Meter" auf der linken Seite gegen „Meter" auf der rechten Seite, so gelangt man wieder zu einer Zahlengleichung. Jede Größengleichung kann schließlich nur Größen derselben Art bezw. deren Maßzahlen vergleichen. Diese Eigenschaft nennt man die Homogeneität (Gleichartigkeit der beiden Seiten) einer Größengleichung. (Vergl. Einleitung S. 22 u. f.)

Um diese Homogeneität deutlich zum Ausdruck zu bringen, sieht man die Geschwindigkeit als eine neue Einheit an, welche aus den Einheiten Meter und Sekunde durch eine, der Division der Zahlen entsprechende Größenoperation $\left(\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}\right)$ zusammengesetzt ist.

Wählt man für die Bestimmung von c die Zeit $z = 1''$, so gelangt man zu der Gleichung $w = z$, d. h. die Maßzahl der Geschwindigkeit

stimmt überein mit der Maßzahl des in der Zeiteinheit (Sekunde) zurückgelegten Weges.

Aus der Gleichung:

$$w = c \cdot z, \text{ d. h. Weg} = (\text{Geschwindigkeit}) \cdot (\text{Zeit})$$

folgen die Gleichungen:

$$c = \frac{w}{z}, \text{ d. h. Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \quad \ldots \quad 15)$$

und

$$z = \frac{w}{c}, \text{ d. h. Zeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}}.$$

Aus diesen Gleichungen kann bei der gleichförmigen Bewegung der Reihe nach Weg, Geschwindigkeit und Zeit je aus den anderen beiden Stücken bestimmt werden.

Auch diese Gleichungen sind homogen, wenn man die Einheiten Meter, Sekunde und $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$ hinzufügt.

Die Theorie der gleichförmigen Bewegung eines Punktes läßt sich ohne weiteres auf Bewegungen von Körpern übertragen, wenn diese Verschiebungen oder Drehungen sind.

Da bei der Verschiebung eines Körpers alle seine Punkte dieselbe Bewegung haben, so darf man von einer gleichförmigen Verschiebung des ganzen Körpers sprechen, wenn sich einer seiner Punkte W gleichförmig bewegt. Die Bahn von W ist dabei eine Leitlinie der Verschiebung. Der Weg (w) des Punktes W und dessen Geschwindigkeit (c) dürfen hier zugleich als Weg des Körpers und Geschwindigkeit des Körpers bezeichnet werden, und demnach ist die Gleichung $w = c \cdot z$ u. s. w. auch für die Verschiebung von Körpern verwendbar.

Bei der Drehung eines Körpers ist die Bewegung des Punktes W durch die Bewegung eines Punktes auf dem Einheitskreise bestimmt. Bewegt sich ein Einheitspunkt (oder auch W) gleichförmig auf seiner Bahn, so darf man die Bewegung des ganzen Körpers als eine gleichförmige Drehung bezeichnen. Bei dieser Bewegung ist die Zeit T, während welcher der Körper einen vollen Umgang macht, von Bedeutung. Alle Punkte des Körpers, welche von der Achse den Abstand r haben, beschreiben in der Zeit T Kreise von der Länge $2 r \pi$, d. h. sie bewegen sich mit der Geschwindigkeit $c = \frac{2 r \pi}{T}$. Für diese Punkte gilt demnach ($w = c \cdot z$) die Gleichung:

$$w = \frac{2 r \pi}{T} \cdot z.$$

Für $r = 1$, d. h. auf dem Einheitskreise, für welchen die Gleichung $w = arc\, \varepsilon$ gilt, hat c den besonderen Wert $\gamma = \frac{2 \pi}{T}$ und demgemäß ist hier $w = arc\, \varepsilon = \gamma \cdot z$.

Man nennt $\gamma = \frac{2\pi}{T}$ die Arcusgeschwindigkeit oder Winkelgeschwindigkeit, weil sie das Maß für die raschere oder langsamere gleichmäßige Erzeugung des Arcus oder des zugehörigen Mittelpunktswinkels ist. 16)

Will man die Geschwindigkeit c gegenüber γ besonders hervorheben, so nennt man sie Lineargeschwindigkeit, weil sie ein Maß für die Erzeugung der Bahnlinie (für Punkte im Abstande r von der Achse) ist.

Die Zahlen c und γ sind durch die Gleichung $c = r \,.\, \gamma$ verbunden, so daß $\gamma = \frac{c}{r}$ ist, d. h. man erhält die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, wenn man die Geschwindigkeit eines Punktes im Abstande r von der Achse auf die Einheit reduziert $(c : r)$.

Diese Gleichung entspricht genau der Gleichung $w = r \,.\, arc\,\varepsilon$, welche zu $arc\,\varepsilon = \frac{w}{r}$ führt, d. h. man erhält den Winkelweg eines Körpers, wenn man den Weg eines Punktes im Abstande r von der Achse auf die Einheit reduziert $(w : r)$.

Bei den Drehungen an Maschinen bestimmt man meist (unmittelbar oder durch Velocimeter) die Anzahl der vollen Umdrehungen für eine größere Zeitdauer und stellt daraus zunächst die Anzahl der Umdrehungen für die Minute (Tourenzahl) fest. Macht der Körper u Umdrehungen in der Minute, so ist für einen Punkt im Abstande r von der Achse der Weg in der Minute $u \,.\, 2 r \pi$ und demnach der Weg in der Sekunde $\frac{u \,.\, 2 r \pi}{60}$, d. h. man hat:

$$c = \frac{u \,.\, 2 r \pi}{60} \text{ und } \gamma = \frac{u \,.\, 2 \pi}{60}.$$

Der Wert von $\frac{2\pi}{60}$ ist 0,1047, von $\frac{60}{2\pi} = 9{,}5493$, so daß gilt:

$$c = r \,.\, \gamma \text{ und } \gamma = 0{,}1047\, u \text{ und } u = 9{,}5493\, \gamma \quad \cdot \cdot \cdot \quad 17)$$

Für einen ersten Überschlag ist $\gamma = 0{,}1\, u$ und $u = 10\, \gamma$ zu setzen, d. h. die Winkelgeschwindigkeit ist angenähert ein Zehntel von der Anzahl der Umdrehungen in der Minute u. s. w.

Da $arc\,\varepsilon$ eine reine Zahl (ohne Größeneinheiten) ist, so fordert die Homogeneität der Gleichung $arc\,\varepsilon = \gamma \,.\, z$, daß auch $\gamma \,.\, z$ eine reine Zahl ist, und demnach muß die Einheit für γ als reciproke Sekunde $\left(\frac{1}{\sec}\right)$ angesehen werden. Damit stimmt auch der Ausdruck $\frac{2\pi}{T}$ für γ überein.

Die Bewegungen in der Außenwelt, welche wir gleichförmig nennen, entsprechen in überwiegender Mehrzahl dem Begriffe der gleichförmigen Bewegung nur unvollkommen. Die Achsendrehung der Erde bezw. die entsprechende scheinbare Drehung des Himmelsgewölbes scheint, soweit unsere

Beobachtungen reichen, in aller Strenge als gleichförmige Bewegung betrachtet werden zu dürfen; ihr entsprechen die Bewegungen in unseren Uhren. Dasselbe gilt auch für die Fortpflanzung der Wellenbewegungen innerhalb homogener Stoffe, z. B. für die des Lichtes und des Schalles.

Der Begriff der Gleichförmigkeit der Bewegung ist ein Maßstab, den wir in unserem Inneren bilden, um ihn in der Außenwelt zu verwenden.

Ob eine Bewegung der Außenwelt als gleichförmig angesehen werden darf oder nicht, hängt im allgemeinen von dem Grade der Genauigkeit ab, den wir bei ihrer Untersuchung und Verwendung festsetzen.

5. Die ungleichförmige Bewegung und die Durchschnittsgeschwindigkeit für einen bestimmten Zeitabschnitt bezw. für ein bestimmtes Bahnstück. Die Bewegung eines Punktes heißt ungleichförmig, wenn die Proportionalität zwischen Weg (w) und Zeit (z), welcher die Gleichung $w = c \cdot z$ entspricht, nicht vorhanden ist, wenn also in gleichen Zeitteilen im allgemeinen ungleiche Bahnstücke durchlaufen werden.

Das einfachste Beispiel für eine solche Bewegung, an welchem ihr Wesen zuerst bekannt wurde und an welchem es auch heute noch am besten klar gemacht werden kann, ist der freie Fall (ohne Anfangsgeschwindigkeit) im luftleeren Raume. Hier sind, wie die Versuche zeigen, die Wege in noch so kleinen aufeinander folgenden Zeitteilen von gleicher Dauer den ungeraden Zahlen 1, 3, 5, ... proportional, so daß während der ersten, zweiten, dritten, ..., n^{ten} Sekunde die Wege $1\,w$, $3\,w$, $5\,w$, ..., $(2n - 1)\,w$ durchlaufen werden. (Vergl. die Versuche an Galileis schiefer Ebene, an v. Babos Fallbrett, an der Atwoodschen Fallmaschine.)

Auch bei ungleichförmigen Bewegungen läßt sich die Formel der gleichförmigen Bewegung ($w = c \cdot z$) mit Vorteil verwenden. Wenn man den bestimmten Weg w, welcher in einer bestimmten Zeit z durchlaufen wird, zu dieser ins Verhältnis setzt, so erhält man eine bestimmte Geschwindigkeit $c = \frac{w}{z}$, welche man als Durchschnittsgeschwindigkeit für die bestimmte Zeit z oder für den bestimmten Weg w bezeichnet. Wäre die Bewegung während der Zeit z gleichförmig, so würde der Weg w mit der Geschwindigkeit c durchlaufen werden, d. h. die Durchschnittsgeschwindigkeit für u. s. w. ist die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung, bei welcher u. s. w. Greift man verschiedene Bahnstücke w_1, w_2, w_3, ... heraus, welche bezw. in der Zeit z_1, z_2, z_3, ... durchlaufen werden, so sind die entsprechenden Durchschnittsgeschwindigkeiten $\frac{w_1}{z_1} = c_1$, $\frac{w_2}{z_2} = c_2$, $\frac{w_3}{z_3} = c_3$, ... im allgemeinen ungleich.

Das Beispiel des freien Falles giebt w, $3\,w$, $5\,w$, ..., $(2n - 1)\,w$ als solche Durchschnittsgeschwindigkeiten für die erste, zweite, dritte, ..., n^{te} Sekunde.

Oft kommt es nur darauf an, bei einer Bewegung eine solche Durchschnittsgeschwindigkeit zu kennen. Die gebräuchlichen Tabellen für Ge-

schwindigkeiten enthalten fast durchweg solche Durchschnittsgeschwindigkeiten. Wenn z. B. für einen Fußgänger 1,4 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, für ein Rennpferd 12 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, für eine Brieftaube 30 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ u. s. w. als Geschwindigkeit angegeben wird, so folgt durch eine einfache Überlegung, daß es sich hier nur um Durchschnittsgeschwindigkeiten handeln kann.

Beispiele: Der Mittelpunkt der Erde bewegt sich ungleichförmig auf seiner Bahn, er hat in der Sonnennähe (Perihel) verhältnismäßig große, in der Sonnenferne (Aphel) verhältnismäßig kleine und dazwischen mittlere Durchschnittsgeschwindigkeiten, er durchläuft aber die ganze Bahn (jedenfalls angenähert) immer in derselben Zeit (Jahr). Für viele Zwecke reicht es aus, die Durchschnittsgeschwindigkeit c für die ganze Bahn zu kennen.

Ähnliche Betrachtungen gelten auch für die regelmäßige Bewegung eines Kolbens, der am Anfange und Ende je eines Hinganges und Herganges für einen Augenblick in Ruhe ist und in der Mitte eine bestimmte maximale Durchschnittsgeschwindigkeit zeigt. Wenn er den ganzen Weg (Hubhöhe) eines Hinganges oder eines Herganges stets in derselben Zeit durchläuft, so ist es für viele Zwecke ausreichend, die Durchschnittsgeschwindigkeit für die Hubhöhe zu kennen.

6. Die Stellungsgleichung. Da die Durchschnittsgeschwindigkeit nur für einen bestimmten Zeitabschnitt bezw. für ein bestimmtes Bahnstück eine Bedeutung hat, so macht sich das Bedürfnis geltend, Zeitabschnitte in ihrer Lage innerhalb der gesamten Zeit und Bahnstücke in ihrer Lage auf der Bahn zu bestimmen.

Dabei hat man die ausdehnungslosen Zeitpunkte, welche einen Zeitabschnitt von bestimmter Dauer begrenzen, von diesem ausgedehnten Zeitabschnitte (z) selbst genau zu unterscheiden, ebenso die ausdehnungslosen Bahnpunkte, welche ein Bahnstück von bestimmter Länge begrenzen, von diesem ausgedehnten Bahnstücke (w) selbst.

Für die Lagenbestimmung der Zeitabschnitte bietet die gewöhnliche Zeitrechnung den nötigen Anhalt. Hier ist, wenn wir uns der Einfachheit wegen bei der Genauigkeit der Angabe auf Jahre beschränken, ein bestimmter Zeitpunkt gegeben, indem man die Jahre mitteilt, welche von ihm bis zu Christi Geburt oder von Christi Geburt bis zu ihm verflossen sind. Christi Geburt ist der Anfangspunkt (Nullpunkt) der Zeitmessung, in Bezug auf welchen die Lage eines bestimmten anderen Zeitpunktes angegeben wird, indem man die Zeitdauer feststellt, welche zwischen beiden Zeitpunkten liegt; dabei hat man die Zeit vor Christi Geburt von der Zeit nach Christi Geburt zu unterscheiden, d. h. die Vergangenheit in Bezug auf den Nullpunkt von der Zukunft in Bezug auf diesen. Führt man diese Bestimmung für zwei beliebige Zeitpunkte durch, so wird die Lage des von ihnen begrenzten Zeitabschnittes gegeben und zugleich auch dessen Dauer bestimmt.

Demgemäß wählt man auch in der Mechanik für die Lagenbestimmung innerhalb der Zeit einen bestimmten Zeitpunkt als Anfangspunkt (Nullpunkt),

z. B. 12 Uhr ($12^h\ 0'\ 0''$) mittags am Beobachtungstage (31. März 1899) und bestimmt gegen ihn die Lage anderer Zeitpunkte durch die Angabe der Dauer der inzwischen verflossenen Zeit. Dabei ist es am einfachsten, die Vergangenheit und die Zukunft in Bezug auf den Nullpunkt bezw. als negative und positive Zeit zu unterscheiden und die entsprechenden Angaben durch + bezw. — zu bezeichnen. So ist z. B. $11^h\ 45'\ 20''$ am Vormittage des Beobachtungstages durch $-0^h\ 14'\ 40''$ und $1^h\ 2'\ 12''$ am Nachmittage des Beobachtungstages durch $+1^h\ 2'\ 12''$ zu bezeichnen; beide Angaben zusammen bezeichnen einen bestimmten Zeitabschnitt von der Dauer $1^h\ 16'\ 52''$. Ebenso bestimmen die Angaben $+1^h\ 2'\ 12''$ und $+1^h\ 4'\ 26''$ einen bestimmten Zeitabschnitt von der Dauer $0^h\ 2'\ 14''$.

Die Einrichtung unserer Uhren (Zifferblätter) veranschaulicht uns diese ganze Auffassung.

Eine solche Angabe, wie $+1^h\ 2'\ 12''$, bezeichnen wir im allgemeinen durch t und nennen sie die Stellung des betreffenden Zeitpunktes (innerhalb der ganzen Zeit), während wir die Dauer des Zeitabschnittes bisher durch z bezeichnet haben. Zwei Stellungen $t' = 1^h\ 2'\ 12''$ und $t = 1^h\ 4'\ 26''$ bestimmen demnach die Lage eines bestimmten Zeitabschnittes von der Dauer $z = t - t' = 2'\ 14'' = 134''$.

Diese ganze Betrachtung läßt sich leicht auf die Lagenbestimmung von Bahnpunkten übertragen. Man wählt auf der Bahn einen beliebigen Punkt O als Nullpunkt und bestimmt die Lage eines Punktes P auf der Bahn durch Angabe der auf der Bahn gemessenen Entfernung OP. Um Doppeldeutigkeiten zu vermeiden, sieht man die Stücke OP auf der einen Seite des Nullpunktes als positiv, auf der anderen als negativ an und bezeichnet sie durch + bezw. —. Die Seite der positiven Stücke macht man durch eine Pfeilspitze auf der Bahn kenntlich.

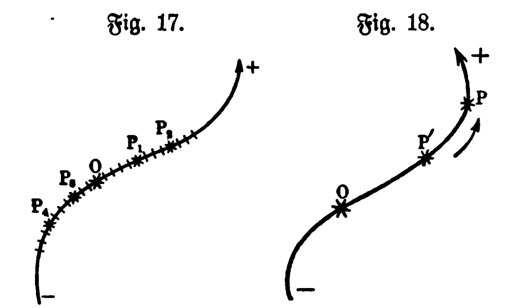


Fig. 17. Fig. 18.

So haben z. B. (vergl. Fig. 17) die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 bezw. die Entfernungen $OP_1 = +5$, $OP_2 = +9$, $OP_3 = -3$, $OP_4 = -7$, wofür man in Abkürzung schreibt: $P_1 = (+5)$, $P_2 = (+9)$, $P_3 = (-3)$, $P_4 = (-7)$.

Die Entfernung OP, welche im allgemeinen in Metern gemessen wird, soll die Stellung von P (auf der Bahn) heißen und durch das Zeichen s dargestellt werden.

Um nun (Fig. 18) ein Bahnstück $P'P = w$, das durch die Punkte P' und P begrenzt wird, in seiner Lage zu bestimmen, mißt man $OP' = s'$ und $OP = s$; man hat dann $OP - OP' = s - s' = w$. Wenn nun der Weg w in der Zeit z von einem Punkte W durchlaufen wird und wenn w durch die Stellungen s' und s und z durch die Stellungen t' und t be-

stimmt ist, so nimmt der bewegliche Punkt W innerhalb der Zeit $t' \ldots t$ auf der Bahn alle Stellungen $s' \ldots s$ ein.

Ist die Bewegung gleichförmig, so führt die Gleichung $w = cz$ zu der Stellungsgleichung:

$$s - s' = c(t - t').$$

Beginnt der Zeitabschnitt, den wir betrachten, im Nullpunkte der Zeitmessung, was sich durch passende Wahl des Nullpunktes jedenfalls für einen bestimmten Zeitabschnitt stets erreichen läßt, so ist $t' = 0$. Man hat dann $z = t - 0$, d. h. die Stellung t mißt hier zugleich die Dauer z der Bewegung für den betrachteten Abschnitt. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$s - s' = ct \quad \text{oder} \quad s = s' + ct.$$

Setzt man hier $t = 0$, so ist $s = s'$, d. h. s' bedeutet dann die Stellung des Punktes W auf der Bahn im Zeitpunkte $t = 0$. Bezeichnet man diese besondere Stellung, welche dem Beginn der Zeitmessung entspricht, mit s_0, so hat man:

$$s = s_0 + ct \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

Diese Gleichung soll die Stellungsgleichung der gleichförmigen Bewegung heißen; in ihr bedeutet s_0 die Stellung von W zur Zeit $t = 0$, s die Stellung zu einer beliebigen Zeit t und c die Geschwindigkeit der Bewegung. Daß eine solche Gleichung stets eine gleichförmige Bewegung darstellt, ist leicht zu zeigen.

Kann man es durch eine geeignete Wahl von O auf der Bahn erreichen, daß $s_0 = 0$ ist, d. h. daß sich der Punkt W bei Beginn der Zeitmessung im Nullpunkt der Bahn befindet, so erhält die Stellungsgleichung die Gestalt $s = ct$, die mit der Gleichung $w = cz$ in der Form übereinstimmt. Hier mißt die Stellung s zugleich die Länge des durchlaufenen Weges, ebenso wie die Stellung t zugleich die Dauer der verflossenen Zeit angiebt.

Es ist nützlich, den Unterschied zwischen Weg (w) und Stellung (s) auch in der Bezeichnung dauernd festzuhalten, weil Wege von gleicher Länge an verschiedenen Stellen der Bahn im allgemeinen bei der Betrachtung der Bewegungen sehr verschiedene Bedeutung haben. Dagegen kann der Unterschied zwischen der Dauer (z) und der Stellung (t) in der Bezeichnung zurücktreten, weil Zeitabschnitte von gleicher Dauer innerhalb des ganzen Zeitenflusses an und für sich keine Unterschiede darbieten.

Die Bedeutung der Stellungsgleichung $s = s_0 + ct$ besteht darin, daß man aus ihr für jeden Wert von t den zugehörigen Wert von s berechnen und somit die Lage eines sich gemäß jener Gleichung bewegenden Punktes W auf seiner Bahn für jeden Zeitpunkt angeben kann.

Ist $s_0 = 2$ und $c = 3$, so findet man aus der Gleichung $s = 2 + 3t$, z. B. $s = +17$ für $t = +5$ oder $s = -7$ für $t = -3$, d. h. W ist auf der positiven Seite der Bahn 17 m vom Nullpunkte entfernt, wenn 5″ vom Nullpunkte der Zeitmessung aus verflossen sind, oder W ist auf der negativen Seite der Bahn 7 m vom Nullpunkte entfernt, wenn noch 3″ bis zum Nullpunkte der Zeitmessung verfließen müssen.

Will man also eine Bewegung, deren Stellungsgleichung gegeben ist, veranschaulichen, so hat man in dieser, dem Flusse der Zeit folgend, für möglichst viele Werte von t die zugehörigen Werte von s zu berechnen und die so entstehende Tabelle zeichnerisch zu verwenden.

In Bezug auf den Nullpunkt $t = 0$ bezeichnet man mit $t = -\infty$ Werte der Vergangenheit, welche jede angebbare Größe übersteigen, und mit $t = +\infty$ Werte der Zukunft, welche jede angebbare Größe übersteigen, so daß die Bezeichnung $t = -\infty \ldots 0 \ldots +\infty$ den gesamten Fluß der Zeit darstellt. Man liest sie: Von t gleich Minus-Unendlich über t gleich Null zu t gleich Plus-Unendlich.

Welcher Teile der ganzen Bewegung für eine Aufgabe besonders in Frage kommen, läßt sich natürlich nur von Fall zu Fall feststellen.

Als Beispiele geben wir zunächst die Tabelle für $s = 2 + 3t$ und $s = 2 - 3t$ und die entsprechenden Figuren.

$s = 2 + 3t$

t	s
$-\infty$	$-\infty$
...	...
-3	-7
-2	-4
-1	-1
0	$+2$
$+1$	$+5$
$+2$	$+8$
$+3$	$+11$
...	...
$+\infty$	$+\infty$

$s = 0$ für $t = -\frac{2}{3}$.

Fig. 19.

$s = 2 - 3t$

t	s
$-\infty$	$+\infty$
...	...
-3	$+11$
-2	$+8$
-1	$+5$
0	$+2$
$+1$	-1
$+2$	-4
$+3$	-7
...	...
$+\infty$	$-\infty$

$s = 0$ für $t = +\frac{2}{3}$.

Fig. 20.

Die erste Gleichung stellt eine gleichförmige Bewegung dar, welche im Sinne der Stellungsmessung verläuft, die zweite eine gleichförmige Bewegung, welche diesem Sinne entgegengeht. Da im ersten Falle $c = +3$ und im zweiten Falle $c = -3$ ist, so nennt man die erste Bewegung eine Bewegung mit positiver Geschwindigkeit, die zweite eine Bewegung mit negativer Geschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit wird positiv genannt, wenn die Bewegung mit den Maßzahlen der Bahn verläuft (mitläufig); sie wird negativ genannt, wenn die Bewegung gegen die Maßzahlen der Bahn verläuft (gegenläufig).

Allgemein hat man $c = \frac{s - s_0}{t}$, d. h. man hat:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Stellungsänderung}}{\text{Zugehörige Zeitdauer}}.$$

Für positive Werte von t ist c positiv, wenn $s - s_0$ positiv ist, d. h. wenn s im Sinne der Maßzahlen der Bahn hinter s_0 liegt u. s. w.

Als nächstes Beispiel mag die Stellungsgleichung $s = m t^2$ behandelt werden und zwar für $m = +5$.

Fig. 21.

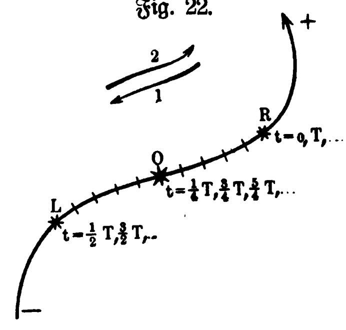
t	s
$-\infty$	$+\infty$
...	...
-3	$+45$
-2	$+20$
-1	$+5$
0	0
$+1$	$+5$
$+2$	$+20$
$+3$	$+45$
...	...
$+\infty$	$+\infty$

Die Bewegung geht erst gegenläufig von $+\infty$ bis zum Nullpunkte der Bahn, kehrt in diesem um und geht dann mitläufig bis zu $+\infty$ zurück.

Als letztes Beispiel mag die Stellungsgleichung $s = r\cos\left(360^0 \cdot \frac{t}{T}\right)$ oder $s = r\cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$ behandelt werden und zwar für $r = 5\,\text{m}$ und $T = 20''$.

t	Winkel	Arcus	Cosinus	s
0	0	0	$+1$	$+r$
$\frac{1}{4}T$	90^0	$\frac{\pi}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}T$	180^0	π	-1	$-r$
$\frac{3}{4}T$	270^0	$\frac{3\pi}{2}$	0	0
T	360^0	2π	$+1$	$+r$
...	....	....	.....	...

Fig. 22.



Die Bewegung ist eine harmonische Schwingung, welche rechts in R beginnt; ihre Amplitude ist $r = 5\,\text{m}$, ihre Dauer $T = 20''$. Zur Zeit $t = 0, T, 2T, \ldots$ befindet sich der Punkt in R, zur Zeit $t = \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T, \frac{5}{4}T, \ldots$ in O, zur Zeit $t = \frac{1}{2}T, \frac{3}{2}T, \frac{5}{2}T \ldots$ in L. Die Punkte R und L sind Umkehrpunkte der Bewegung.

Mit Hülfe der Stellungsgleichung einer Bewegung läßt sich die Durchschnittsgeschwindigkeit für einen bestimmten Zeitabschnitt bezw. für das zugehörige Bahnstück stets berechnen.

Dazu bezeichnen wir drei Zeitpunkte, welche im Sinne des Zeitenflusses

aufeinander folgen, durch $t' \ldots t \ldots t''$, und die zugehörigen Stellungen auf der Bahn, welche den Bahnpunkten $P' \ldots P \ldots P''$ entsprechen mögen, durch $s' \ldots s \ldots s''$. Wir nennen ferner das Bahnstück $P'P = OP - OP' = s - s'$ ein vor P gelegenes und das Bahnstück $PP'' = OP'' - OP = s'' - s$ ein hinter P gelegenes Bahnstück, beide Bahnstücke bei P gelegen.

Für $P'P$ und PP'' sind dann $\frac{s - s'}{t - t'}$ und $\frac{s'' - s}{t'' - t}$ als Durchschnittsgeschwindigkeiten aus der Stellungsgleichung zu berechnen.

In dem besonderen Falle, in dem t' und t'' von t gleich weit entfernt sind, so daß $t - t' = t'' - t = z$ ist, kann man zugleich $t' = t - z$ und $t'' = t + z$ setzen.

In vielen Fällen ist s eine Summe von gewöhnlichen Potenzen von t, es entstehen dann bei der Bildung von $s - s'$ und $s'' - s$ Glieder von der Form:

$$t^p - (t')^p = t^p - (t - z)^p$$

und

$$(t'')^p - (t)^p = (t + z)^p - t^p$$

und zwar im Zähler der Durchschnittsgeschwindigkeit, während die zugehörigen Nenner $t - t' = z$ und $t'' - t = z$ sind.

Man erhält hier die Tabellen:

1. $\frac{t - (t - z)}{z} = 1$	$\frac{(t + z) - t}{z} = 1$
2. $\frac{t^2 - (t - z)^2}{z} = 2t - z$	$\frac{(t + z)^2 - t^2}{z} = 2t + z$
3. $\frac{t^3 - (t - z)^3}{z} = 3t^2 - 3tz + z^2$	$\frac{(t + z)^3 - t^3}{z} = 3t^2 + 3tz + z^2$
4. $\frac{t^4 - (t - z)^4}{z} = 4t^3 - 6t^2 z + 4tz^2 - z^3$	$\frac{(t + z)^4 - t^4}{z} = 4t^3 + 6t^2 z + 4tz^2 + z^3$
. . . .	. . . .

19)

Entsprechende Reihen beider Tabellen werden einander gleich, wenn man die Vorzeichen von z umkehrt.

Handelt es sich z. B. um die Stellungsgleichung:

$$s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3,$$

so folgt aus den Tabellen sofort:

$$\frac{s - s'}{t - t'} = a_1 + a_2 (2t - z) + a_3 (3t^2 - 3tz + z^2)$$

und

$$\frac{s'' - s}{t'' - t} = a_1 + a_2 (2t + z) + a_3 (3t^2 + 3tz + z^2).$$

Ist die Rechnung bei den Werten $a_0 = 3$, $a_1 = -4$, $a_2 = +3$, $a_3 = -5$ für $t' = 20$, $t = 25$, $t'' = 30$ durchzuführen, so ist:

$$\frac{s - s'}{t - t'} = -7494 \quad \text{und} \quad \frac{s'' - s}{t'' - t} = -11214,$$

d. h. innerhalb der fünf Sekunden, welche zwischen $t' = 20$ und $t = 25$ verfließen, ist die Durchschnittsgeschwindigkeit $7494 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und zwar gegen den Sinn der Stellungszahlen der Bahn; bei einer gleichförmigen Bewegung würde also der Weg $s - s'$ in $5''$ mit einer Geschwindigkeit von $7494 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ gegenläufig zurückgelegt werden u. s. w.

Will man auch s', s, s'' kennen lernen, so rechnet man besser ohne jene Tabellen; die Rechnung ergiebt für das Beispiel $s' = -38877$, $s = -76347$, $s'' = -132417$.

Der Gang der Rechnung läßt für jede Form der Stellungsgleichung eine kurze Zusammenfassung zu, falls man einen Ausdruck, welcher aus t und bekannten Größen $a_0, a_1, \ldots$ aufgebaut ist, eine Funktion von t nennt und ihn durch $f(t)$, gelesen Funktion von t, bezeichnet. Die Gleichung $s = f(t)$ stellt dann irgend eine Stellungsgleichung dar, aus welcher $s' = f(t')$ bezw. $s'' = f(t'')$ folgt, indem man an die Stelle von t überall t' bezw. t'' setzt. Man berechnet die Funktion von t, welche die Stellung s bestimmt, für t' und t'', so daß man s' und s'' neben s erhält, bildet die Differenzen $s - s'$ und $s'' - s$ und dividiert sie bezw. durch $t - t' = z$ und $t'' - t = z$. Man hat dann:

$$\frac{s - s'}{t - t'} = \frac{f(t) - f(t')}{t - t'} = \frac{f(t) - f(t - z)}{z}$$

und

$$\frac{s'' - s}{t'' - t} = \frac{f(t'') - f(t)}{t'' - t} = \frac{f(t + z) - f(t)}{z} . \quad \ldots \quad 20)$$

Allgemein gilt:

$$\text{Durchschnittsgeschwindigkeit} = \frac{\text{Änderung der Stellung}}{\text{Zugehörige Zeitdauer}}$$

7. **Die Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkte bezw. an einer bestimmten Stelle der Bahn.** Der Begriff Durchschnittsgeschwindigkeit wird für eine weitere Einsicht in das Wesen der ungleichförmigen Bewegung von großer Bedeutung, falls man die Begriffe **Zeitelement** und **Wegelement** einführt.

Wie man die Kreislinie als ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich-vielen Seiten von unendlich-kleiner Ausdehnung auffaßt, so denkt man sich auch eine bestimmte Zeitdauer aus unendlich-vielen, unter sich gleichen Teilen von unendlich-kleiner Dauer bestehend. Jeden solchen Teil nennt man ein Zeitelement. Der Weg, welcher bei einer bestimmten Bewegung in einem bestimmten Zeitelemente durchlaufen wird, heißt das zu jenem Zeitelemente gehörige Wegelement. Die Wegelemente, welche bei einer bestimmten Bewegung zu einer Reihe aufeinander folgender (unter sich gleicher) Zeitelemente gehören, sind im allgemeinen ungleich, nur bei der gleichförmigen Bewegung sind auch die Wegelemente zugleich mit den Zeitelementen stets unter sich gleich.

Um ein **Wegelement** gewissermaßen greifbar zu machen, setzt man es zu dem **Zeitelement**, in welchem es durchlaufen wird, ins Verhältnis, d. h. man bildet die entsprechende **Durchschnittsgeschwindigkeit**, welche im allgemeinen einen **endlichen Wert** hat.

Die Durchschnittsgeschwindigkeiten für eine Reihe von Wegelementen, welche zu einer Reihe aufeinander folgender (unter sich gleicher) Zeitelemente gehören, stellen uns diese unsichtbaren Wegelemente sozusagen in einer überaus starken Vergrößerung dar. Um die Bewegung genau kennen zu lernen, muß man sie gewissermaßen mikroskopisch betrachten. Wie uns Dinge, die für das unbewaffnete Auge nicht sichtbar sind, durch das Mikroskop sichtbar gemacht werden, so erscheinen die Wegelemente infolge der Division durch die Zeitelemente als entsprechende Durchschnittsgeschwindigkeiten. Bei dieser Vergrößerung haben wir Verhältnisse vor uns, die einer **ähnlichen** Abbildung entsprechen. Wie das Verhältnis zweier bestimmten Strecken auf Karten von verschiedenem Maßstabe dasselbe ist, so bleibt auch das Verhältnis zweier Wegelemente in ihrer Abbildung durch die entsprechenden Durchschnittsgeschwindigkeiten erhalten. Um von diesen immerhin rohen Vergleichen zu einer weiteren Klärung der Begriffe Wegelement, Zeitelement und der entsprechenden Durchschnittsgeschwindigkeit fortzuschreiten, stellen wir folgende Betrachtungen an. Je kleiner die Zeitdauer (z) ist, während der die Bewegung eines Punktes W betrachtet wird, um so kleiner ist auch im allgemeinen der zugehörige Weg (w) von W, während die zugehörige Durchschnittsgeschwindigkeit $\left(\frac{w}{z}\right)$ dabei einen beträchtlichen Wert behalten kann.

$$\text{Für} \left\{ \begin{array}{ll} z = 1'' & w = 3\,\mathrm{m} \\ z = 0'',1 & w = 0,3\,\mathrm{m} \\ z = 0'',01 & w = 0,03\,\mathrm{m} \\ z = 0'',001 & w = 0,003\,\mathrm{m} \end{array} \right\} \text{ ist stets } \frac{w}{z} = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

Es beruht dies auf der Eigenschaft der Brüche, bei Erweiterungen ihren Wert beizubehalten. (Vergl. Einleitung S. 21.)

Selbst wenn man die Zeitdauer, während der die Bewegung eines Punktes W betrachtet wird, kleiner und kleiner werden denkt bis zur Grenze „Null", behält die entsprechende Durchschnittsgeschwindigkeit im allgemeinen noch einen endlichen Wert. Als Beispiel für einen derartigen Grenzübergang aus einem anderen Gebiete mag angeführt werden, daß $arc\,\varepsilon : sin\,\varepsilon$ sich dem Wert 1 unbegrenzt nähert, wenn man ε kleiner und kleiner werden denkt bis zur Grenze Null. Hier zeigt eine Vergleichung der Tabellen für $arc\,\varepsilon$ und $sin\,\varepsilon$, etwa von 5^0 abwärts, daß die Werte beider Größen in um so mehr Decimalen übereinstimmen, je kleiner ε ist. Dies läßt sich auch leicht geometrisch deuten.

Eine Zeitdauer z, welche wir bis zur Grenze Null kleiner und kleiner werden lassen wollen, mag τ genannt werden, damit sie sich in der Bezeichnung hervorhebt.

Das Zeichen für den Grenzübergang ist *lim*, eine Abkürzung des lateinischen Wortes *limes* (Grenze). Durch $lim\,\tau = 0$, gelesen „*Limes* von τ

gleich Null", drücken wir die Aufforderung aus, sich τ kleiner und kleiner werdend zu denken bis zur Grenze Null.

Hat man z. B. die Stellungsgleichung $s = 5t^2$, so hat die Durchschnittsgeschwindigkeit für ein Bahnstück $P'P$, welches durch die Zeitpunkte t' und t bestimmt ist, den Wert $10t - 5\tau$, falls man $t - t' = \tau$ setzt. Dieser Wert nähert sich mehr und mehr dem Werte $10t$, je kleiner die Zeitdauer τ wird, welche für das Durchlaufen des Weges $P'P$ erforderlich ist, und erreicht den Wert $10t$ für $\tau = 0$. Die Bezeichnung für das Ergebnis dieser Betrachtung ist:

$$lim\,[10t - 5t]_{\tau = 0} = 10t.$$

Man liest: *Limes* von $10t - 5\tau$ für $\tau = 0$ gleich $10t$.

Dieser Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeit heißt die Geschwindigkeit zur Zeit t bezw. die Geschwindigkeit im Bahnpunkte P.

Dasselbe Ergebnis liefert die Betrachtung des Bahnstückes PP'', welches durch die Zeitpunkte t und t'' bestimmt wird. Setzt man $t'' = t + \tau$, so hat die Durchschnittsgeschwindigkeit den Wert $10t + 5\tau$, und man gelangt bei der Grenzbetrachtung wieder zu $10t$.

Für $t = +3$ ist z. B. $10t = +30$ und $s = +45$, d. h. zur Zeit $t = +3''$ befindet sich der Punkt an der Stelle $+45$ m und hat die Geschwindigkeit $+30\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Für $t = -3$ ist $10t = -30$ und $s = +45$, d. h. zur Zeit $t = -3''$ befindet sich der Punkt an der Stelle $+45$ m und hat die Geschwindigkeit $-30\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Derselben Stelle $+45$ m entspricht auf dem Hingange des Punktes die Geschwindigkeit $-30\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, auf dem Rückgange die Geschwindigkeit $+30\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Nennt man das Bahnelement, welches $P'P$ entspricht, das Bahnelement vor t bezw. vor P und das Bahnelement, welches PP'' entspricht, das Bahnelement hinter t bezw. hinter P, so führt der Grenzübergang für beide Bahnelemente zu demselben Ergebnisse. Wir fassen die beiden Bahnelemente zusammen unter dem Namen: Bahnelement bei t bezw. bei P. Nun gilt folgende Erklärung:

Unter der Geschwindigkeit zur Zeit t bezw. im Punkte P versteht man den Grenzwert[1]) der Durchschnittsgeschwindigkeit ($lim\,\tau = 0$) für ein Bahnstück bei t bezw. bei P. In Abkürzung kann man auch sagen: Unter der Geschwindigkeit zur Zeit t bezw. im Punkte P versteht man die Durchschnittsgeschwindigkeit für ein Bahnelement[1]) bei t bezw. bei P.

---

[1]) Bei den gebräuchlichen Funktionen (Potenzsumme, Sinus u. s. w.) gelangt man durch den Grenzübergang, mag man nun von $P'P$ oder PP'' ausgehen, stets zu einem bestimmten Werte. Es giebt aber auch Funktionen, bei welchen dies nicht der Fall ist, so daß dann von einer Geschwindigkeit im Zeitpunkte t überhaupt nicht gesprochen werden darf.

Wir bezeichnen diese Geschwindigkeit (velocitas) mit v. Für ihre Berechnung gilt, falls die Stellungsgleichung $s = f(t)$ gegeben ist, der Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} v &= lim \left[\frac{f(t) - f(t - \tau)}{\tau}\right]_{\tau=0} \\ \text{oder} \quad &= lim \left[\frac{f(t + \tau) - f(t)}{\tau}\right]_{\tau=0} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 21)$$

und zwar, je nachdem man zur Berechnung das Bahnstück vor oder hinter t bezw. P benutzt[1]).

Man nennt den Ausdruck für v, der wieder eine Funktion von t ist, die Ableitung von $s = f(t)$ und bezeichnet $f(t)$ selbst als Stammfunktion.

In kurzem Ausdrucke sagt man: v wird durch Ableitung der Stellungsgleichung erhalten.

Zu beachten ist noch, daß v für jeden Zeitpunkt t eindeutig bestimmt ist, nicht aber für jeden Bahnpunkt P, da ein beweglicher Punkt W einen bestimmten Punkt P der Bahn mehrere Male mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufen kann.

Positive Werte von v zeigen an (vergl. Formel 21), daß die Bewegung mitläufig ist, negative, daß sie gegenläufig ist in Bezug auf die Stellungszahlen der Bahn.

Solange die absoluten Werte von v wachsen, nennt man die Bewegung beschleunigt, solange die absoluten Werte von v abnehmen, nennt man die Bewegung verzögert.

Enthält die Stellungsgleichung nur Potenzen von t, so giebt die Tabelle auf S. 53 die Rechnung für die Ableitung für $z = 0$. Man hat:

1. 1
2. $2t$
3. $3t^2$
4. $4t^3$

. . . .

Allgemein gilt, daß ein Glied t^p in der Stammfunktion für deren Ableitung das Glied $p\,t^{p-1}$ liefert. Für $t^0 = 1$ ergiebt sich als Ableitung 0, für t^1 ergiebt sich $1\,t^0 = 1$, für t^2 ergiebt sich $2\,t$ u. s. w.

Beispiel: $s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

liefert:

$$v = 0 + a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2.$$

Zur Zeit $t = 3$ ist z. B. bei dieser Stellungsgleichung:

$$v = a_1 + 6a_2 + 27a_3.$$

Die Stellungsgleichungen $s = r\,sin\,(m\,t)$ bezw. $s = r\,cos\,(m\,t)$ führen zu $v = m\,r\,cos\,(m\,t)$ und $v = -m\,r\,sin\,(m\,t)$.

Man hat nämlich im ersten Falle $s' = r\,sin\,(m\,t')$ und

$$s - s' = r\,[sin\,(m\,t) - sin\,(m\,t')] = 2\,r\,sin\left(\frac{m\,t - m\,t'}{2}\right) cos\,\frac{m\,t + m\,t'}{2}.$$

---

[1]) Siehe die vorhergehende Anmerkung.

Für $t' = t - \tau$ ist also:

$$s - s' = 2\,r\,sin\,\frac{m\,\tau}{2}\,cos\,m\left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

Teilt man auf beiden Seiten durch $\frac{m\tau}{2}$, damit sich auf der rechten Seite $sin\,\frac{m\,\tau}{2} : \frac{m\,\tau}{2}$ bildet, so ist:

$$\frac{s - s'}{\tau} = \frac{m}{2} \cdot 2\,r \cdot \frac{sin\,\frac{m\,\tau}{2}}{\frac{m\,\tau}{2}} \cdot cos\,m\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

und man erhält für $lim\,\tau = 0$:

$$v = m\,r\,cos\,(m\,t),$$

weil das Verhältnis von Sinus und Arcus für $lim\,\tau = 0$ den Wert 1 und $t - \frac{\tau}{2}$ für $lim\,\tau = 0$ den Wert t erhält.

Eine entsprechende Rechnung ist im zweiten Falle durchzuführen.

Für $m = \frac{360^0}{T}$ bezw. $= \frac{2\,\pi}{T}$ erhält man zu dem Beispiel der Fig. 22 die Geschwindigkeit $v = -\frac{2\,\pi}{T} \cdot r \cdot sin\left(2\,\pi\,\frac{t}{T}\right)$, welche folgende Tabelle liefert:

$t = 0$	$v = 0$
$t = \frac{T}{4}$	$v = -\frac{2\,\pi\,r}{T}$
$t = \frac{T}{2}$	$v = 0$
$t = \frac{3\,T}{4}$	$v = +\frac{2\,\pi\,r}{T}$
$t = T$	$v = 0$

Die Geschwindigkeit ist im Umkehrpunkte R zunächst Null, hat in O den Wert $\frac{2\,\pi\,r}{T}$ bei einem Bewegungssinne (—) von R nach L, ist im Umkehrpunkte L wieder Null, hat nun in O wieder den Wert $\frac{2\,\pi\,r}{T}$ bei einem Bewegungssinne (+) von L nach R u. s. f.

Für die Stellungsgleichung $s = r\,e^{m\,t}$ ist $v = m\,.\,r\,e^{m\,t}$.

Man hat:

$$s'' = r\,e^{m\,t''} \quad \text{und} \quad s'' - s = r\,(e^{m\,t''} - e^{m\,t}).$$

Für $t'' = t + \tau$ ist $e^{m\,t''} = e^{m\,t}\,.\,e^{m\,\tau}$ und $s'' - s = r\,.\,e^{m\,t}\,(e^{m\,\tau} - 1)$ und

$$\frac{s'' - s}{\tau} = r \cdot e^{m\,t}\,.\,\frac{e^{m\,\tau} - 1}{\tau}.$$

Die Formel $e^x = 1 + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$ liefert für $x = m\tau$:

$$e^{m\tau} - 1 = \frac{m\tau}{1} + \frac{m^2\tau^2}{1.2} + \frac{m^3\tau^3}{1.2.3} + \cdots$$

und

$$\frac{e^{m\tau} - 1}{\tau} = m + \tau\left(\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m^3\tau + \ldots\right)$$

Für $lim\, \tau = 0$ geht die rechte Seite in m über.

Für Verschiebungen und Drehungen von Körpern sind alle diese Betrachtungen ohne weiteres gültig. Dabei bezeichnen wir die veränderliche Winkelgeschwindigkeit $\frac{v}{r}$ durch φ, während die konstante Winkelgeschwindigkeit $\frac{c}{r}$ nach wie vor durch γ bezeichnet wird; die Geschwindigkeit auf dem Einheitskreise heißt also φ, wenn sie veränderlich, und γ, wenn sie konstant ist.

8. **Die Durchschnittsbeschleunigung für einen bestimmten Zeitabschnitt bezw. für ein bestimmtes Bahnstück.** Nachdem die Geschwindigkeit für jeden Zeitpunkt bezw. für jede Stelle der Bahn bestimmt worden ist, läßt sich auch die Abweichung der ungleichförmigen Bewegung von der, dem Flusse der Zeit entsprechenden gleichförmigen Bewegung genauer darstellen, als es durch Angabe von Durchschnittsgeschwindigkeiten möglich ist.

Ist die Geschwindigkeit am Anfange eines bestimmten Zeitabschnittes v' und an dessen Ende v, so wird das entsprechende Bahnstück mit der Anfangsgeschwindigkeit v' betreten und mit der Endgeschwindigkeit v verlassen, während inzwischen v' auf irgend eine Weise in v übergeht. Die Änderung der Geschwindigkeit für diesen Zeitabschnitt beträgt $v - v'$. Setzt man diese Änderung $v - v'$ zur Zeit z, in welcher sie vor sich ging, ins Verhältnis, so erhält man ein Maß für die Abweichung der ungleichförmigen Bewegung von der gleichförmigen, zunächst für einen bestimmten Zeitabschnitt bezw. für ein bestimmtes Bahnstück. Man nennt:

$$\frac{v - v'}{z}$$

die Durchschnittsbeschleunigung für den betrachteten Abschnitt der Zeit bezw. für das betrachtete Bahnstück, d. h.:

$$\text{Durchschnittsbeschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zugehörige Zeitdauer}} \qquad 22)$$

Für eine gleichförmige Bewegung hat diese Durchschnittsbeschleunigung stets den Wert Null, da hier $v = c$ und $v' = c$ ist. Da die Geschwindigkeit die Einheit $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ hat und hier eine Geschwindigkeit $v - v'$ durch eine Zeitdauer z geteilt erscheint, so hat man wegen der Homogeneität der Gleichungen

die Einheit der Beschleunigung als $\frac{\text{m}}{\text{sec}} : \text{sec} = \frac{\text{m}}{(\text{sec})^2}$ festzusetzen; man liest „Meter durch Sekunden-Quadrat" oder auch „Meter in der Quadrat-Sekunde".

Ist z. B. $v = 9 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $v' = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $z = 2''$, so ist $\frac{v - v'}{z} = \frac{9 - 3}{2} = \frac{6}{2} = 3 \frac{\text{m}}{(\text{sec})^2}$, d. h. in den betrachteten 2 Sekunden ändert sich die Geschwindigkeit, trotz aller Schwankungen im einzelnen, im ganzen um $6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, in $1''$ also um $3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Fände man bei einer Bewegung für jeden noch so kleinen Zeitabschnitt für $1''$ denselben Wert $3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ als Änderung der Geschwindigkeit, so würde die ganze Bewegung die Beschleunigung $3 \frac{\text{m}}{(\text{sec})^2}$ zeigen.

Man berechnet die **Durchschnittsbeschleunigung** aus der **Geschwindigkeitsgleichung** (v) genau so wie man die **Durchschnittsgeschwindigkeit** aus der Stellungsgleichung (s) berechnet.

Für $v = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + a_3 t^3$ folgt z. B.:

$$\frac{v - v'}{z} = a_1 + a_2 (2t - z) + a_3 (3t^2 - 3tz + z^2).$$

Die Betrachtung gilt wiederum ohne weiteres für **Verschiebungen** und **Drehungen** von Körpern.

9. Die gleichmäßig-geänderte Bewegung und deren Beschleunigung. Wenn die Durchschnittsbeschleunigung für jeden noch so kleinen Abschnitt der Zeit bezw. für das zugehörige Bahnstück denselben Wert b hat, so darf man von einer **Beschleunigung** b **der ganzen Bewegung** sprechen. Man nennt solche Bewegungen **gleichmäßig-geändert**. Sie bilden unter den ungleichförmigen Bewegungen die einfachste Klasse, weil bei ihnen die **Änderung der Geschwindigkeit stets der Zeit proportional** ist, während der diese Änderung erfolgt.

Sie stehen in einer bestimmten Beziehung zu den **gleichförmigen** Bewegungen, bei welchen die **Änderung der Stellung stets der Zeit** proportional ist, während der diese Änderung erfolgt. Ersetzt man in der Stellungsgleichung der gleichförmigen Bewegung s durch v, so erhält man die Geschwindigkeitsgleichung der gleichmäßig-geänderten Bewegung. Ist nämlich $v - v'$ stets proportinal zu $t - t'$, so gilt, falls man die konstante Durchschnittsbeschleunigung b nennt:

$$\frac{v - v'}{t - t'} = b, \text{ d. h. } v = v' + b(t - t').$$

Setzt man $t' = 0$, so ist $v = v' + bt$ und man erhält $v = v'$ für $t = 0$. Bezeichnet man diese besondere Geschwindigkeit, welche dem Anfangspunkte der Zeitmessung entspricht, mit v_0, so hat man:

$$v = v_0 + bt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 23)$$

als Geschwindigkeitsgleichung der gleichmäßig-geänderten Bewegung, entsprechend der Stellungsgleichung $s = s_0 + ct$ der gleichförmigen Bewegung.

Um für die gleichmäßig-geänderte Bewegung auch die Stellungsgleichung abzuleiten, hat man zu beachten, daß ihre Geschwindigkeit in der Zeit $0 \ldots t$ gleichmäßig von v_0 auf v wächst und daher in der Mitte dieser Zeit, d. h. im Zeitpunkte $\frac{t}{2}$ ihren Durchschnittswert $\frac{v_0 + v}{2}$ erreicht. Für eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $c = \frac{v_0 + v}{2}$ würde der Weg w während der Zeit t den Wert $c \cdot t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$ haben, und demgemäß gilt auch für die gleichmäßig-geänderte Bewegung:

$$w = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + (v_0 + bt)}{2} \cdot t = v_0 t + \frac{b}{2} t^2.$$

Setzt man $w = s - s'$, so ist:

$$s = s' + v_0 t + \frac{b}{2} t^2.$$

Für $t = 0$ ist $s = s'$. Bezeichnet man diesen besonderen Wert von s' wieder mit s_0, so ist:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{b}{2} t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 24)$$

die Stellungsgleichung der gleichmäßig-geänderten Bewegung. Dabei bedeutet s_0 die Stellung zur Zeit $t = 0$, v_0 die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ und b die konstante Durchschnittsbeschleunigung oder kurz die Beschleunigung der Bewegung.

Bildet man für $s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ die Ableitung $v = a_1 + 2 a_2 t$, so ist $v = a_1$ für $t = 0$, d. h. $a_1 = v_0$. Aus $v = v_0 + 2 a_2 t$ folgt $\frac{v - v_0}{t} = 2 a_2$, d. h. die Bewegung ist gleichmäßig-geändert, und zwar ist $b = 2 a_2$ oder $a_2 = \frac{1}{2} b$.

Für die Ableitung der Stellungsgleichung kann folgende strengere Betrachtung dienen, deren Gedankengang für spätere Untersuchungen wichtig ist.

Wir teilen die Zeit $0 \ldots t$ ein in n Teile von der Dauer τ, so daß $n \cdot \tau = t$ ist. Für jeden dieser Teile ist dann die Anfangsgeschwindigkeit und die Endgeschwindigkeit durch die Gleichung $v = v_0 + bt$ zu bestimmen, so daß man folgende Tabelle hat:

$0 \ldots \ldots \tau$	$v_0 \ldots \ldots v_0 + b\tau$
$\tau \ldots \ldots 2\tau$	$v_0 + b\tau \ldots \ldots v_0 + 2b\tau$
$2\tau \ldots \ldots 3\tau$	$v_0 + 2b\tau \ldots \ldots v_0 + 3b\tau$
. . . .	. . . .
$(n-1)\tau \ldots n\tau$	$v_0 + (n-1)b\tau \ldots v_0 + nb\tau.$

Da die Geschwindigkeiten für die einzelnen Zeitpunkte $0, \tau, 2\tau, \ldots, n\tau$ stets wachsen, so erhält man für die entsprechenden Wege $w_1, w_2, \ldots, w_n$ zu kleine Werte, wenn man sich vorstellt, daß jeder mit der zugehörigen

Anfangsgeschwindigkeit ganz durchlaufen wird, zu große Werte dagegen, wenn man sich vorstellt, daß jeder mit der zugehörigen Endgeschwindigkeit ganz durchlaufen wird. Bezeichnet man den Weg mit w, so erhält man im ersten Falle eine untere Grenze w_u für w, im zweiten Falle eine obere Grenze w_0 für w, d. h. es gilt:

$$w_u < w < w_0.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} w_u &= v_0 \,.\, \tau + (v_0 + b\tau)\tau + \cdots [v_0 + b\,(n-1)\,\tau]\,\tau \\ &= n(v_0\,\tau) + b\,\tau^2\,[0 + 1 + 2 + \cdots (n-1)] \\ &= n(v_0\,\tau) + b\,\tau^2\,\frac{n(n-1)}{2} \\ &= v_0\,(n\,\tau) + \frac{b}{2}\,[(n\,\tau)^2 - (n\,\tau)\,.\,\tau] \\ &= v_0\,t + \frac{b}{2}\,(t^2 - t\,\tau). \end{aligned}$$

Ebenso ist:

$$w_0 = v_0\,t + \frac{b}{2}\,(t^2 + t\,\tau).$$

Läßt man τ kleiner und kleiner werden, so nähern sich w_u und w_0 der Grenze $v_0\,t + \frac{b}{2}\,t^2$ und demnach ist, da w stets zwischen w_u und w_0 liegt:

$$w = v_0\,t + \frac{b}{2}\,t^2.$$

Für endliche Werte von τ beträgt der Fehler $w_u - w$ bei der ersten Betrachtung $-\frac{b}{2}\,t\,\tau$ und der Fehler $w_0 - w$ bei der zweiten Betrachtung $+\frac{b}{2}\,t\,\tau$.

Für Aufgaben aus dem Gebiete der gleichmäßig-geänderten Bewegung ist neben der Stellungsgleichung und neben der Geschwindigkeitsgleichung noch eine weitere Gleichung wichtig. Multipliziert man $v - v_0 = b\,t$ und $v + v_0 = 2\,(v_0 + \frac{b}{2}\,t)$ miteinander, so entsteht:

$$v^2 - v_0^2 = 2\,b\left(v_0\,t + \frac{b}{2}\,t^2\right) = 2\,b\,w,$$

d. h. es ist:

$$\tfrac{1}{2}\,v^2 - \tfrac{1}{2}\,v_0^2 = b\,(w) = b\,(s - s_0).$$

Für t' und s' ergiebt sich noch:

$$\tfrac{1}{2}\,v'^2 - \tfrac{1}{2}\,v_0^2 = b\,(s' - s_0)$$

und man erhält durch Subtraktion der Gleichungen für s und s':

$$\tfrac{1}{2}\,v^2 - \tfrac{1}{2}\,v'^2 = b\,(s - s') = b\,(\overline{w}) \quad \ldots\ldots \quad 25)$$

d. h. für jedes Bahnstück $(\overline{w}) = s - s'$ ist die Differenz der halben Quadrate von Endgeschwindigkeit (v) und Anfangsgeschwindigkeit

(v') gleich dem Produkte aus Beschleunigung (b) und Weg ($\overline{w}$). Diese Gleichung soll Verbindungsgleichung heißen, weil sie s, v und b zugleich enthält.

Man unterscheidet die gleichmäßig-geänderten Bewegungen in gleichmäßig-beschleunigte und in gleichmäßig-verzögerte Bewegungen. Ist die Bewegung mitläufig in Bezug auf die Stellungszahlen der Bahn, so sind v und v' positiv, und man hat $b > 0$ für $v > v'$ und $b < 0$ für $v < v'$, weil $\frac{v - v'}{z} = b$ ist. Im ersten Falle, d. h. für eine positive Beschleunigung b bezw. für wachsendes v heißt die Bewegung gleichmäßig-beschleunigt, im letzteren Falle, d. h. für eine negative Beschleunigung (Verzögerung) bezw. für abnehmendes v heißt die Bewegung gleichmäßig-verzögert.

Ist die Bewegung gegenläufig, so gilt Entsprechendes.

Unter den Bewegungen der Außenwelt sind namentlich der freie Fall; sowie der Vertikalwurf nach unten und nach oben Beispiele für gleichmäßig-geänderte Bewegungen, vorausgesetzt, daß man bei den Bewegungen der Körper von dem Einflusse der umgebenden Luft absieht. Bei diesen Bewegungen hat die Beschleunigung, welche hier (gravitas) durch g bezeichnet wird, den Wert $9{,}81 \frac{\text{m}}{(\text{sec})^2}$.

Für den freien Fall gilt $s = \frac{g}{2} t^2$ und $v = g t$.

Für den Vertikalwurf nach unten gilt bei v_0 als Anfangsgeschwindigkeit $s = v_0 t + \frac{g}{2} t^2$ und $v = v_0 + g t$.

Beide Bewegungen sind gleichmäßig-beschleunigt.

Der Vertikalwurf nach oben ist zunächst eine gleichmäßig-verzögerte Bewegung und zwar, bis der höchste Punkt der Bahn erreicht ist, dann eine gleichmäßig-beschleunigte Bewegung, welche mit der Bewegung des freien Falles übereinstimmt. Man hat hier $s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$ und $v = v_0 - g t$, so daß v für $t = 0 \ldots \frac{v_0}{g}$ von v_0 bis 0 abnimmt, für $t = \frac{v_0}{g} \ldots \infty$ aber seinem absoluten Werte nach fortgesetzt zunimmt.

Alle Bewegungen aus der Ruhe und alle Bewegungen, welche in Ruhe übergehen, lassen sich angenähert als gleichmäßig-geändert auffassen, so z. B. die Bewegung eines Eisenbahnzuges bei der Abfahrt und Anfahrt, die Bewegung von Maschinenteilen beim Anlauf und Ablauf u. s. w.

Dabei darf man die Formeln des Paragraphen ohne weiteres auf Verschiebungen und Drehungen von Körpern übertragen.

Bei Drehungen kann man die Beschleunigung b auf die Einheit reduzieren, d. h. $\frac{b}{r} = \beta$ bilden. Man nennt dann β die (konstante) Winkelbeschleunigung der Bewegung (= Beschleunigung auf dem Einheitskreise).

Es gilt dann:

$$\sigma = \sigma_0 + \varphi_0 t + \frac{\beta}{2} t^2$$
$$\varphi = \varphi_0 + \beta t$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi^2 - \tfrac{1}{2}\varphi_0^2 = \beta(\sigma - \sigma_0).$$

Für jede gleichmäßig-geänderte Bewegung innerhalb der Außenwelt müssen die Konstanten s_0, v_0 und b bezw. σ_0, φ_0 und β durch Versuche bestimmt werden, wobei man allerdings die Bestimmung von s_0 bezw. σ_0 meist durch eine passende Wahl des Nullpunktes für die Stellungszahlen sparen kann.

10. Die Beschleunigung in einem bestimmten Zeitpunkte bezw. in einem bestimmten Punkte der Bahn. Ist eine ungleichförmige Bewegung nicht gleichmäßig geändert, so muß man die Beschleunigung für jeden Zeitpunkt bezw. für den zugehörigen Bahnpunkt bestimmen und zwar aus der Durchschnittsbeschleunigung durch einen Grenzübergang genau so, wie die Geschwindigkeit aus der Durchschnittsgeschwindigkeit bestimmt wurde.

Unter der Beschleunigung zur Zeit t bezw. in dem durch t bestimmten Bahnpunkte P versteht man demnach den Grenzwert[1]) der Durchschnittsbeschleunigung ($lim\, \tau = 0$) für ein Bahnstück bei t bezw. bei P.

Bezeichnet man die Beschleunigung durch j, so ist:

$$\left. j = lim\left[\frac{v - v'}{\tau}\right]_{\tau=0} \quad \text{oder} \quad j = lim\left[\frac{v'' - v}{\tau}\right]_{\tau=0} \right\} \quad . \quad . \quad 26)$$

Man hat also j genau so als Ableitung von v zu bestimmen, wie man v als Ableitung von s bestimmt[1]).

Ist

$$s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3,$$

so ist zunächst:

$$v = a_1 + 2 a_2 t + 3 a_3 t^2$$

und dann:

$$j = 2 a_2 + 6 a_3 t.$$

Da man j aus s durch zwei einander folgende Ableitungen gewinnt, so nennt man j auch die zweite Ableitung von s.

Diese Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf Verschiebungen und Drehungen von Körpern übertragen.

Bei Drehungen kann man auch die Beschleunigung j auf die Einheit reduzieren, d. h. $\frac{j}{r} = \iota$ bilden. Man nennt dann ι die (veränderliche) Winkelbeschleunigung zur Zeit t bezw. im Punkte P (= Beschleunigung auf dem Einheitskreise).

Mit der Bestimmung der Beschleunigung für jeden Zeitpunkt t ist die etwa vorhandene Abweichung einer gegebenen Bewegung

[1]) Vergl. die Anmerkung auf S. 56.

von der gleichförmigen, dem Zeitenflusse entsprechenden Bewegung dargestellt.

11. Die erste und die zweite Annäherung für eine beliebige Bewegung.

Die Formeln für die gleichförmige Bewegung lauten:

1. Stellungsgleichung: $s = s_0 + ct$
2. Geschwindigkeitsgleichung: $v = c$
3. Beschleunigungsgleichung: $j = 0.$

Im besonderen gilt für Drehungen:

1. $\sigma = \sigma_0 + \gamma t$
2. $\varphi = \gamma$
3. $\iota = 0.$

Die Formeln für die gleichmäßig-geänderte Bewegung lauten:

1. Stellungsgleichung: $s = s_0 + v_0 t + \frac{b}{2} t^2$
2. Geschwindigkeitsgleichung: $v = v_0 + bt$
3. Beschleunigungsgleichung: $j = b$
4. Verbindungsgleichung: $\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = b(s - s_0)$

Im besonderen gilt für Drehungen:

1. $\sigma = \sigma_0 + \varphi_0 t + \frac{\beta}{2} t^2$
2. $\varphi = \varphi_0 + \beta t$
3. $\iota = \beta$
4. $\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi_0^2 = \beta(\sigma - \sigma_0).$

. . . 27)

Die Winkelgrößen, welche durch griechische Buchstaben bezeichnet sind, entstehen stets aus den entsprechenden Lineargrößen, welche durch lateinische Buchstaben bezeichnet sind, durch Reduktion auf die Einheit, so daß $\frac{s}{r} = \sigma$, $\frac{v}{r} = \varphi$ u. s. w. ist. Man hat also nur die Hauptgleichungen Glied für Glied durch r zu dividieren, um die Gleichungen für Bewegungen auf dem Einheitskreise zu erhalten.

Obige Gleichungen sollen unter dem Namen Bewegungsgleichungen zusammengefaßt werden.

Man schreibt die Bewegungsgleichungen, welche für die Zeit $0 \ldots t$ aufgestellt sind, leicht für die Zeit $t' \ldots t$ oder $t \ldots t''$ um, wobei man zweckmäßig $t - t'$ oder $t'' - t$ durch z bezw. τ bezeichnet.

Für die gleichförmige Bewegung führt $s = s_0 + ct$ und $s' = s_0 + ct'$ zu der bereits bekannten Gleichung $s - s' = c(t - t')$.

Bei der gleichmäßig-geänderten Bewegung hat man z. B.:

$$s'' - s = v_0(t'' - t) + \frac{b}{2}(t''^2 - t^2)$$

und für $t'' - t = \tau$ demnach:

$$s'' - s = v_0 \tau + \frac{b}{2}(2 t \tau + \tau^2)$$

$$= \tau (v_0 + b t) + \frac{b}{2} \tau^2$$

$$= \tau v + \frac{b}{2} \tau^2,$$

d. h. es gilt:

$$s'' = s + v \tau + \frac{b}{2} \tau^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 27\,\text{a)}$$

Ebenso hat man:

$$v'' = v + b \tau \quad \ldots \ldots \ldots \quad 27\,\text{b)}$$

Der Vollständigkeit wegen mag auch noch die früher (S. 63) schon erwähnte Verbindungsgleichung hinzugefügt werden:

$$\tfrac{1}{2} v''^2 - \tfrac{1}{2} v^2 = b (s'' - s) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 27\,\text{c)}$$

Diese Umschreibung der Hauptformeln für die Zeit $t' \ldots t$ oder $t \ldots t''$ leistet gute Dienste, wenn man die Bewegung bei einem bestimmten Zeitpunkte t, dem ein bestimmter Bahnpunkt P entspricht, zu untersuchen hat.

Alle diese Formeln sind von weittragender Bedeutung, weil jede ungleichförmige Bewegung für ein Zeitelement in erster Annäherung als gleichförmig und weil jede ungleichförmige Bewegung, welche nicht gleichmäßig-geändert ist, für ein Zeitelement in zweiter Annäherung als gleichmäßig-geändert angesehen werden darf.

Für die erste Annäherung giebt die gleichmäßig-geänderte Bewegung selbst das einfachste Beispiel. Für sie wurde der Weg (S. 63) angenähert als w_u berechnet, indem man jedes Bahnstück mit der zugehörigen Anfangsgeschwindigkeit ganz durchlaufen dachte, er wurde angenähert als w_0 berechnet, indem man jedes Bahnstück mit der zugehörigen Endgeschwindigkeit ganz durchlaufen dachte. Der Fehler betrug im ersten Falle $-\frac{1}{2} b t \tau$ und im zweiten Falle $+\frac{1}{2} b t \tau$. Eine Grenzbetrachtung führte von w_u und w_0 gemäß der Gleichung $w_u < w < w_0$ zu dem genauen Werte w.

Für ein Bahnstück, das in ein Element übergehen soll, gilt folgendes. Seine Anfangsgeschwindigkeit ist zugleich die Endgeschwindigkeit des vorangehenden, seine Endgeschwindigkeit zugleich die Anfangsgeschwindigkeit des folgenden Bahnstückes. Bezeichnet man also die Geschwindigkeit zur Zeit t mit v, so läßt sich jedes der beiden, bei t gelegenen Bahnstücke (vor und hinter P) angenähert durch $v \tau$ darstellen, wobei τ eine angebbare, im Vergleich zu den Konstanten der Bewegungsgleichungen sehr kleine Dauer bedeutet.

Im allgemeinen hat man τ so klein zu wählen, daß der Fehler für $v \tau$ außerhalb der Genauigkeitsgrenze der Rechnung (z. B. für fünf Decimalen) liegt.

Für

$$s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

und

$$v = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

hat man:

$$v\tau = (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2)\tau.$$

Dagegen ist:

$$P'P = s - s' = (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2)\tau - (a_2 + 3a_3 t)\tau^2 + a_3 \tau^3$$

und

$$PP'' = s'' - s = (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2)\tau + (a_2 + 3a_3 t)\tau^2 + a_3 \tau^3.$$

Es wird also sowohl $P'P$ als auch $P''P$ durch $v\tau$ nur soweit genau dargestellt, als erste Potenzen von τ in Frage kommen, während $P'P$ und $P''P$ in den höheren Potenzen von τ gegen $v\tau$ Abweichungen zeigen. Darum nennt man diese Darstellung eine erste Annäherung.

Was unser Beispiel lehrt, gilt ganz allgemein.

Wählt man τ so klein, daß die Glieder mit τ^2, τ^3, ... außerhalb der Genauigkeitsgrenze der Rechnung liegen, so ersetzt die erste Annäherung den genauen Wert.

Stellt man eine Reihe aufeinander folgender Bahnstücke, welche den Zeitpunkten t, $t + \tau$, ..., $t + n\tau$ entsprechen, in erster Annäherung dar, so kann man, wie das Beispiel der gleichmäßig-geänderten Bewegung zeigt, durch einen Grenzübergang einen genauen Wert ableiten für den Weg.

Dieselbe Unbestimmtheit, welche in der Verwendung von v für $P'P$ oder $P''P$ liegt, zeigt sich auch bei der Herstellung von v aus j, da sowohl $\frac{v - v'}{\tau}$ als auch $\frac{v'' - v}{\tau}$ beim Grenzübergange zu j führen und demnach $v - v' = j\tau$ und $v'' - v = j\tau$ gleichberechtigte Annäherungen sind. Diese Unbestimmtheit verschwindet aber bei der Herstellung der zweiten Annäherung, für welche wir die Verbindungsgleichung $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v'^2 = j \cdot \overline{w}$ benutzen.

Hier ist angenähert:

$$P'P = \frac{1}{2}\frac{(v + v')(v - v')}{j} = \frac{v + v'}{2} \cdot \tau$$

und

$$PP'' = \frac{1}{2}\frac{(v'' + v)(v'' - v)}{j} = \frac{v'' + v}{2} \cdot \tau.$$

Für

$$s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

ist

$$v = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

und

$$j = 2a_2 + 6a_3 t.$$

Man hat:

$$\frac{v + v'}{2} = a_1 + 2a_2 \frac{t + t'}{2} + 3a_3 \frac{t^2 + t'^2}{2}$$

und erhält für $t' = t - \tau$ in Annäherung:

$$P'P = \frac{v + v'}{2} \cdot \tau = (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2)\tau - (a_2 + 3a_3 t)\tau^2 + \frac{3}{2}a_3 \tau^3.$$

Ebenso ist in Annäherung:

$$PP'' = \frac{v'' + v}{2} \cdot \tau = (a_1 + 2\,a_2\,t + 3\,a_3\,t^2)\tau + (a_2 + 3\,a_3\,t)\tau^2 + \frac{3}{2}\,a_3\,\tau^3.$$

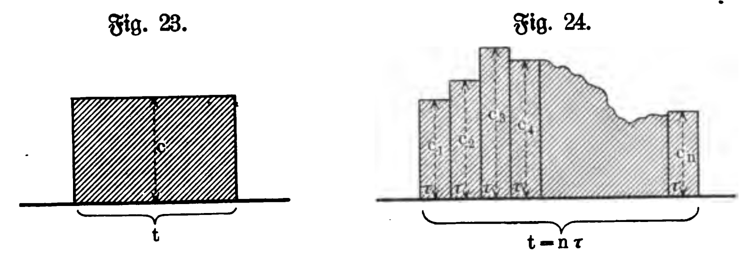
Hier wird also $P'P$ und $P''P$ soweit genau (vergl. S. 68 oben) dargestellt, als erste und zweite Potenzen von τ in Frage kommen. Darum nennt man diese Darstellung eine zweite Annäherung.

Was unser Beispiel lehrt, gilt ganz allgemein.

Wählt man τ so klein, daß die Glieder mit τ^3, τ^4, ... außerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Rechnung liegen, so ersetzt die zweite Annäherung den genauen Wert.

12. Der graphische Zusammenhang der Größen s, v, j bei beliebigen Bewegungen. 1. Die Formel der gleichförmigen Bewegung $w = c\,.\,z$ oder $s = s_0 + ct$ stellt den Weg w oder $s - s_0$ als Produkt aus den Maßzahlen der Geschwindigkeit und der zugehörigen Zeitdauer dar. Dieses Produkt läßt sich (vergl. Fig. 23) als Rechteck veranschaulichen, so daß also die Maßzahl der Fläche des Rechteckes den Weg $w = s - s_0$ darstellt.

Fig. 23. Fig. 24.



Diese graphische Darstellung läßt sich auf beliebige Bewegungen ausdehnen. Teilt man bei einer solchen die Zeit t in n Teile von der gleichen Dauer τ und entsprechen dieser Einteilung die Stellungen s_0, s_1, ..., s_n, so sind $\frac{s_1 - s_0}{\tau} = c_1$, $\frac{s_2 - s_1}{\tau} = c_2$, ..., $\frac{s_n - s_{n-1}}{\tau} = c_n$ die Durchschnittsgeschwindigkeiten für die einzelnen aufeinander folgenden Zeitabschnitte von der Dauer τ. Durch Addition der Gleichungen für c_1, c_2, ..., c_n erhält man:

$$\frac{s_n - s_0}{\tau} = c_1 + c_2 + \cdots c_n$$

oder

$$w = s_n - s_0 = c_1\,\tau + c_2\,\tau + \cdots c_n\,\tau.$$

Hiernach läßt sich $w = s_n - s_0$ als eine Summe von Rechtecken darstellen, wie es Fig. 24 zeigt.

Je kleiner man τ annimmt, um so näher rücken die Teilpunkte auf der Bahn aneinander und um so mehr nähern sich die Durchschnittsgeschwindigkeiten den Geschwindigkeiten in den einzelnen Bahnpunkten. Denkt man daher mit Hülfe der Geschwindigkeitsgleichung zu jedem Zeitpunkte im Verlaufe der Zeit 0 ... t die Geschwindigkeit v bestimmt und trägt man die zusammen-

gehörigen Werte von t und v als Abscissen und Ordinaten auf, so stellt die damit bestimmte Fläche den Weg $w = s - s_0$ dar, wie es Figur 25 zeigt.

Die begrenzende Linie mag Geschwindigkeit-Zeitlinie heißen und die zugehörige Fläche mag durch $F_0^t(v \perp t)$ bezeichnet werden.

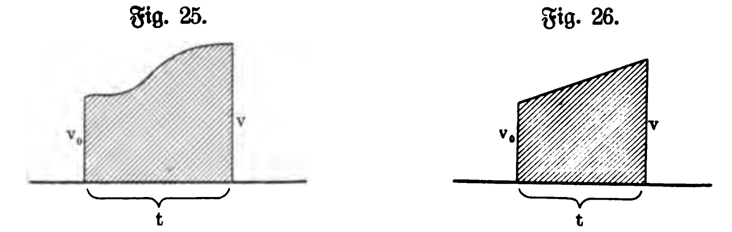
Demgemäß gilt der Satz: Die Stellungsänderung (Weg) wird bei jeder Bewegung durch die entsprechende Fläche der Geschwindigkeit-Zeitlinie dargestellt.

Ist die Geschwindigkeit-Zeitlinie für irgend eine Bewegung zeichnerisch gegeben (z. B. durch Registrierapparate), so ist deren Fläche zum mindesten in Annäherung berechenbar.

Zerlegt man die Fläche (senkrecht zu t) in n Streifen von gleicher Breite τ, so kann man diese Streifen, der ersten Annäherung entsprechend, entweder gemäß den Anfangsgeschwindigkeiten oder gemäß den Endgeschwindigkeiten, also in doppelter Weise, als Rechtecke berechnen. Faßt man die Streifen als Trapeze auf $\left(\frac{v_0 + v_1}{2} \cdot \tau \text{ u. s. w.}\right)$, so benutzt man die zweite Annäherung.

Außerdem ist noch eine angenäherte Berechnung üblich, welche man als Simpsonsche Regel zu bezeichnen pflegt. Sie beruht darauf, daß man

Fig. 25. Fig. 26.



die Fläche (senkrecht zu t) in eine grade Anzahl (n) von gleich breiten Streifen zerlegt und die Geschwindigkeit-Zeitlinie durch Parabelbogen ersetzt. Nennt man die Geschwindigkeiten der Teilpunkte $v_0, v_1, \ldots, v_n$, so giebt diese Annäherung:

$$F_0^t(v \perp t) = \frac{1}{3n}\left[v_0 + v_n + 4(v_1 + v_3 + \cdots v_{n-1}) + 2(v_2 + v_4 + \cdots v_{n-2})\right] \cdot t.$$

Für die Berechnung solcher Flächen dienen auch eigene Apparate, welche Integratoren oder im besonderen Planimeter heißen.

Handelt es sich um den Weg, welcher der Zeit $t' \ldots t$ entspricht, so hat man:

$$F_{t'}^t(v \perp t) = F_0^t(v \perp t)' - F_0^{t'}(v \perp t).$$

Für die gleichmäßig-geänderte Bewegung ist die zweite Annäherung (Trapez) eine genaue Darstellung, weil hier die Geschwindigkeit-Zeitlinie eine zur Zeitachse geneigte Gerade ist (vergl. Fig. 26).

Da $v = v_0 + bt$ gilt, so ist $v - v_0$ stets proportional zu $t - 0$.

Man hat:

$$F_0^t(v \perp \tau) = \frac{v_0 + v}{2} t = v_0 t + \frac{b}{2} t^2 = s - s_0 = w.$$

Für die gleichförmige Bewegung ist die erste Annäherung (Rechteck) eine genaue Darstellung, weil hier die Geschwindigkeit-Zeitlinie eine zur Zeitachse parallele Gerade ist ($v = c$).

2. Genau dieselben Überlegungen gelten für die Geschwindigkeitsänderung, falls man die Beschleunigung-Zeitlinie zeichnet. Man hat:

$$v - v_0 = F_0^t(j \perp t).$$

Die Geschwindigkeitsänderung wird bei jeder Bewegung durch die entsprechende Fläche der Beschleunigung-Zeitlinie dargestellt.

Für die gleichmäßig-geänderte Bewegung ist diese Linie eine Parallele zur Zeitachse ($j = b$), für die gleichförmige Bewegung ist diese Linie die Zeitachse selbst ($j = 0$).

3. Auch die Verbindungsgleichung der gleichmäßig-geänderten Bewegung führt zu einer graphischen Darstellung, welche für jede ungleichförmige Bewegung gültig ist.

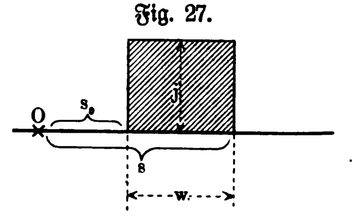
Die rechte Seite der Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = b(s - s_0) = b \,.\, w$$

läßt sich, wie Fig. 27 zeigt, als Rechteck darstellen.

Zerlegt man nun bei irgend einer ungleichförmigen Bewegung die Zeit t in n gleiche Teile von der Dauer τ, so zerfällt der entsprechende Weg in die ungleichen Stücke $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Nennt man die Geschwindigkeiten, welche den einzelnen Zeitpunkten der Einteilung entsprechen, der Reihe nach $v_0, v_1, \ldots, v_n$, so wird w_1 mit der Geschwindigkeit v_0 betreten und mit der Geschwindigkeit v_1 verlassen, w_2 mit der Geschwindigkeit v_1 betreten und mit der Geschwindigkeit v_2 verlassen u. s. f.

Fig. 27.



Für den besonderen Fall, daß die einzelnen Stücke $w_1, w_2, \ldots, w_n$ in gleichmäßig-geänderten Bewegungen bezw. mit den Beschleunigungen $\frac{v_1 - v_0}{\tau} = b_1, \frac{v_2 - v_1}{\tau} = b_2, \ldots, \frac{v_n - v_{n-1}}{\tau} = b_n$ durchlaufen werden, gilt in aller Strenge:

$$\tfrac{1}{2} v_1^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = b_1 w_1$$
$$\tfrac{1}{2} v_1^2 - \tfrac{1}{2} v_1^2 = b_2 w_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\tfrac{1}{2} v_n^2 - \tfrac{1}{2} v_{n-1}^2 = b_n w_n$$

und es ergiebt sich bei Addition sämtlicher Gleichungen:

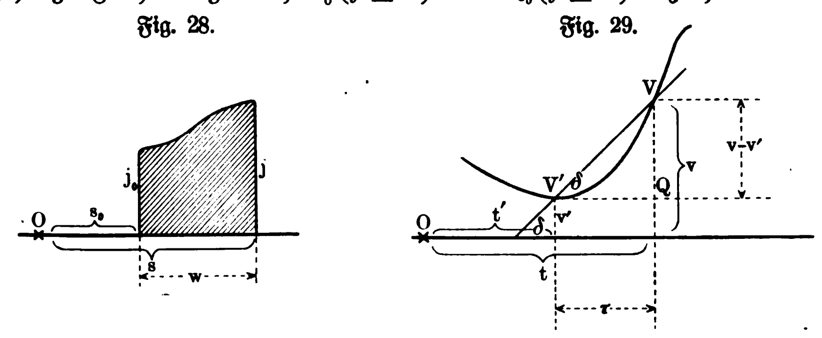
$$\tfrac{1}{2} v_n^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \cdots b_n w_n.$$

Die rechte Seite der so entstandenen Gleichung stellt eine Summe von Rechtecken dar, wie es Fig. 24 für $c_1 \tau + c_2 \tau + \cdots c_n \tau$ veranschaulicht. Von diesem besonderen Falle aus läßt sich nun ein Schluß für jede

ungleichförmige Bewegung machen. Je kleiner man τ annimmt, um so näher rücken die Teilpunkte auf der Bahn aneinander und um so mehr nähern sich die Durchschnittsbeschleunigungen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ den Beschleunigungen (j) in den einzelnen Bahnpunkten. Demnach kann bei einem Grenzübergange ($\lim \tau = 0$) thatsächlich jede Bewegung als eine Kette von verschiedenen, aneinander schließenden gleichmäßig-geänderten Bewegungen angesehen werden, wie es auch die oben behandelte zweite Annäherung zeigt.

Trägt man also bei einer ungleichförmigen Bewegung die zusammengehörigen Werte von s und j als Abscissen und Ordinaten auf, so stellt die damit bestimmte Fläche (vergl. Fig. 28) die Größe $\frac{1}{2} v_n^2 - \frac{1}{2} v_0^2$ dar. Die begrenzende Linie mag Beschleunigung-Weglinie heißen und die zugehörige Fläche mag durch $F_0^t\,(j \perp w)$ oder $F_{s_0}^s\,(j \perp w)$ bezeichnet werden.

Fig. 28. Fig. 29.



Demgemäß gilt der Satz: Die Änderung des halben Quadrates der Geschwindigkeit wird bei jeder Bewegung durch die entsprechende Fläche der Beschleunigung-Weglinie dargestellt.

Für die gleichmäßig-geänderte Bewegung ($j = b$) ist diese Linie eine Parallele zur Wegachse, für die gleichförmige Bewegung ($j = 0$) ist diese Linie die Wegachse selbst.

4. Die Geschwindigkeit-Zeitlinie (vergl. 1.) veranschaulicht auch die Beschleunigung und zwar durch die Tangente des Neigungswinkels ihrer Tangente gegen die Zeitachse.

Ist v' die Geschwindigkeit zur Zeit t' und v die Geschwindigkeit zur Zeit t, so hat (vergl. Fig. 29) die Sekante $V'V$ die Neigung δ gegen die Zeitachse und es gilt:

$$tang\,\delta = \frac{VQ}{QV'} = \frac{v - v'}{\tau}.$$

Je näher V' beim Grenzübergange ($\lim \tau = 0$) an V heranrückt, um so näher rückt auch die Sekante $V'V$ an die Tangente in V heran, und man hat:

$$\lim \left[\frac{v - v'}{\tau}\right]_{\tau = 0} = j = tang\,\tau,$$

falls man die Winkel der Tangente in V gegen die Zeitachse mit τ bezeichnet.

Da $tang\,\tau$ eine reine Zahl ist, während j in $\frac{\mathrm{m}}{(\mathrm{sec})^2}$ gemessen wird, so

müssen in der Zeichnung für sec (horizontal) und $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ (vertikal) gleiche Strecken verwendet werden, wenn $tang\,\tau$ ohne weiteres die Beschleunigung darstellen soll.

5. Bildet man auch noch die Weg-Zeitlinie, so veranschaulicht uns diese die Geschwindigkeit durch die Tangente des Neigungswinkels ihrer Tangente gegen die Zeitachse. Hier gilt:

$$lim \left[\frac{s - s'}{\tau}\right]_{\tau = 0} = v = tang\,\tau.$$

In der Zeichnung müssen für sec (horizontal) und m (vertikal) gleiche Strecken verwendet werden, wenn $tang\,\tau$ ohne weiteres die Geschwindigkeit darstellen soll.

13. Der rechnerische Zusammenhang der Größen s, v, j bei beliebigen Bewegungen. Aus s wird v und aus v wird j durch Ableitung gewonnen.

Umgekehrt wird v aus j und s aus v gewonnen, indem man das Verfahren der Ableitung rückgängig macht.

Unseren Beispielen entspricht für diese beiden Übergänge folgende Doppeltabelle:

1. Übergang von der Stammfunktion zur Ableitung[1]).

Stammfunktion	Konstante	t^p	$sin\,(m\,t)$	$cos\,(m\,t)$	$e^{m\,t}$
Ableitung	Null	$p\,t^{p-1}$	$+ m\,cos\,(m\,t)$	$- m\,sin\,(m\,t)$	$m\,e^{m\,t}$

2. Übergang von der Ableitung zur Stammfunktion[1]).

Ableitung	Null	t^p	$sin\,(m\,t)$	$cos\,(m\,t)$	$e^{m\,t}$
Stammfunktion	Konstante	$\frac{t^{p+1}}{p+1}$	$-\frac{cos\,(m\,t)}{m}$	$+\frac{sin\,(m\,t)}{m}$	$\frac{e^{m\,t}}{m}$

Für endliche Summen und Differenzen werden beide Übergänge ausgeführt, indem man sie an den einzelnen Posten vornimmt.

Zu bemerken ist noch, daß die Bestimmung der Ableitung aus der Stammfunktion vollständig ist, während die umgekehrte Bestimmung nur bis auf eine Konstante gelingt. Hat man z. B.: $s = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2$, so ergiebt sich vollständig: $v = a_1 + 2\,a_2\,t$. Aus $v = a_1 + 2\,a_2\,t$ folgt dagegen $s =$ Konstante $+ a_1\,t + a_2\,t^2$, und die Lücke, welche das Wort Konstante bezeichnet, läßt sich nur ausfüllen, wenn der Wert der Konstanten außerdem gegeben ist. In unserem Falle erhält man $s =$ Konstante für $t = 0$, d. h. die Konstante füllt hier die Lücke für s_0 aus, so daß die vollständige Bestimmung von s auch die Angabe des Wertes von s_0 erfordert.

Diese Bemerkung entspricht dem Umstande, daß auch bei den graphischen Darstellungen des § 12 nur $s - s_0$, $v - v_0$, $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$ gegeben wurden,

[1]) Hier bedeutet p eine ganze positive Zahl, m eine beliebige Zahl.

so daß s, v, $\frac{1}{2}v^2$ erst vollständig bestimmt sind, wenn die Werte für s_0, v_0, $\frac{1}{2}v_0^2$ außerdem zur Verfügung stehen.

14. Weitere Bemerkungen zu den §§ 11, 12, 13. Mehrfach wurden von Beispielen Vorschriften abgeleitet und dann die Bemerkung hinzugefügt, daß diese Vorschriften allgemein Geltung haben. Zur Rechtfertigung dieser Bemerkung mag noch angeführt werden, daß die gebräuchlichen Funktionen von t, welche für s, v, j vorkommen, eine bestimmte Darstellung zulassen, welche den Namen Taylor'scher Lehrsatz führt. Bezeichnet man die Ableitung von $f(t)$ durch $f'(t)$, die Ableitung von $f'(t)$ durch $f''(t)$ u. s. w., so gilt $f(t+\tau) = f(t) + \frac{\tau}{1} f'(t) + \frac{\tau^2}{1.2} f''(t) + \frac{\tau^3}{1.2.3} f'''(t) + \cdots$

Für $s = f(t)$ ist $v = f'(t)$, d. h. man hat:

$$s'' - s = \tau . v + \tau^2 [\tfrac{1}{2} f''(t) + \cdots]$$

und demnach ist $\tau . v$ eine erste Annäherung für $s'' - s$.

Für $s = f(t)$ ist $f''(t) = j$, d. h. man hat:

$$s'' - s = \tau . v + \frac{\tau^2}{2} \cdot j + \tau^3 [\tfrac{1}{6} f'''(t) + \cdots]$$

und demnach ist $\tau . v + \frac{1}{2} j \tau^2$ eine zweite Annäherung für $s'' - s$, welche sich auch $\tau \cdot \frac{2v + j\tau}{2} = \tau \cdot \frac{v + (v + j\tau)}{2} = \tau \cdot \frac{v + v''}{2}$ schreiben läßt.

In der sogenannten Differential- und Integralrechnung werden Elemente durch das Zeichen d für das Auge kenntlich gemacht, so daß dt, ds, dv Zeitelement, Wegelement, Geschwindigkeitselement bezeichnen.

In dieser Bezeichnung ist für $s = f(t)$:

$$1. \quad v = \frac{ds}{dt} = f'(t),$$

$$2. \quad j = \frac{dv}{dt} = f''(t).$$

Multipliziert man 1. und 2. kreuzweise miteinander, so erhält man noch:

$$3. \quad v\frac{dv}{dt} = j\frac{ds}{dt} \quad \text{oder} \quad v\,dv = j\,ds.$$

Benutzt man auch noch das Zeichen $\int$ der Differential- und Integralrechnung, um den Übergang von der Ableitung zum Stamm zu bezeichnen, so folgt aus 1:

$$s = \text{Konstante} + \int v \,.\, dt$$

und aus 2:

$$v = \text{Konstante} + \int j \,.\, dt$$

und aus 3:

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \text{Konstante} + \int j \,.\, ds.$$

Die Formeln der Differential- und Integralrechnung, welcher die strengen Beweise für die hier gegebenen Vorschriften zukommen, gestatten, die Tabellen des § 13 sehr erheblich zu erweitern.

15. Die Dimensionen der phoronomischen Größen. Kennzeichnet man allgemein die Einheit der Länge durch l und die Einheit der Zeitdauer durch t, so hat jede Linie (Weg) die Dimension l^1, jede Fläche die Dimension l^2, jedes Volumen die Dimension l^3, während der Winkel, als Arcus dargestellt oder durch Sinus, Kosinus u. s. w. gemessen, als reine Zahl erscheint und demnach die Dimension l^0 hat.

Man hat ferner für die (Linear-)Geschwindigkeit $= \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$ die Dimension $\frac{l}{t} = l^1 \,.\, t^{-1}$, für die (Linear-) Beschleunigung $= \frac{\text{Geschwindigkeit}}{\text{Zeit}}$ die Dimension $\frac{l^1 \,.\, t^{-1}}{t} = l^1 \,.\, t^{-2}$.

Endlich hat der Winkelweg die Dimension l^0, die Winkelgeschwindigkeit die Dimension $l^0 t^{-1}$, die Winkelbeschleunigung die Dimension $l^0 t^{-2}$.

16. Die Bedeutung der Konstanten in den Bewegungsgleichungen. Aus der Homogeneität einer Gleichung folgt für $s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$, daß jedes Glied der rechten Seite eine Länge darstellen muß, weil die linke Seite eine Länge darstellt. Es ist also a_0 eine Länge (s_0). Ebenso ist $a_1 t$ eine Länge, also a_1 von der Dimension $\frac{l}{t}$, also eine Geschwindigkeit. Ebenso ist $a_2 t^2$ eine Länge, also a_2 von der Dimension $\frac{l}{t^2}$, also eine Beschleunigung.

Aus $v = a_1 + 2 a_2 t + \cdots$ folgt $v = a_1$ für $t = 0$, d. h. a_1 bedeutet die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$.

Aus $j = 2 a_2 + \cdots$ folgt $j = 2 a_2$ für $t = 0$, d. h. a_2 bedeutet die halbe Beschleunigung ($\frac{1}{2} j_0$) zur Zeit $t = 0$.

Bei Bewegungen der Außenwelt müssen diese Konstanten durch Beobachtung (und Versuch) bestimmt werden.

Das klassische Beispiel für ihre Bestimmung ist der freie Fall bezw. die Bewegung auf der schiefen Ebene (Galilei).

Schließlich mag noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß eine Stellungsgleichung von der Form $s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$ als Summe der Gleichungen $s_0 = a_0$, $s_1 = a_1 t$, $s_2 = a_2 t^2$, $s_3 = a_3 t^3, \ldots$ aufgefaßt werden kann und daß demnach auch die entsprechende Bewegung aus einer gleichförmigen Bewegung ($s_1 = a_1 t$), einer gleichmäßig-geänderten Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit ($s_2 = a_2 t^2$), eine Bewegung von der Form $s_3 = a_3 t^3$, u. s. f. zusammengesetzt gedacht werden darf.

Zweites Kapitel.

Die Richtungsgrößen der Phoronomie.

17. Das Princip der Beharrung (Trägheit) und die Urbewegung. Für die Bewegungen in der Außenwelt gilt (vergl. Einleitung, S. 6 u. 7) die grundlegende Auffassung: Die Bewegung ist ihrem Wesen nach gleichförmig und geradlinig.

Diese Auffassung, welche man als Princip der Beharrung (Trägheit) zu bezeichnen pflegt, giebt für die weitere Untersuchung von Bewegungen der Außenwelt folgende Gesichtspunkte:

1. Eine gleichförmige Bewegung auf gerader Linie ist, lediglich als Bewegung betrachtet[1]), einer Erklärung weder fähig noch bedürftig, so daß auch ihr unverändertes Fortbestehen (Beharrung) als selbstverständlich gilt.

2. Jede Änderung des Geschwindigkeitswertes und jede Richtungsänderung, welche man bei einer Bewegung beobachtet, bedarf einer besonderen Erklärung und zwar sind dabei die Ursachen solcher Bewegungsänderungen nicht in der bestehenden Bewegung zu suchen.

Erläuterung des Princips an Beispielen aus den Lehrbüchern der Physik.

Als besondere Arten der Bewegungsänderung erscheinen zunächst der Übergang aus der Ruhe in die Bewegung und aus der Bewegung in die Ruhe, bei denen die Geschwindigkeit vom Werte 0 ansteigt oder zum Werte 0 sinkt. Da aber überhaupt bei der Änderung einer Bewegung, welche dem Übergange der Geschwindigkeit von v' in v entspricht, nicht das Fortbestehen von v' oder v, sondern die Geschwindigkeitsänderung $v - v'$ zu erklären ist, so handelt es sich hierbei für $v > v'$ um den Übergang von $v' + 0$ zu $v' + (v - v')$, d. h. von 0 zu $v - v'$ und für $v < v'$ um den Übergang von $v + (v' - v)$ zu $v + 0$, d. h. von $v' - v$ zu 0.

Da die gleichförmige Bewegung auf einer Geraden gemäß dem Principe der Beharrung zu allen anderen Bewegungsarten in Gegensatz tritt, so rechtfertigt es sich, sie durch einen besonderen Namen auszuzeichnen, sie mag Urbewegung heißen.

---

[1]) Das Gleichgewicht der Kräfte, dem eine solche Bewegung entspricht, liegt hier noch außerhalb der Betrachtung.

Eine bestimmte Urbewegung eines Punktes W ist vollständig gegeben, wenn man die Lage zweier Punkte P' und P seiner Bahn und die entsprechenden Zeitpunkte t' und t kennt. Die Punkte geben die Lage der Geraden im Raume, auf der die Bewegung mit der Geschwindigkeit $c = \frac{P'P}{t - t'}$ vor sich geht. Nimmt man auf der Bahn einen bestimmten Punkt O zum Nullpunkte und mißt man dann $OP' = s'$ und $OP = s$, so ist:

$$s - s' = c\,(t - t'), \text{ d. h. } s = \underbrace{(s' - ct')}_{s_0} + ct$$

die Stellungsgleichung der Bewegung.

Denkt man P' näher und näher bei P gelegen, so tritt schließlich das $P'P$ entsprechende Bahnelement an die Stelle des Bahnstückes $P'P$. Demnach ist eine Urbewegung durch ein Bahnelement und das zugehörige Zeitelement vollständig bestimmt, unter der Voraussetzung, daß diese Elemente auch ihrer Lage nach gegeben sind. Durch das Verhältnis der beiden Elemente wird die Geschwindigkeit c, durch die Lage des Bahnelementes wird die Lage von P und die Richtung der Bewegung, durch die Stellung t die Beziehung der Bewegung zum Flusse der Zeit gegeben.

Man kann diese Überlegung auf eine beliebige Bewegung übertragen, wenn man sie in erster Annäherung betrachtet und von dieser aus durch einen geeigneten Grenzübergang zu einer genaueren Darstellung fortschreitet.

18. Die Geschwindigkeit als Vektor und der Hodograph einer beliebigen Bewegung. Dreht sich irgend eine Sekante $P'P$ der Bahn um P so, daß sich P' nach P hin bewegt, so geht die Sekante in die Tangente von P über, wenn P' mit P zusammenfällt. Zieht man also in einem Punkte P der Bahn die Tangente, so bestimmt diese im Verein mit dem Sinne $P'P$ die augenblickliche Richtung der Bewegung, für welche die P entsprechende Geschwindigkeit v während eines Zeitelementes maßgebend ist. Infolgedessen gilt der Satz: Jede Bewegung läßt sich für ein Zeitelement bezw. auf einem Bahnelemente als Urbewegung auffassen.

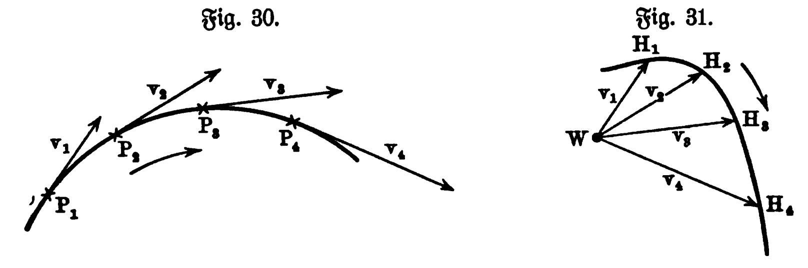
Trägt man auf der Tangente in P, der augenblicklichen Richtung der Bewegung folgend, von P aus eine Strecke ab, deren Maßzahl mit der Maßzahl der Geschwindigkeit v in P übereinstimmt, so kennzeichnet diese Strecke, als Vektor (vergl. Einleitung, S. 24) aufgefaßt, die dem Punkte P entsprechende Urbewegung. Infolgedessen faßt man die Geschwindigkeit, welche bisher nur eine bestimmte Zahl von besonderen Größeneinheiten $\left(\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)$ war, selbst als Vektor auf, indem man ihr den Punkt P, dem sie entspricht, als Ursprung, die augenblickliche Richtung der Bewegung in P als Richtung und ihren Wert (v) als Länge giebt. Denkt man sich bei einer beliebigen Bewegung in jedem Punkte der Bahn die zugehörige Geschwindigkeit als

Vektor aufgetragen, so erhält man ein Gesamtbild von der Übereinstimmung und dem Unterschiede dieser Bewegung und der Urbewegung (vergl. Fig. 30).

Da diese erste Annäherung die Bewegung von Element zu Element als Urbewegung zeigt, so ist erst die zweite Annäherung für die Feststellung der Bewegungsänderung auf einem Elemente geeignet. Bei der zweiten Annäherung hat man zunächst zwei aufeinander folgende Bahnelemente, unter Berücksichtigung ihrer Lage im Raume, zu betrachten und dann für den Punkt, welcher beiden Elementen gemeinsam ist, einen Grenzübergang durchzuführen. Es handelt sich also hier zunächst um drei unendlich-nahe Punkte, welche zwar stets in einer Ebene, aber im allgemeinen nicht mehr, wie die beiden unendlich-nahen Punkte eines Elementes, auf einer Gerade liegen.

Da die Untersuchung der zweiten Annäherung ziemlich verwickelt ist, so ist es zweckmäßig, sie zunächst durch eine erste Annäherung von gleicher Genauigkeit zu ersetzen, indem man nicht die Stellungsgleichung und die

Fig. 30. Fig. 31.



Bahn, sondern die als Vektor aufgefaßte Geschwindigkeit zum Gegenstande der Betrachtung macht.

Dazu denkt man sich die Geschwindigkeit v zur Zeit t nicht, wie bisher, in dem Bahnpunkte P als Vektor haften, sondern in dem sich bewegenden Punkte W. Überträgt man die Geschwindigkeit als Vektor von jedem Bahnpunkte auf den sich bewegenden Punkt W, so bilden die Endpunkte dieser Vektoren, wie z. B. H_1, H_2, H_3, . . ., in Fig. 31 eine Linie, welche (nach Hamilton) der Hodograph der Bewegung genannt wird. Während W auf der Bahn (vergl. Fig. 31) von P_1 bis P_4 fortschreitet, schreitet der Endpunkt H von $[v]$ auf dem Hodographen von H_1 bis H_4 fort.

Strecken wie WH_1, WH_2, . . . zeigen sowohl die Änderung des Wertes von $[v]$ als auch die Änderung der Richtung von $[v]$ an.

Ehe wir uns einer Untersuchung des Hodographen zuwenden, müssen wir noch über die Bewegungen der Außenwelt weitere Aufschlüsse zu gewinnen suchen.

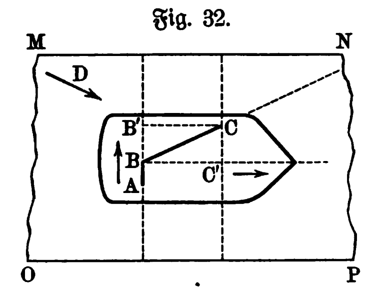
19. Beispiele für unstetige Bewegungsänderungen. Für die Erklärung von Bewegungsänderungen geben uns die Beobachtungen einmaliger, ziemlich rasch verlaufender Bewegungsänderungen einen Fingerzeig. Bei ihnen läßt sich sehr oft deutlich feststellen, daß die vorhandene Bewegung durch den Hinzutritt einer neuen Bewegung umgestaltet wird.

Beispiel: Gerade aufsteigender Rauch, den ein Windstoß faßt.

Wir betrachten zunächst einen solchen Vorgang etwas näher (vergl. Fig. 32).

Auf einem ruhenden, etwa in einem Kanale angeseilten Schiffe bewegt sich ein Gegenstand translatorisch und zwar gleichförmig auf gerader Linie, so daß einer seiner Punkte W in Bezug auf die festen Uferlinien MN und OP bezw. in Bezug auf die feste Kanalsohle auf der Geraden AB' fortschreitet. Kommt das Schiff während der Bewegung von W selbst translatorisch in Bewegung, etwa stromabwärts nach Lösung der Seile, und zwar gleichförmig in der Richtung BC', so wird die Bahn von W durch diese Bewegung in Bezug auf die feste Kanalsohle geändert. Setzt die Bewegung des Schiffes ein, wenn W auf AB' nach B gelangt ist, so verschiebt sich nun die Bahn von W gegen die feste Umgebung in der Zeit t um ein bestimmtes Stück BC', während W selbst in dieser Zeit t auf seiner Bahn um ein bestimmtes Stück BB' fortschreitet. Dabei erreicht W in Bezug auf die feste Umgebung den Punkt C und zwar, wie hier vorgreifend bemerkt werden mag, in geradliniger und gleichförmiger Bewegung.

Fig. 32.



Die Bewegung von W in Bezug auf die feste Umgebung ist also die gebrochene Linie ABC, und zwar wird die Strecke BC in der Zeit t durchlaufen. Diese Strecke ist die eine Diagonale des durch BB' und BC' gebildeten Parallelogramms und zwar die Diagonale mit dem Ursprunge B, d. h. der Weg BC der einen Bewegung setzt sich aus den Wegen BB' und BC' der zusammentretenden Bewegungen nach dem Parallelogrammgesetze (vergl. Einleitung, S. 25) zusammen. Giebt man t den Wert $1''$, so stellen BB' und BC die Geschwindigkeiten von W bezw. vor und nach dem Eintritte der Schiffsbewegung dar, während BC' die Geschwindigkeit des Schiffes darstellt. Sieht man diese Strecken als Vektoren an, so zeigt sich, daß auch die Geschwindigkeit der einen Bewegung aus den Geschwindigkeiten der zusammentretenden Bewegungen nach dem Parallelogrammgesetze erwächst. Denkt man W im Punkte B befindlich, so stellen die Punkte B' und C den Hodographen dar und deren Verbindungsstrecke $B'C$ ist die hinzugekommene Geschwindigkeit des Schiffes. Bezeichnend für unser Beispiel ist, daß dem Punkt W zu seiner ursprünglichen Bewegung durch Vermittelung des Schiffes eine zweite Bewegung mitgeteilt wird, welche sich mit der ersten Bewegung zu einer dritten Bewegung verbindet, und daß diese dritte Bewegung von der ersten in Richtung und Geschwindigkeit abweicht.

Es hat keine Schwierigkeit, eine weitere Änderung der Bewegung von W zu behandeln. Faßt z. B. der Wind das treibende Schiff in der Richtung D, so daß es translatorisch in gleichförmige Bewegung auf gerader Linie gerät, so erleidet die Bahn ABC eine neue Brechung der behandelten Art.

Andere passende Beispiele bieten Körper dar, welche durch Stöße (Schläge) in Bewegung gesetzt werden. Wird eine ruhende Kugel von homogenem Stoffe

so gestoßen, daß die Richtung des Stoßes durch ihren Mittelpunkt (Centralstoß) geht, so befindet sich dieser Mittelpunkt nach Beendigung des ziemlich verwickelten Stoßvorganges in Urbewegung. Denken wir uns W als Mittelpunkt einer homogenen Kugel, welche sich mit der Geschwindigkeit c_1 auf einer Geraden bewegt, so wird ein Centralstoß, dessen Richtung die Richtung der Bahn schneidet, den Punkt W auf eine andere Gerade drängen, auf der er sich dann (im allgemeinen) mit einer anderen Geschwindigkeit bewegt. Durch eine Reihe von solchen Stößen kann man dem Mittelpunkte W der Kugel einen Streckenzug als Bahn geben, dessen einzelne Seiten mit bestimmten (im allgemeinen unter sich ungleichen) Geschwindigkeiten durchlaufen werden.

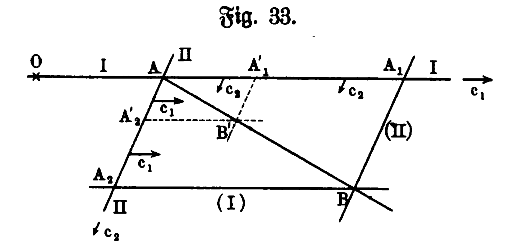
Weg und Geschwindigkeit erwächst für jede Seite des Streckenzuges aus der bereits vorhandenen und der neu hinzutretenden Geschwindigkeit gemäß dem Parallelogrammgesetze, wie es an dem Beispiele des Schiffes ($A\ B\ C$) ausführlich erläutert wurde.

Der Zusammensetzung entspricht eine Zerlegung, wenn man sich den Vorgang der Zusammensetzung wieder rückgängig gemacht denkt.

Physikalische Apparate zur Veranschaulichung des Parallelogramms der Wege und der Geschwindigkeiten.

20. Das Princip des Parallelogramms für Urbewegungen eines Punktes. Aus der Betrachtung derartiger Beispiele gewinnt man ein Princip für die Zusammensetzung (und Zerlegung) der Bewegungen in der Außenwelt. Für Urbewegungen kann man ihm folgende Fassung geben: Die einzelnen Bewegungen, welche sich zu einer Bewegung vereinigen, kommen in dieser stets gemäß dem Principe der Beharrung zur Geltung.

Fig. 33.



Für zwei Urbewegungen, welchen ein Punkt W zugleich unterliegt, bedeutet dies folgendes:

1. Die Bahn jeder der beiden Bewegungen erleidet eine Verschiebung in der Richtung und mit der Geschwindigkeit der anderen Bewegung.
2. Der Punkt W, welcher den beiden Bewegungen unterliegt, befindet sich stets auf den beiden sich verschiebenden Bahnen, d. h. er liegt stets in deren augenblicklichem Schnittpunkte.

Zur Erläuterung dieser Beziehungen dient Fig. 33, für welche $c_1 = 2\,c_2$ gilt.

Der Punkt W, welcher sich von O bis A auf I mit der Geschwindigkeit c_1 bewegt hat, wird in A von einer zweiten Bewegung erfaßt, welche ihn für sich auf II mit der Geschwindigkeit c_2 fortführen würde, so daß in A zwei Bewegungen zusammentreten. Nach unserem Principe bewegt sich nun I mit der Geschwindigkeit c_2 translatorisch in der Richtung von II und II mit der Geschwindigkeit c_1 translatorisch in der Richtung von I. Gelangt

während der Zeit t zugleich I in die Lage (I) und II in die Lage (II), so befindet sich W nach Ablauf der Zeit t in B.

Man kann sich auch vorstellen, daß W die Strecke AA_1 mit der Geschwindigkeit c_1 in der Zeit t durchläuft, während diese Strecke selbst translatorisch mit der Geschwindigkeit c_2 in die Lage $A_2 B$ bewegt wird, oder daß W die Strecke AA_2 mit der Geschwindigkeit c_2 in der Zeit t durchläuft, während diese Strecke selbst translatorisch mit der Geschwindigkeit c_1 in die Lage $A_1 B$ rückt.

Wenn die erste Bewegung für sich W in der Zeit t von A nach A_1 führt und wenn die zweite Bewegung für sich W in der Zeit t von A nach A_2 führt, so führen beide Bewegungen zusammen W in der Zeit t auf irgend einem Wege nach dem vierten Eckpunkte des durch AA_1 und AA_2 bestimmten Parallelogramms.

Die Bewegung von W ist wieder eine Urbewegung, wie sich leicht zeigen läßt.

Zunächst schneiden sich die Geraden I und II während ihrer Bewegung stets auf der Diagonale AB, d. h. diese Gerade ist die Bahn von W. Zieht man nämlich durch einen beliebigen Punkt B' der Diagonale die Parallelen $B'A_1'$ und $B'A_2'$ bezw. zu BA_1 und BA_2, so folgt aus der Ähnlichkeit der entstandenen Dreiecke:

$$1. \quad \frac{AA_1'}{AA_1} = \frac{AB'}{AB} = \frac{AA_2'}{AA_2}.$$

Erreichen die Geraden II und I bezw. die Lagen $A_1'B'$ und $A_2'B'$ in der Zeit t' und t'', so gilt wegen der Gleichförmigkeit ihrer Bewegungen:

$$2. \quad \frac{AA_1'}{AA_1} = \frac{t'}{t} \quad \text{und} \quad 3. \quad \frac{AA_2'}{AA_2} = \frac{t''}{t}.$$

Aus 1. folgt, daß die linken Seiten von 2. und 3. einander gleich sind, so daß also auch ihre rechten Seiten gleich sind, d. h. man hat $t' = t''$.

Da also die Geraden II und I die Lagen $A_1'B'$ und $A_2'B'$ zu derselben Zeit erreichen, so ist der beliebige Punkt B' der Diagonale ein Punkt auf der Bahn von W.

Daß die Bewegung auf AB auch gleichförmig ist, zeigt die Gleichung:

$$4. \quad \frac{AB'}{AB} = \frac{t'}{t}$$

welche sich aus 1. in Verbindung mit 2. oder 3. für $t' = t''$ ergiebt.

Nennt man die Bewegungen I und II Seitenbewegungen (komponierende Bewegungen oder Komponenten) und die Bewegung, zu der sie zusammentreten, Mittelbewegung (resultierende Bewegung oder Resultante), so gilt demnach: Der Weg der Mittelbewegung erwächst aus den Wegen der Seitenbewegungen nach dem Parallelogrammprincipe.

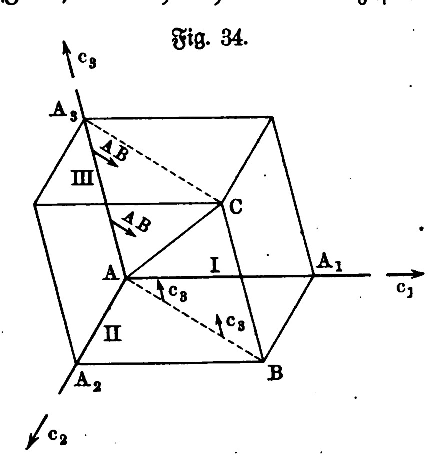
Giebt man t' den Wert $1''$, so stellen AA_1', AA_2' und AB' als Vektoren die Geschwindigkeiten der drei Bewegungen dar, d. h. die Geschwindigkeit der Mittelbewegung (Mittelgeschwindigkeit) bildet sich aus

den Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen (Seitengeschwindigkeiten) nach dem Parallelogrammprincipe.

Es ist leicht, diese Betrachtung auf mehrere Urbewegungen auszudehnen. Da die Bewegung auf AB eine Urbewegung ist, welche an die Stelle der Urbewegungen auf I und II getreten ist, so ist eine dritte Urbewegung III mit I und II zu vereinigen, indem man III mit der Bewegung auf AB genau so vereinigt, wie es mit I und II geschah. Außerdem muß allerdings noch gezeigt werden, daß bei dieser Vereinigung alle drei Bewegungen I, II, III gleichmäßig berücksichtigt werden, d. h. daß die Reihenfolge I, II, III zu demselben Ergebnisse führt, wie die Folge I, III, II und die Folgen II, III, I bezw. II, I, III und III, I, II bezw. III, II, I.

Führt die dritte Bewegung (vergl. Fig. 34) den Punkt W in der Zeit t, in welcher ihn I und II zusammen nach B führen, für sich nach A_3, so ist der vierte Eckpunkt C des aus AB und AA_3 bestimmten Parallelogramms der Ort von W zur Zeit t, falls die Bewegung auf AB und III zusammen in Geltung ist.

Fig. 34.



Dieser Ort C ist der Eckpunkt des Streckenzuges AA_1BC, welcher aus AA_1, AA_2 ($\#A_1B$) und AA_3 ($\#BC$) als Vektoren gebildet werden kann. Eine Vertauschung in der Folge der Bewegungen I, II, III führt demnach nur zu einer Vertauschung der Vektoren in jenem Streckenzuge und dabei gelangt man stets (vergl. Einleitung, S. 24 u. f.) zu demselben Punkte C.

Für $t = 1$ stellt dieser Streckenzug das Polygon der Geschwindigkeiten für I, II, III dar, während AC dessen Schlußlinie ist, d. h. die Mittelgeschwindigkeit wird auch hier durch geometrische Addition der Seitengeschwindigkeiten gewonnen.

Um die Betrachtung auf n Urbewegungen auszudehnen, braucht man nur anzunehmen, daß AB in Fig. 34 bereits aus $n - 1$ Urbewegungen entstanden ist und daß AA_3 als n^{te} dazu kommt. So gelangt man zu dem Satze: Wenn ein Punkt W gleichzeitig von n Urbewegungen ergriffen wird, welche ihn für sich in der Zeit t bezw. von A nach A_1, von A nach $A_2, \ldots$ von A nach A_n führen würden, so führen sie ihn zusammen nach einem Punkt N, welcher der Endpunkt des Streckenzuges ist, der von A aus durch AA_1, $AA_2, \ldots, AA_n$ als Vektoren gebildet werden kann. Die Bewegung von W, welche als Mittelbewegung den einzelnen Seitenbewegungen gegenübertritt, ist eine Urbewegung auf der Gerade AN, deren Geschwindigkeit durch geometrische Addition aus den Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen erwächst. Schließt sich der Streckenzug der Wege oder der ihm ähnliche der Geschwindigkeiten von selbst, so ist Punkt W in Ruhe. Für die Betrachtung

ist es ganz gleichgültig, ob die Geraden $I, II, \ldots$ in einer Ebene liegen oder nicht. Ist ersteres der Fall, so sind auch die beiden Streckenzüge eben, im anderen Falle sind sie gewunden.

Für den Fall dreier Geraden, welche nicht in einer Ebene liegen, stellt Fig. 34 ein Parallelepipedon dar, dessen Diagonalachse AC ist. Hier kann man von einem Parallelepipedon der Wege und der Geschwindigkeiten sprechen, wie sonst von einem Parallelogramm bei zwei Bewegungen. Außerdem ist hier die Vorstellung zulässig, daß die Ebene von I und II translatorisch an der Geraden III mit der Geschwindigkeit von III fortschreitet und daß Entsprechendes für die anderen beiden Ebenen gilt, wobei dann W stets im Durchschnittspunkte der drei Ebenen liegt.

Im übrigen hat man an der Vorstellung festzuhalten, daß jede der n Bahnen durch die $n - 1$ übrigen bezw. in deren Richtung und mit deren Geschwindigkeit translatorisch verschoben wird und daß sich W stets im Schnittpunkte aller n Geraden befindet.

Die Wege AA_1, $AA_2, \ldots, AA_n$ stellen, als Vektoren aufgefaßt, einen besonderen Fall von Verlegungen (Dislokationen) dar, da man unter der Verlegung eines Punktes W, welcher sich auf irgend einer Bahn von A nach P bewegt, die Strecke AP, als Vektor aufgefaßt, versteht. Für diese Verlegungen $[AA_1]$, $[AA_2], \ldots, [AA_n]$ und für die Geschwindigkeiten $[c_1]$, $[c_2], \ldots, [c_n]$ gelten alle Sätze, welche in der Einleitung, S. 24 u. f. in Bezug auf die Zusammensetzung und Zerlegung von Vektoren abgeleitet wurden.

21. Das Princip des Parallelogramms für beliebige Bewegungen eines Punktes. Da jede Bewegung während eines Zeitelementes als Urbewegung aufgefaßt werden darf, so gilt das Princip des Parallelogramms während eines Zeitelementes auch für die Vereinigung und die Zerlegung beliebiger Bewegungen, welche einen Punkt W zugleich ergreifen.

Die Verlegungen der einzelnen Bewegungen sind hier Bahnelemente, ihre Verhältnisse zu dem Zeitelement, für welches die Betrachtung gilt, die entsprechenden Geschwindigkeiten. Demnach gilt der Satz: Werden einem Punkte W zur Zeit t zugleich n verschiedene Geschwindigkeiten $[v_1]$, $[v_2], \ldots, [v_n]$ erteilt, so erwächst seine Geschwindigkeit $[v]$ aus diesen nach dem Parallelogrammprincipe.

Entsprechendes gilt für Zerlegungen.

Man spricht auch hier von Seitengeschwindigkeiten und Mittelgeschwindigkeit. Alle Sätze, welche in der Einleitung S. 24 u. f. in Bezug auf die Zusammensetzung und Zerlegung von Vektoren abgeleitet wurden, gelten auch für $[v_1]$, $[v_2], \ldots, [v_n]$ und $[v]$.

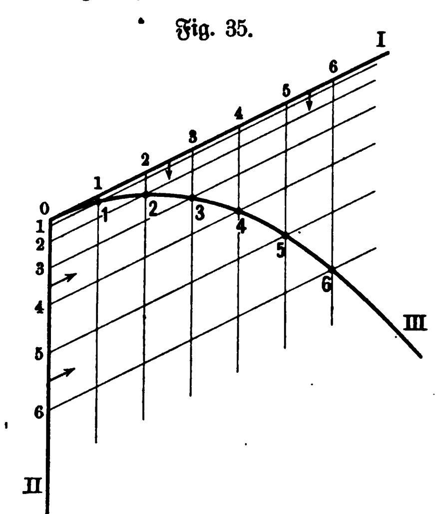
Ob das Parallelogrammprincip bei beliebigen Bewegungen, welche einen Punkt zugleich ergreifen, auch für eine endliche Zeit gilt, wie es bei den Urbewegungen der Fall war, bedarf einer besonderen Untersuchung. Es fragt sich, ob auch hier die Verlegung des Punktes stets aus den Verlegungen der Seitenbewegungen nach dem Parallelogrammprincipe bestimmt werden darf oder nicht.

Wir klären diese Frage erst an zwei Beispielen:

1. Die Bewegung von W werde durch zwei Seitenbewegungen bestimmt, deren Bahnen zwei sich schneidende Gerade sind und deren Stellungsgleichungen für den Schnittpunkt der Geraden als Nullpunkt $s = ct$ und $s = \frac{1}{2} g t^2$ lauten. Die Bewegung von W entspricht dann angenähert der Bewegung des Mittelpunktes einer homogenen Kugel, welche in der Nähe der Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit c geworfen wird (I), während ihr die Erde die Beschleunigung g erteilt (II).

In Fig. 35 sind für beide Bewegungen auf den Bahnen I und II die Stellungen für $t = \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$ bezeichnet; die einzelnen Teile auf I werden dabei ($s = ct$) unter sich gleich, die einzelnen Teile auf II entsprechen dabei ($s = \frac{1}{2} g t^2$) den ungeraden Zahlen. Bildet man aus den Verlegungen 01, 02, 03,... auf I und II nach dem Parallelogrammprincipe die Mittelverlegungen 01, 02, 03, . . ., so bestimmen deren Endpunkte 1, 2, 3, ... die Bahn III, welche eine Parabel ist.

Fig. 35.



Denkt man sich Bahn I in der Richtung von II durch Bewegung II und zugleich Bahn II in der Richtung von I durch Bewegung I translatorisch verschoben, so ist Bahn III der Ort des Schnittpunktes der sich verschiebenden Bahnen I und II.

Diese Vorstellung **entspricht den Verhältnissen der Außenwelt**, da $0I$ nach dem Principe der Beharrung für jede Lage von W die Richtung der konstanten Geschwindigkeit $[c]$ darstellt und da die Einwirkung der Erde, **solange man deren Mittelpunkt als unendlich-fern betrachten darf**, für jede Lage von W der Richtung und Einteilung von $0\,II$ entspricht.

Diese Vorstellung **steht aber zu den Verhältnissen der Außenwelt in Gegensatz, sobald man die Entfernung zwischen dem Erdmittelpunkte und W als endlich ansieht**, weil dann sowohl die Richtung als auch die Einteilung für II von der Zeichnung $0\,II$ der Figur abweicht.

Sieht man W als Mittelpunkt des Mondes an, so muß man diese genauere Auffassung zu Grunde legen, d. h. die Bewegung des Mondes um die Erde läßt sich nicht aus den endlichen Verlegungen der Seitenbewegungen nach dem Parallelogrammprincipe bestimmen.

2. Die Bewegung von W werde durch zwei Seitenbewegungen bestimmt, deren eine (I) den Punkt W auf der Strecke OR in der Zeit t gleichförmig

von A nach B führt, während die andere (II) zugleich die Strecke OR gleichförmig dreht[1]). (Vergl. Fig. 36.)

Gelangt OR während der Zeit t in die Lage OR', so hat W am Ende dieser Zeit die Stellung B'. Die Bewegung I würde für sich W in der Zeit t nach B führen, die Bewegung II würde für sich W in der Zeit t nach A' führen, beide Bewegungen zusammen führen W nicht nach dem vierten Eckpunkte B'' des durch die Verlegungen $[AB]$ und $[AA']$ bestimmten Parallelogramms, sondern nach B'.

Die Betrachtung unserer Beispiele ergiebt eine allgemeine Vorschrift für die Verwendung des Parallelogrammprincips und zwar gemäß folgender Definition: Zwei Seitenbewegungen sollen ein Verschiebungssystem (translatorisches System) genannt werden, wenn

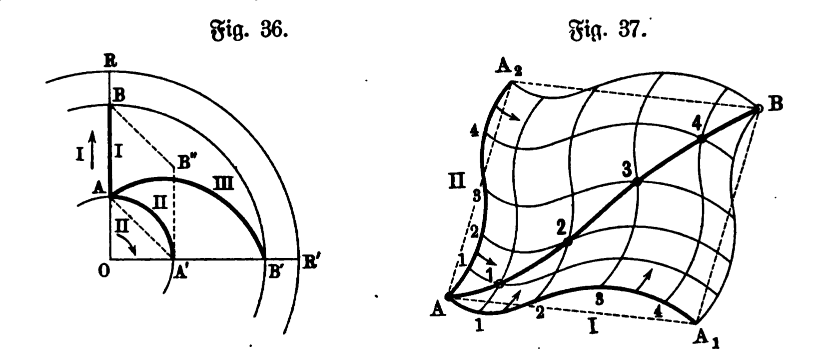


Fig. 36. Fig. 37.

1. die Bahn der Mittelbewegung als geometrischer Ort des Schnittpunktes der sich bewegenden Bahnen der Seitenbewegungen aufgefaßt werden kann,

und wenn dabei:

2. die Bahn jeder der beiden Bewegungen stets eine Verschiebung in der augenblicklichen Richtung und mit der augenblicklichen Geschwindigkeit der anderen Bewegung erleidet.

Man überzeugt sich dann leicht davon, daß die Verwendung des Parallelogrammprincipes bei endlichen Verlegungen dann und nur dann erlaubt ist, wenn die entsprechenden Seitenbewegungen ein Verschiebungssystem bilden.

Es mag noch besonders darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Seitenbewegungen durchaus nicht auf geraden Bahnen vor sich gehen müssen, es handelt sich nur darum, daß die von Element zu Element stets zulässige Verwendung des Parallelogrammprincips am beweglichen Punkt W

---

[1]) Dieses Beispiel wurde, abgesehen von seiner praktischen Wichtigkeit, aufgenommen, weil sich in Lehrbüchern vielfach die Erklärung findet: Ein Punkt ist zwei Bewegungen zugleich unterworfen, wenn er sich auf einer Linie bewegt, die selbst in Bewegung ist.

immer zu demselben Ergebnisse führt, wie an den ursprünglich gegebenen Bahnen der beiden Seitenbewegungen.

Wird (vergl. Fig. 37 a. v. S.) der Punkt W innerhalb der Zeit t durch I allein von A nach A_1 und durch II allein von A nach A_2 geführt, so führen ihn beide Bewegungen zusammen innerhalb der Zeit t von A nach B, falls die Seitenbewegungen I und II ein Verschiebungssystem bilden. Die Verlegungen $[A A_1]$ und $[A A_2]$ genügen, um die Lage von B zu bestimmen. Dies gilt für jeden endlichen Wert von t und für jeden noch so kleinen Wert von t.

Zur Veranschaulichung dieser Vorstellung kann man sich vorstellen, daß eine centrisch durchbohrte Kugel auf einer Stange $A A_1$ (bezw. $A A_2$) gemäß Bewegung I geleitet, während diese Stange selbst in den Führungen $A A_2$ und $A_1 B$ (bezw. $A A_1$ und $A_2 B$) gemäß Bewegung II verschoben wird. Der Mittelpunkt der Kugel entspricht dem Punkte W, falls $A A_1$ und $A A_2$ in der Zeit t durchlaufen werden.

Es ist leicht, die Definition des Verschiebungssystems auf n Seitenbewegungen auszudehnen und demgemäß die Verwendbarkeit des Parallelogrammprincips bei endlichen Verlegungen zu begrenzen.

Ob Bewegungen der Außenwelt, welche an einem Punkte W als Seitenbewegungen zusammentreten, als ein Verschiebungssystem aufgefaßt werden dürfen oder nicht, muß von Fall zu Fall untersucht werden.

Ist dies zulässig, so gelten auch für endliche Verlegungen die Sätze, welche in der Einleitung S. 24 u. f. gegeben wurden.

22. **Zusammensetzung einer Reihe von Urbewegungen.** Wenn sich ein Punkt W mit der Geschwindigkeit c_0 gleichförmig auf einer Geraden bewegt und wenn zu dieser Bewegung nach einer bestimmten Zeit eine zweite Urbewegung hinzutritt, nach Verlauf einer weiteren Zeit eine dritte u. s. f., so beschreibt W einen Streckenzug. Im Gegensatz zu der früher gewählten Bezeichnung sollen die Geschwindigkeiten der hinzutretenden Bewegungen $z_1, z_2, z_3, \ldots$ genannt werden, die Geschwindigkeiten von W in den einzelnen Teilen des Streckenzuges $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Unter der Voraussetzung, daß die einzelnen Urbewegungen stets nach Ablauf derselben Zeit τ auftreten und daß auch die ursprüngliche Bewegung (c_0) von W während der Zeit τ betrachtet wird, durchläuft W jede Seite (vergl. Fig. 38a) des Streckenzuges $P_0, P_1, P_2, \ldots$ in derselben Zeit τ und man hat:

$$\frac{P_0 P_1}{\tau} = c_0, \quad \frac{P_1 P_2}{\tau} = c_1, \quad \frac{P_2 P_3}{\tau} = c_2 \ldots$$

W hat die Strecke $P_0 P_1$ mit der Geschwindigkeit c_0 in der Zeit τ durchlaufen, im Punkte P_1 ist eine Bewegung mit der Geschwindigkeit z_1 hinzugetreten, welche W im Verein mit der ersten Bewegung in die Bahn $P_1 P_2$ zwingt, im Punkte P_2 ist eine Bewegung mit der Geschwindigkeit z_2 hinzugetreten, welche den Punkt W im Verein mit den beiden (bereits auf $P_1 P_2$ vereinigten) Bewegungen in die Bahn $P_2 P_3$ drängt u. s. f.

Der Hodograph der Bewegung, welcher hier (vergl. Fig. 38b) aus den Punkten H_0, H_1, H_2, ... besteht, stellt in den Verbindungsstrecken $z_1 = H_0 H_1$, $z_2 = H_1 H_2$, ..., falls man sie als Vektoren auffaßt, die Geschwindigkeiten der hinzutretenden Bewegungen dar. Bildet man z. B. aus $[c_0]$ und $[z_1]$ im Punkte P_1 als Ursprung das Parallelogramm, so ist dessen Diagonale $[c_1]$ die Geschwindigkeit für $P_1 P_2$. Der Winkel ε_1 zwischen $[c_0]$ und $[c_1]$ im Hodographen stellt zugleich den Winkel der Polygonseiten $P_0 P_1$ und $P_1 P_2$ dar, gemessen im Sinne der Bewegungspfeile u. s. f., während c_0, c_1, ... den Polygonseiten $P_0 P_1$, $P_1 P_2$, ... proportional sind.

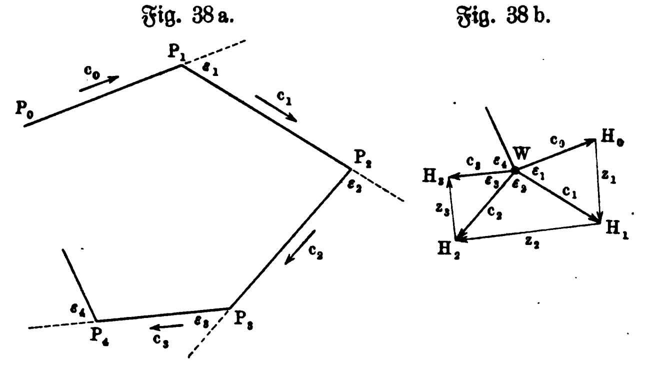


Fig. 38a. Fig. 38b.

Könnte man den Streckenzug $P_0 P_1 P_2$ ... in eine Kurve überführen, so ließe sich unsere Betrachtung auf beliebige Bewegungen übertragen. Dazu wäre nötig, daß die Seiten, wie $P_0 P_1$, und die Winkel, wie ε_1, des Streckenzuges $P_0 P_1 P_2$ ... dem Werte Null unbegrenzt angenähert würden.

Ersteres erreicht man dadurch, daß man τ, letzteres dadurch, daß man z_1, z_2, ... (vergl. den Hodographen) kleiner und kleiner werden läßt, wobei das Verhältnis $z : \tau$ im allgemeinen einen endlichen Wert behalten muß.

23. Übertragung auf beliebige Bewegungen; die Beschleunigung als Vektor. Messen wir bei einer beliebigen Bewegung alle τ Sekunden die Geschwindigkeit, so erhalten wir durch die gemessenen Werte v_0, v_1, ... und deren Richtungen eine Reihe von Punkten H_0, H_1, ... des Hodographen, wie es Fig. 39 zeigt.

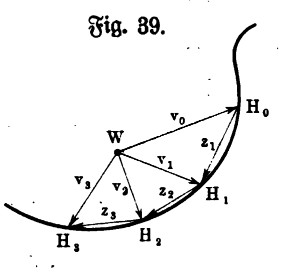


Fig. 39.

Man könnte $[v_0]$ durch die Zusatzgeschwindigkeit $[z_1]$ in $[v_1]$ überführen, ebenso $[v_1]$ durch $[z_2]$ in $[v_2]$ u. s. f. Je kleiner man τ wählt, um so dichter rücken die Punkte H_0, H_1, ... zusammen und für $\lim \tau = 0$ bildet sich der Hodograph als Linie.

Thatsächlich wird $[v_0]$ bei der Bewegung stetig in $[v_1]$ übergeführt, so daß $[z_1]$ in Fig. 39 die Durchschnittsgeschwindigkeitsänderung für den Übergang von $[v_0]$ in $[v_1]$ darstellt und zwar als Vektor.

Man hat hier:

$$[v_0] \overset{\times}{+} [z_1] \overset{\times}{=} [v_1]$$

und also

$$[z_1] \overset{\times}{=} [v_1] \overset{\times}{-} [v_0].$$

Ebenso wie früher die Änderung des Geschwindigkeitswertes $v_1 - v_0$ im Verhältnis zu der Zeit τ, in welcher diese Änderung vor sich geht, als Durchschnittsbeschleunigung bezeichnet wurde, so kann jetzt die Änderung der Geschwindigkeit als Vektor, d. h. $[v_1] \overset{\times}{-} [v_0] \overset{\times}{=} [z_1]$ im Verhältnis zu der Zeit τ, in welcher diese Änderung vor sich geht, als eine gerichtete Durchschnittsbeschleunigung angesehen werden.

Für $\lim \tau = 0$ geht diese gerichtete Durchschnittsbeschleunigung $\frac{[z_1]}{\tau}$ in eine Beschleunigung als Vektor über; die Richtung dieses Vektors wird durch die Grenzlage der Sekante $H_0 H_1$, d. h. durch die (nach H_1 gerichtete) Tangente des Hodographen in H_0 dargestellt, der Wert des Vektors durch den (im allgemeinen endlichen) Grenzwert von $\frac{z_1}{\tau}$. Dieser Grenzwert stellt aber zugleich die Geschwindigkeit für die Erzeugung des Hodographen in H_0 dar, weil die mittleren Geschwindigkeiten $\frac{H_0 H_1}{\tau}$ und $\frac{z_1}{\tau}$ denselben Grenzwert haben, während außerdem die Richtung dieser Geschwindigkeit als Vektor wiederum durch die (nach H_1 gerichtete) Tangente in H_0 bezeichnet wird.

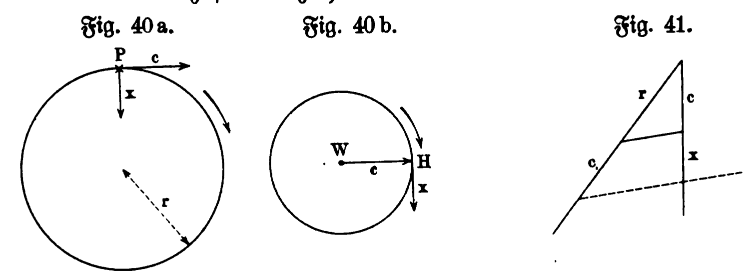
Durch diese Betrachtung findet man für jeden bestimmten Zeitpunkt t eine bestimmte Beschleunigung als Richtungsgröße, welche nun die Beschleunigung (als Vektor) der Bewegung für den Zeitpunkt t heißen mag, sie ist zugleich für denselben Zeitpunkt t die Geschwindigkeit (als Vektor) für die Erzeugung des durch den Punkt H beschriebenen Hodographen. Demgemäß gilt der Satz: Für jeden Zeitpunkt ist die Beschleunigung der Bewegung (als Vektor) gegeben durch die gleichzeitige Geschwindigkeit (als Vektor) für die Erzeugung des Hodographen.

Als Beispiel für die Verwendung dieses Satzes behandeln wir zunächst die gleichförmige Bewegung auf einem Kreise. Hier ist (vergl. Fig. 40a und 40b) der Hodograph ein Kreis, welcher gleichförmig mit der Geschwindigkeit x durchlaufen wird und zwar in derselben Zeit, in welcher W den gegebenen Kreis vom Radius r mit der Geschwindigkeit c durchläuft. Wird dieser in der Zeit T durchlaufen, so ist $c = \frac{2 r \pi}{T}$ und $x = \frac{2 c \pi}{T}$, d. h. man hat $x : c = c : r$ und $x = \frac{c^2}{r}$. Die Beschleunigung der Bewegung (als Vektor) hat hier also den konstanten Wert $\frac{c^2}{r}$. Die Richtung dieser Beschleunigung wird durch die entsprechende Tangente des Hodographen gegeben und gestattet, $[x]$ in die Hauptfigur (H und P entsprechen sich) zu übertragen. Da $[x]$ in P auf $[c]$ senkrecht steht, so ist die Beschleunigung hier senkrecht zur Tangente in P, d. h. sie liegt in der sogenannten Normalen. Eine solche Beschleunigung wird Normalbeschleunigung genannt und durch

$[j_N]$ bezeichnet, so daß $j_N = \frac{c^2}{r}$ ist, ihr Pfeil zeigt stets nach dem Mittelpunkte des Kreises.

Um $x = j_N$ zu konstruieren, dient Fig. 41, welche der Gleichung $x : c = c : r$ entspricht. Selbstverständlich kann man die drei Figuren 40a, 40b und 41 in eine zusammenziehen.

Fig. 40a. Fig. 40b. Fig. 41.



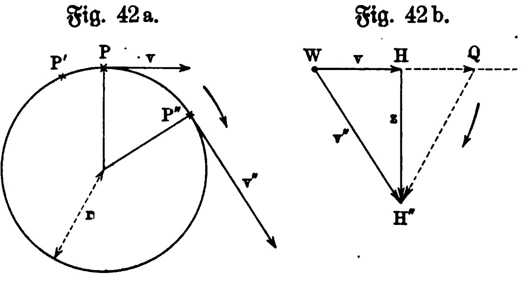
Durch Einführung der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\gamma = \frac{c}{r}$ und der Umlaufszeit $T = \frac{2 r \pi}{c}$ erhält man noch brauchbare Umformungen für j_N. Man hat:

$$\left.\begin{aligned} j_N &= \frac{c^2}{r} \\ j_N &= r\gamma^2 \\ j_N &= r\frac{4\pi^2}{T^2} \text{ und } T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{j_N}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 28)$$

Führt man noch die Anzahl u der Umdrehungen in der Minute ein, so gilt (vergl. S. 46) angenähert $\gamma = 0{,}1\,u$ und demnach auch angenähert $j_N = 0{,}01\,r\,u^2$.

Als weiteres Beispiel behandeln wir die gleichmäßig-geänderte Bewegung auf einem Kreise. Hier bestimmen (vergl. Fig. 42a und 42b) die Geschwindigkeiten $[v]$ in P und $[v'']$ in P'' die Punkte H und H'' des Hodographen. Dem Übergange von $[v]$ in $[v'']$ entspricht die Zusatzgeschwindigkeit $[z]$ und zwar als Durchschnittsgeschwindigkeit von bestimmter Richtung.

Fig. 42a. Fig. 42b.



Um $[z]$ zu bestimmen, machen wir $WQ = WH''$, so daß

$$[z] \stackrel{\times}{=} [HQ] \stackrel{\times}{+} [QH'']$$

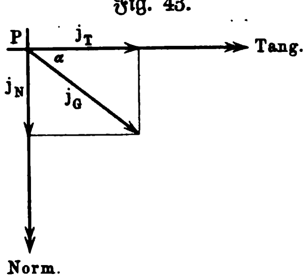
ist, und bestimmen die Komponenten $[HQ]$ und $[QH'']$.

Man hat nun $HQ = WQ - WH = v'' - v = b\tau$ und $\frac{HQ}{\tau} = b$,

da ja $v'' = v + b\tau$ ist. Die Zusatzgeschwindigkeit $[QH'']$ entspricht einer gleichförmigen Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit v'', so daß hier, dem ersten Beispiele gemäß, zur Bestimmung von $lim\left[\frac{QH''}{\tau}\right]_{\tau=0}$ zu bilden ist $\frac{(v'')^2}{r}$, wofür aber $\frac{v^2}{r}$ gesetzt werden darf, da $v'' = v + b\tau$ für $\tau = 0$ in v übergeht. Demgemäß erwächst die Beschleunigung, welche $[z]$ entspricht, aus zwei Komponenten, deren eine den Wert b hat und in ihrer Richtung übereinstimmt mit der in P im Sinne der Bewegung gezogenen Tangente. Man nennt eine solche Beschleunigung **Tangentialbeschleunigung** und bezeichnet sie durch $[j_T]$, so daß in unserem Beispiele $j_T = b$ ist.

Die andere Komponente ist eine Normalbeschleunigung vom Werte $\frac{v^2}{r}$. Um die gesuchte Beschleunigung darzustellen, hat man demnach die aufeinander senkrecht stehenden Komponenten $[j_T]$ und $[j_N]$ zu einer **Gesamtbeschleunigung** $[j_G]$ zu vereinigen, wie es Fig. 43 zeigt.

Fig. 43.



Die Betrachtungen dieses zweiten Beispiels lassen sich zunächst auf jede ungleichförmige Bewegung, deren Bahn ein Kreis ist, übertragen, da jede Bewegung in zweiter Annäherung als gleichmäßig-geänderte Bewegung aufgefaßt werden darf, man hat nur b durch den Wert j für die Stelle P zu ersetzen.

Für jede ungleichförmige Bewegung, deren Bahn ein Kreis ist, gilt demnach (vergl. Fig. 43):

$$\left.\begin{aligned} & j_T = j \text{ und } j_N = \frac{v^2}{r} \\ \text{und}\quad & j_G = \sqrt{j_T^2 + j_N^2} \\ \text{und}\quad & \cos\alpha = \frac{j_T}{j_G} \text{ und } \sin\alpha = \frac{j_N}{j_G} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 29\,\text{a})$$

24. Der Krümmungskreis und die Tangential- und die Normalbeschleunigung für eine beliebige Bewegung. Die Beispiele des vorigen Paragraphen haben eine weitgehende theoretische Bedeutung, da sich die Ergebnisse der Betrachtung auf eine ganz beliebige Bahn (statt des Kreises) übertragen lassen.

Nimmt W auf einer beliebigen Bahn nacheinander die Lagen P', P, P'' ein, so geht durch diese drei Punkte, falls sie nicht in gerader Linie liegen, stets ein und nur ein Kreis.

Läßt man die Punkte P' und P'' von beiden Seiten aus sich auf P zu bewegen und denkt man für jede Lage der drei Punkte durch sie einen Kreis bestimmt, so behält dieser Kreis selbst dann noch im allgemeinen (aus-

geschlossen sind z. B. Spitzen der Kurve) einen endlichen Radius ϱ, wenn die Punkte P' und P'' mit P zusammenfallen. Man nennt diesen Kreis vom Radius ϱ den Krümmungskreis der Kurve im Punkte P und nennt ferner $\frac{1}{\varrho}$ die Krümmung der Kurve im Punkte P. Auch die Grenzfälle $\varrho = 0$ und $\varrho = \infty$, welche zunächst ausgeschlossen werden, haben ihre Bedeutung; $\varrho = 0$ zeigt z. B. eine Spitze der Kurve an, $\varrho = \infty$ eine geradlinige Stelle der Kurve, wie sie z. B. bei Wendepunkten auftritt.

Die hier betrachtete Krümmung heißt „erste Krümmung" der gewundenen Kurve (Bahn), wenn man ihr gegenüber die Windung im Raume als „zweite Krümmung" unterscheidet. Die Ebene, welche P', P, P'' in der Grenzlage bestimmen, heißt die **Schmiegungsebene** (Oskulationsebene) von P. Betrachtet man zwei aufeinander folgende Schmiegungsebenen, indem man einen vierten Punkt der Bahn, der vor P' oder hinter P'' liegen muß, zu der Gruppe P', P, P'' hinzunimmt, so ist der Neigungswinkel zweier solcher Schmiegungsebenen ein wichtiges Bestimmungsstück für die zweite Krümmung. Für **ebene** Kurven ist die zweite Krümmung stets Null, so daß man hier die erste Krümmung ohne weiteres als Krümmung bezeichnet.

Die Bewegung auf der Kurve von P' über P nach P'' kann durch die Bewegung auf dem Krümmungskreise von P ersetzt werden, falls P' und P'' unendlich-nahe ($\lim \tau = 0$) bei P liegen.

Um also die Bewegung für den Bahnpunkt P zu kennzeichnen, hat man nur die Bewegung auf dem Krümmungskreise von P für diesen Bahnpunkt P zu untersuchen. Für diesen gilt aber, falls man r mit ϱ vertauscht, gemäß vorigem Paragraphen:

$$\left.\begin{aligned} j_T &= j \text{ und } j_N = \frac{v^2}{\varrho} \\ \text{und}\quad j_G &= \sqrt{j_T^2 + j_N^2} \\ \text{und}\quad \cos\alpha &= \frac{j_T}{j_G} \text{ und } \sin\alpha = \frac{j_N}{j_G} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 29\,\text{b)}$$

Für eine **ebene** Kurve, deren Gleichung in rechtwinkeligen Koordinaten $y = f(x)$ ist, gilt:

$$\varrho = \frac{\left(1 + [f'(x)]^2\right)^{3/2}}{f''(x)} \quad \ldots\ldots\ 30\,\text{a)}$$

Ist das Quadrat von $f'(x)$ gegen 1 zu vernachlässigen, wie es bei sehr flachen Kurven für eine geeignete Achsenlage (x, y) der Fall ist, so ist:

$$\varrho = \frac{1}{f''(x)} \quad \text{bezw.} \quad \frac{1}{\varrho} = f''(x) \quad \ldots\ldots\ 30\,\text{b)}$$

eine brauchbare Annäherung.

Oft läßt sich ϱ auch gemäß Formel 29 b) berechnen, d. h. man hat:

$$\varrho = \frac{v^2}{j_N}.$$

Wird P zur Zeit t erreicht, so hat man j etwa aus der Stellungsgleichung für t zu berechnen, ebenso v; die geometrische Untersuchung der Bahn liefert ferner den Wert von ϱ für die Stelle P.

Die Richtung von $[j_T]$ zeigt die Tangente in P an, welche im Sinne der Bewegung zu ziehen ist. Die Richtung von $[j_N]$ zeigt die Normale in P an, welche nach dem Mittelpunkt des Krümmungskreises zu ziehen ist. Darum heißt $[j_N]$ auch Centripetalbeschleunigung. Aus den Seitenbeschleunigungen $[j_T]$ und $[j_N]$ erwächst $[j_G]$ nach dem Parallelogrammprincipe.

25. **Die Bedeutung der Gesamtbeschleunigung als Vektor.** Mit der Bestimmung von $[j_G]$ ist die Vergleichung einer beliebigen Bewegung mit der Urbewegung beendet. Die Zerlegung von $[j_G]$ in die beiden Seitenbeschleunigungen $[j_T]$ und $[j_N]$ zeigt deutlich den Unterschied zwischen der Urbewegung und einer Bewegung, welche keine solche ist. Die tangentiale Seitenbeschleunigung $[j_T]$ liegt in der augenblicklichen Richtung der Bewegung und stellt lediglich die Änderung des Geschwindigkeitswertes v dar, was auch die Übereinstimmung von j_T und j anzeigt. Die normale Seitenbeschleunigung $[j_N]$ steht senkrecht zu der augenblicklichen Richtung der Bewegung und ist lediglich für die Änderung in der Richtung der Geschwindigkeit, d. h. für die Krümmung der Bahn, maßgebend.

Solange $j_T = 0$ ist, tritt keine Änderung des Geschwindigkeitswertes ein, d. h. die Bewegung ist gleichförmig. Hier ist $[j_G] = [j_N]$, d. h. die Gesamtbeschleunigung entspricht lediglich der Krümmung der Bahn.

Solange $j_N = 0$ ist, tritt keine Änderung in der Richtung der Bewegung ein, d. h. die Bewegung ist geradlinig. Dies zeigt auch der Bau von $j_N = \frac{v^2}{\varrho}$, da für ein endliches v der Radius ϱ den Wert ∞ annehmen muß, wenn $j_N = 0$ sein soll. Hier ist $[j_G] = [j_T]$, d. h. die Gesamtbeschleunigung entspricht lediglich der Änderung des Geschwindigkeitswertes.

Solange $j_N = 0$ und $j_T = 0$ ist, hat auch $[j_G]$ den Wert Null, d. h. die Bewegung ist eine Urbewegung.

Die gleichmäßig-geänderte Bewegung wird durch einen konstanten Wert von $[j_T]$ gekennzeichnet, während ein konstanter Wert von $[j_N]$ bei konstantem v auf ein konstantes ϱ, d. h. auf eine gleichmäßige Krümmung der Bahn (Kreis) hinweist.

Stellt man sich unter $[j_G]$ eine von außen an W herantretende Einwirkung vor, so bewirkt deren Komponente $[j_T]$ die Änderung des Geschwindigkeitswertes und deren Komponente $[j_N]$ die Krümmung der Bahn.

Bezeichnet man die Ursache einer Bewegungsänderung durch das Wort Kraft, so besteht deren Wirkung in der Erzeugung der Bewegungsänderung $[j_G]$.

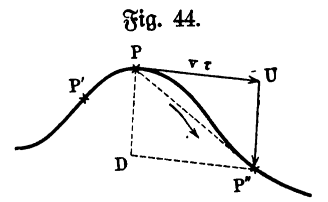
Da $[j_G]$ der Grenzwert des Verhältnisses einer bestimmten Geschwindigkeit (als Vektor) zu einer bestimmten Zeit ist, so kann $[j_G]$ genau so aus Seitenbeschleunigungen erwachsen, wie eine Geschwindigkeit aus Seitengeschwindigkeiten erwachsen kann.

Treten z. B. an W von außen n verschiedene Einwirkungen heran, welche sich als n Beschleunigungen $[j_1]$, $[j_2]$, . . ., $[j_n]$ darstellen lassen, so erwächst $[j_G]$ aus diesen nach dem Parallelogrammprincipe. Auch für die Zusammensetzung und Zerlegung der Beschleunigungen an einem Punkt W gelten die Sätze, welche in der Einleitung S. 24 u. f. abgeleitet wurden.

Daraus darf man aber nicht etwa schließen, daß die Gesamtbeschleunigung einer Bewegung, welche aus Seitenbewegungen entsteht, stets aus den einzelnen Beschleunigungen dieser Seitenbewegungen nach dem Parallelogrammprincipe gebildet werden darf. Nur für Verschiebungssysteme ist dieses Verfahren ohne weiteres zulässig.

26. Die Abweichung von der Urbewegung (Deviation). Die Vergleichung der Urbewegung mit einer beliebigen Bewegung, welche keine solche ist, läßt sich auch durchführen, indem man unmittelbar die unendlich-kleinen Verlegungen bestimmt, welche für jeden Zeitpunkt die Abweichung von der Urbewegung darstellen. Eine solche Bestimmung, bei der man auf die zweite Annäherung der Bewegung (vergl. S. 78) zurückgreifen muß, liefert einen weiteren Aufschluß über die Entstehung einer beliebigen Bewegung.

Fig. 44.



Zieht man in einem Punkte P der Bahn, in welchem die Geschwindigkeit des Punktes W den Wert v hat, die Tangente und trägt man ferner auf dieser in der augenblicklichen Richtung der Bewegung von P aus $v\tau = PU$ ab, so stellt die Strecke PU den Weg dar, den W in der Zeit τ durchlaufen würde, falls seine thatsächliche Bewegung im Punkte W in eine Urbewegung überginge. Bewegt sich W thatsächlich auf seiner Bahn, in der Zeit τ von P bis P'', so stellen die Punkte U und P'' für das Ende des Zeitabschnittes τ den Unterschied in der Lage von W für die beiden verglichenen Bewegungen dar. Verbindet man U mit P'' durch eine Strecke UP'', so giebt diese, als Vektor aufgefaßt, ein Maß für den Lagenunterschied von U und P'' bezw. für den Unterschied der Verlegungen $[PU]$ und $[PP'']$. Die Gleichung $[PP''] \overset{\times}{=} [PU] \overset{\times}{+} [UP'']$ erhält eine besondere Bedeutung, wenn man auch $[UP'']$ als Verlegung auffaßt und sich die Strecke UP'' bezw. PD ($\#\ UP''$) auch in der Zeit τ durchlaufen denkt. Man kann sich dann nämlich vorstellen, daß die thatsächliche Bewegung auf PP'' die Mittelbewegung aus der gleichförmigen Bewegung auf PU und einer bestimmten Bewegung auf PD ist. Nähert sich die Verlegung $[UP'']$ bezw. $[PD]$ bei abnehmendem τ einer bestimmten Grenze, nach Wert und Richtung, wie es im allgemeinen der Fall ist, so nennt man diese Verlegung nach vollzogenem Grenzübergange die Abweichung für den Zeitpunkt t bezw. für den Bahnpunkt P. Sie bestimmt im Verein mit $[PU]$ das Bahnelement $[PP'']$ und ist natürlich selbst unendlich-klein.

Wir bestimmen die Abweichung zunächst für einige Beispiele. Bei einer gleichmäßig geänderten Bewegung auf gerader Linie ist $PP'' = v\tau + \frac{1}{2} b\tau^2$, während $PU = v\tau$ ist. Da hier $[PU]$ und $[PP'']$ auf einer Geraden

liegen, auf der demnach auch $[PD]$ liegt, so ist $PD = \frac{1}{2} b \tau^2$. Beim Grenzübergange $\lim \tau = 0$ erhält PD selbst den Wert Null, dagegen liefert der Grenzübergang für $\frac{PD}{\tau^2}$ den endlichen Wert $\frac{1}{2} b$. Die Abweichung ist also hier eine unendlich-kleine Größe, deren Verhältnis zu τ^2 endlich ist, man nennt sie eine unendlich-kleine Größe zweiter Ordnung in Bezug auf τ. Die Strecke $PU = v\tau$ wird auch beim Grenzübergange unendlich-klein, während ihr Verhältnis zu τ endlich ist, man nennt sie eine unendlich-kleine Größe erster Ordnung in Bezug auf τ. Die Strecke PP'' ist die Summe der beiden Größen $v\tau$ und $\frac{1}{2} b \tau^2$, von denen die erste von der ersten Ordnung und die zweite von der zweiten Ordnung unendlich-klein ist.

Als zweites Beispiel mag die gleichförmige Bewegung auf einem Kreise dienen, gemäß Fig. 45.

Der Bogen $\widehat{PP''}$ hat hier dieselbe Länge wie die Strecke PU. Bezeichnet man die konstante Geschwindigkeit der Kreisbewegung mit c, so ist $PU = \widehat{PP''} = c\tau$. Der Bogen $\widehat{PP''}$ gehört zum Mittelpunktswinkel ε und hat demnach für r als Radius den Wert $r \cdot arc\, \varepsilon$ oder kürzer $r \cdot \varepsilon$. Aus der Gleichung $c\tau = r\varepsilon$ folgt, daß $\frac{\varepsilon}{\tau} = \frac{c}{r}$ einen endlichen Wert hat, d. h. ε ist für $\lim \tau = 0$ unendlich-klein von der ersten Ordnung in Bezug auf τ.

Gemäß der Gleichung:

$$\sin \varepsilon = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\varepsilon^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots$$

hat die Sehne $PP'' = 2r \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2}$ in zweiter Annäherung den Wert $2r \cdot \frac{\varepsilon}{2} = r\varepsilon$, welcher mit dem Werte für den Bogen PP'' und für die Strecke PU genau übereinstimmt. Demgemäß ist das Dreieck PUP'' bei der angenommenen Genauigkeit über UP'' als Basis gleichschenklig, und man hat demnach:

$$\tfrac{1}{2} UP'' = PU \sin \frac{\varepsilon}{4} = r\varepsilon \sin \frac{\varepsilon}{4}.$$

Entwickelt man $\sin \frac{\varepsilon}{4}$ nach obiger Gleichung für $\sin \varepsilon$ unter Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung, so erhält man:

$$UP'' = \tfrac{1}{4} r \varepsilon^2$$

oder, falls man ε durch die Gleichung $r\varepsilon = c\tau$ fortschafft,

$$UP'' = \frac{1}{2} \frac{c^2}{r} \tau^2.$$

Auch hier gelangt man für $\lim \tau = 0$ erst nach Division durch τ^2 zu der endlichen Größe $\frac{1}{2} \frac{c^2}{r}$.

Die Richtung der Abweichung ist hier senkrecht zur Bahn, da $\measuredangle\, PUP'' = 90^0 - \frac{1}{4}\varepsilon$ den Grenzwert 90^0 erhält, wenn ε mit τ zugleich die Grenze Null erreicht.

Als drittes Beispiel mag die gleichmäßig-geänderte Bewegung auf einem Kreise dienen, gemäß Fig. 46.

Trägt man auf der Tangente von P aus ein Stück PQ ab, welches die Länge des Bogens PP'' hat, so ist:

$$[UP''] = [UQ] + [QP''].$$

$[UQ]$ hat die Richtung der Tangente und den Wert $\frac{1}{2} b \tau^2$, da $PQ = \widehat{PP''}$ den Wert $\frac{1}{2} v \tau + b \tau^2$ hat, falls man wieder die Beschleunigung der Bewegung mit b bezeichnet.

$[QP'']$ erhält beim Grenzübergange, wie das vorige Beispiel zeigt, die

Fig. 45.

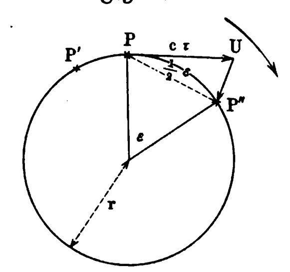
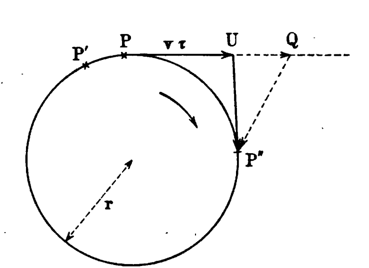


Fig. 46.



Richtung der Normale und den Wert $\frac{1}{2} \frac{c^2}{r} \tau^2$, falls c die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung bezeichnet, bei welcher in der Zeit τ der Weg $PQ = v\tau + \frac{1}{2} b \tau^2$ durchlaufen wurde. Man hat demnach $c = \frac{PQ}{\tau} = v + \frac{1}{2} b \tau$ und $c^2 = v^2 + v b \tau + \frac{1}{4} b^2 \tau^2$, d. h. für $lim\, \tau = 0$ ist $c^2 = v^2$, so daß $\frac{QP''}{\tau^2}$ beim Grenzübergange den Wert $\frac{1}{2} \frac{v^2}{r}$ erhält.

Die Abweichung setzt sich also hier aus den beiden Seitenabweichungen $[\frac{1}{2} b \tau^2]$ in der Richtung der Tangente und $\left[\frac{1}{2} \frac{v^2}{r} \tau^2\right]$ in der Richtung der Normalen zusammen, so daß sie leicht konstruiert werden kann.

Die Betrachtungen des dritten Beispiels lassen sich zunächst auf jede ungleichförmige Bewegung, deren Bahn ein Kreis ist, übertragen, da jede Bewegung in zweiter Annäherung als gleichmäßig-geänderte Bewegung aufgefaßt werden darf, man hat nur b durch den Wert j für die Stelle P zu ersetzen.

Durch Einführung des Krümmungskreises läßt sich endlich der Übergang zu jeder beliebigen Bewegung herstellen, man hat nur den konstanten Radius r des Kreises durch den variabeln Radius ϱ des Krümmungskreises zu ersetzen.

Demgemäß gilt für jede beliebige Bewegung, daß sich die Abweichung aus zwei Seitenabweichungen zusammensetzen läßt, von denen die eine die Richtung der Tangente und den Wert $\frac{1}{2} j \tau^2$ und die andere die Richtung der Normalen und den Wert $\frac{1}{2} \frac{v^2}{\varrho} \tau^2$ hat. 31)

Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem Ergebnisse auf S. 91, so sieht man, daß die Komponenten der Abweichung aus den entsprechenden Komponenten der Beschleunigung entstehen, wenn man diese mit $\frac{1}{2}\tau^2$ multipliziert und daß demnach Fig. 43 auch für die Herstellung der gesamten Abweichung gilt, falls man sie im Maßstabe $\frac{1}{2}\tau^2 : 1$ verkleinert denkt. Für den Wert der Abweichung, deren Richtung mit der Beschleunigung übereinstimmt, findet man $\frac{1}{2} j_G \tau^2$.

Daraus schließt man, daß die Bewegung, deren Weg durch die Abweichung dargestellt wird, als gleichmäßig-geänderte Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 und der Beschleunigung j_G aufgefaßt werden muß.

Bei einer beliebigen Bewegung geschieht also der Übergang vom Bahnpunkte P nach dem unendlich-nahen Bahnpunkte P'' in der Zeit τ so, daß sich mit der Verlegung $[v\,\tau]$ in Richtung der Tangente, welche einer Urbewegung mit der Geschwindigkeit v entspricht, nach dem Parallelogrammprincipe eine Verlegung $[\frac{1}{2} j_G \tau^2]$ in bestimmter Richtung vereinigt, welche einer gleichmäßig-geänderten Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 und der Beschleunigung j_G entspricht. Ist W zur Zeit t in P, so ist v die Geschwindigkeit zur Zeit t bezw. im Punkte P und j_G die Gesamtbeschleunigung zur Zeit t bezw. im Punkte P.

Ist bei einer Bewegung diese Auffassung des Überganges von P zu P'' für eine endliche Zeit t berechtigt, so hat man die Vereinigung der Bewegungen $s = ct$ und $s = \frac{1}{2} b t^2$ auf zwei geradlinigen Bahnen mit gemeinsamem Nullpunkte durchzuführen. Dabei erhält man (vergl. S. 84) eine Parabel als Bahn einer Wurfbewegung.

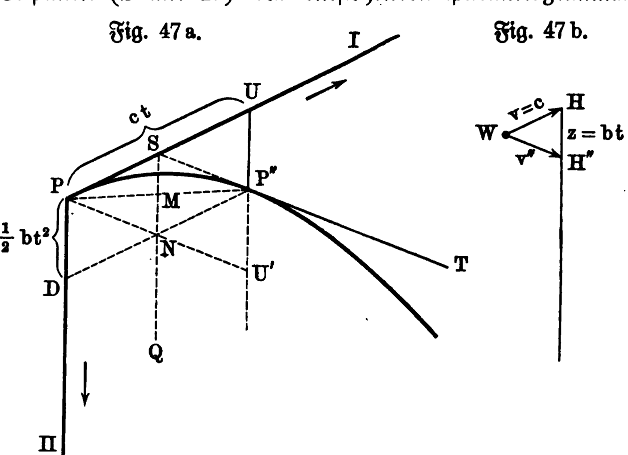
Demgemäß erscheint eine beliebige Bewegung, welche sich in erster Annäherung als eine Kette aneinander gereihter Urbewegungen darstellt, in zweiter Annäherung als eine Kette aneinander gereihter Wurfbewegungen, so daß die Bahn hier aus unendlich-kleinen Parabelbogen zusammengesetzt gedacht werden muß.

27. Genauere Betrachtung der zweiten Annäherung für eine beliebige Bewegung. Die Wurfbewegung zeigt uns, gewissermaßen in unendlich-starker Vergrößerung, wie eine beliebige Bewegung in zweiter Annäherung auf einem Elemente aussieht. Wir betrachten deshalb die Wurfbewegung noch etwas genauer.

In Fig. 47 stellt $[UP'']$ die Abweichung für P nach Ablauf der Zeit t dar, es ist $PU = ct$ und $UP'' = \frac{1}{2} b t^2$, wobei statt g des Vergleiches wegen b geschrieben ist. Am Hodographen, welcher hier eine Parallele zu II ist, hat man $WH = c$ und $HH'' = bt$. Verlängert man nun UP'' um sich selbst bis U', so hat UU' die Länge bt^2, und es ist $\triangle PUU' \sim \triangle WHH''$ und zwar für den Modul $t : 1$. Da beide Dreiecke ähnlich liegen, so ist $PU' \parallel WH''$ und demnach giebt PU' die Richtung der Tangente $P''T$ in P'' an, weil $[v'']$ am Hodographen deren Richtung hat. Der Schnittpunkt S von PU und $P''T$ liegt in der Mitte von PU, weil $P''T$ als Parallele zu PU' das Teilungsverhältnis $1 : 1$ von UU' auf UP überträgt. Zieht man noch $SQ \parallel UU'$, so wird auch PP'' in M und PU' in

N halbiert. Da II die Achsenrichtung der Parabel bezeichnet, so sind UU' und SQ, welche zu II parallel sind, Durchmesser der Parabel. Man gelangt demnach zu dem Satze: „Zwei Tangenten einer Parabel (PU und $P''T$) scheiden sich auf **dem** Durchmesser (SQ) der Parabel, welcher ihre Berührungssehne (PP'') halbiert“ oder: „Zieht man durch die Berührungspunkte (P und P'') zweier Parabeltangenten zu diesen Parallelen, so liegen die anderen beiden Eckpunkte (S und N) des entstehenden Parallelogramms auf einem Durchmesser der Parabel.“ Von diesem nützlichen Satze aus, der sich auch rein-geometrisch beweisen läßt, kann man rückwärts zu den Beziehungen gelangen, von denen wir ausgingen.

Fig. 47a. Fig. 47b.



Er bildet die Grundlage für die Darstellung einer Bewegung in zweiter Annäherung. Will man diese Annäherung von der früher gegebenen (vergl. S. 68) zweiten Annäherung unterscheiden, so kann man sie **vollständig** nennen, weil sie die Änderung von **Wert und Richtung** der Geschwindigkeit (j_T und j_N) berücksichtigt, während die früher gegebene nur der Gleichung $lim\left[\frac{v''-v}{\tau}\right]=j$ bezw. $=j_T$ entsprach und also nur die Änderung des Geschwindigkeitswertes auf der Bahn (Tangentenrichtung) darstellte.

Als Beispiel für eine solche vollständige Annäherung wählen wir zunächst die gleichförmige Bewegung auf einem Kreise, welcher mit der Geschwindigkeit c in der Zeit T durchlaufen werden soll. Dieses Beispiel gestattet, die Genauigkeit der Darstellung leicht zu veranschaulichen. Da hier $\frac{2r\pi}{T}=c$ ist, so hat der Radius des Kreises den Wert $\frac{cT}{2\pi}$.

Teilen wir die Zeit T in n gleiche Teile von der Dauer τ, so bewegt sich W in der Zeit τ auf einem Bogen, der dem Mittelpunktswinkel $\varepsilon=\frac{360^0}{n}$ bezw. $\frac{2\pi}{n}$ entspricht. Der Hodograph der Bewegung hat demnach die Gestalt, welche Fig. 48 (a. f. S.) für $n=16$ darstellt. Um die Bewegung in zweiter Annäherung darzustellen, bilden wir in P_0 das $\triangle\ WH_0H_1$ durch $\triangle\ P_0H_0'H_1'$ ähnlich ab nach dem Modul $1:\tau$, so daß $P_0H_0'=c\tau$ ist, und zwar in ähnlicher Lage zu WH_0H_1.

Durch die Mitte P_1 von $H_0'H_1'$ ziehen wir eine Parallele zu P_0H_1' und schneiden auf ihr $P_1H_1''=\tau\ .\ WH_1=P_0H_1'$ ab, so daß an ihr $\triangle\ WH_1H_2$

durch $\triangle P_1 H_1'' H_2'$ nach dem Modul $1 : \tau$ in ähnlicher Lage abgebildet werden kann. Durch die Mitte P_2 von $H_1'' H_2'$ ziehen wir nun eine Parallele zu $P_1 H_2'$ und schneiden auf ihr $P_2 H_2'' = \tau \,.\, WH_2 = P_1 H_2'$ ab, so daß an

Fig. 48 a.

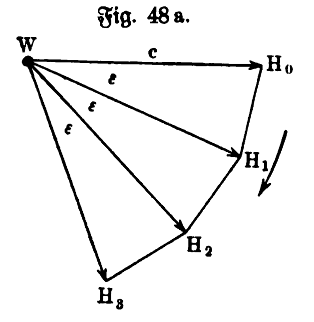
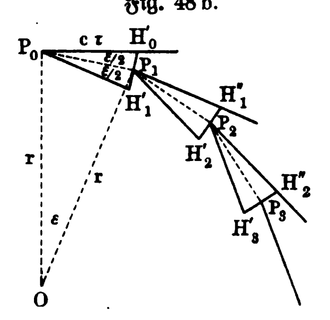


Fig. 48 b.



ihr $\triangle WH_2 H_3$ durch $\triangle P_2 H_2'' H_3'$ nach dem Modul $1 : \tau$ in ähnlicher Lage abgebildet werden kann, u. s. f.

Parabelbogen $P_0 P_1$, $P_1 P_2$, $P_2 P_3, \ldots$, für welche $P_0 H_0'$, $P_1 H_1''$, $P_2 H_2'', \ldots$ Tangenten sind, stellen dann die Bewegung in zweiter Annäherung dar.

Der Bogen $P_0 P_1$ entsteht als Wurfbewegung, indem W auf $P_0 H_0'$ gleichförmig in der Zeit τ mit der Geschwindigkeit WH_0 fortschreitet und zugleich in der Richtung $H_0' H_1'$ um die Strecke $H_0' P_1$ gleichmäßig-beschleunigt fällt mit der Beschleunigung $\frac{H_0 H_1}{\tau}$. Der Bogen $P_1 P_2$ entsteht als Wurfbewegung, indem W auf $P_1 H_1''$ gleichförmig in der Zeit τ mit der Geschwindigkeit WH_1 fortschreitet und zugleich in der Richtung $H_1'' H_2'$ gleichmäßig-beschleunigt fällt mit der Beschleunigung $\frac{H_1 H_2}{\tau}$ u. s. w.

Um diese Annäherung mit der genauen Bewegung zu vergleichen, berechnen wir den Radius r des Kreises, welcher durch P_0, P_1, $P_2, \ldots$ geht. Man hat $\frac{1}{2} P_0 P_1 = r \,.\, \sin \frac{\varepsilon}{2}$ und $P_0 P_1 = c\tau \,.\, \cos \frac{\varepsilon}{2}$, d. h. $r = \frac{c\tau \cos \frac{\varepsilon}{2}}{2 \sin \frac{\varepsilon}{2}}$.

Erweitert man mit n, um $n\tau = T$ einführen zu können, so ist:

$$r = cT \cdot \frac{\cos \frac{\varepsilon}{2}}{2 n \sin \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Die Gleichung:

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{48} \varepsilon^3 + \cdots$$

giebt:

$$n \sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}(n\varepsilon) - \frac{1}{48}(n\varepsilon) \,.\, \varepsilon^2 + \ldots = \frac{1}{2}(2\pi) - \frac{1}{48}(2\pi) \,.\, \varepsilon^2 + \ldots$$

Ebenso ist:

$$\cos\frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \cdots$$

und man hat:

$$\frac{\cos\frac{\varepsilon}{2}}{2n\sin\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \cdots}{2\pi\left(1 - \frac{1}{24}\varepsilon^2 + \cdots\right)} = \frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{24}\varepsilon^2 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{1}{12}\varepsilon^2 + \cdots\right)$$

Demnach ist:

$$r = \frac{cT}{2\pi}\left(1 - \frac{1}{12}\varepsilon^2 + \cdots\right).$$

Für $\lim n = \infty$ bezw. $\lim \tau = 0$ oder $\lim \varepsilon = 0$ ist:

$$r = \frac{cT}{2\pi},$$

d. h. man gelangt zu dem genauen Werte.

Es ist sehr nützlich, hiermit die erste Annäherung zu vergleichen, bei der die Bewegung aus Urbewegungen erwächst. Hier muß man annehmen, daß $P_0 P_1$ mit der Geschwindigkeit WH_0 gleichförmig durchlaufen wird (Fig. 49),

Fig. 49 a.

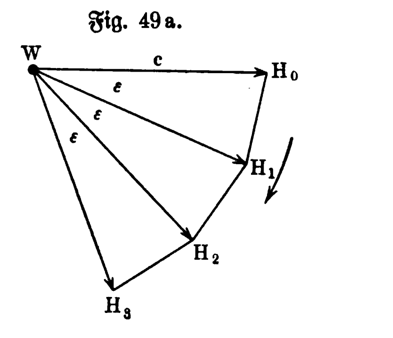
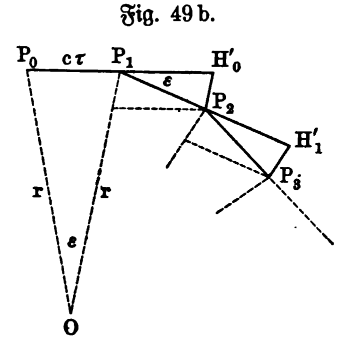


Fig. 49 b.



und daß in P_1 plötzlich die Geschwindigkeit $[H_0 H_1]$ dazukommt, so daß nun die Geschwindigkeiten $[WH_0]$ und $[H_0 H_1]$ während der Zeit τ zugleich auftreten, um das Bahnstück $P_1 P_2$ zu bilden, welches wiederum mit der Geschwindigkeit $[WH_1]$ gleichförmig durchlaufen wird. In P_2 tritt dann plötzlich die Geschwindigkeit $[H_1 H_2]$ hinzu, so daß nun die Geschwindigkeiten $[WH_1]$ und $[H_1 H_2]$ während der Zeit τ zugleich auftreten, um das Bahnstück $P_2 P_3$ zu bilden u. s. f.

In Fig. 49 sind $\triangle P_1 H_0' P_2$ und $\triangle WH_0 H_1$, $\triangle P_2 H_1' P_3$ und $\triangle WH_1 H_2$ u. s. f. ähnlich gelegen bei einer Abbildung nach dem Modul $1 : \tau$.

Wir stellen auch hier die Genauigkeit fest.

Es ist:

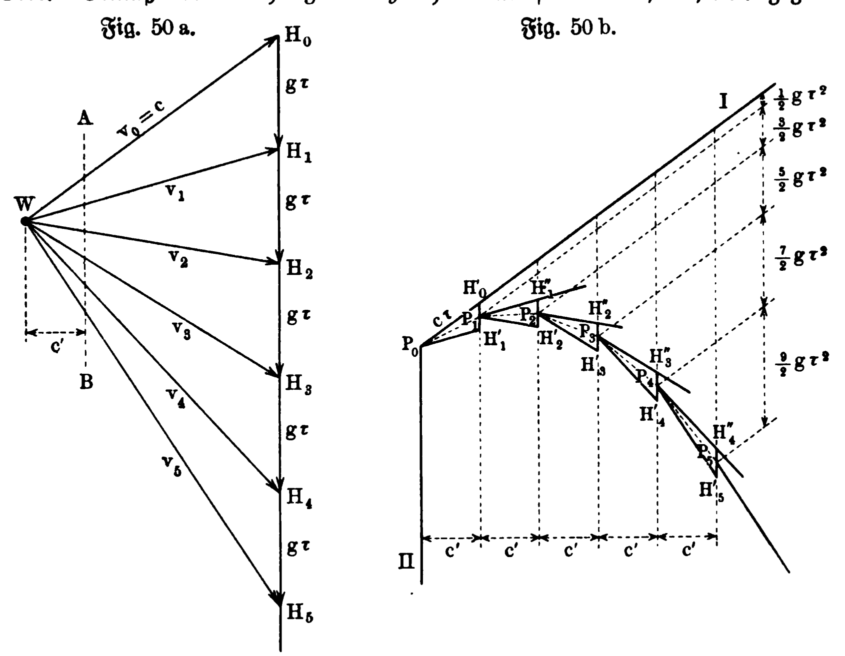
$$r = \frac{c\tau}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{c\tau}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \frac{n}{n} = c\,T \cdot \frac{1}{2\,n\sin\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$= \frac{c\,T}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{24}\varepsilon^2 + \cdots\right)$$

Für $\lim n = \infty$ bezw. $\lim \tau = 0$ oder $\lim \varepsilon = 0$ erhält man auch hier den genauen Wert:

$$r = \frac{c\,T}{2\pi}.$$

Als weiteres Beispiel für die Behandlung einer zweiten Annäherung wählen wir die Wurfbewegung mit der Geschwindigkeit [c] von beliebiger Richtung und der Beschleunigung [g] in der Richtung nach dem Mittelpunkte der Erde. Gemäß der Gleichung $v = g\,t$ hat man für $t = \tau,\ 2\tau, \ldots$ gegeben



$v = g\,\tau,\ 2\,g\,\tau, \ldots$ Diesen Beziehungen entspricht der Hodograph in Fig. 50, nach welchem die angenäherte Bahn $P_0,\ P_1,\ P_2 \ldots$ gezeichnet ist. Die Parallele AB zum Hodographen in Fig. 50 verkürzt die Geschwindigkeiten im Verhältnis $1 : \tau$. Hier sind die Punkte $P_0,\ P_1,\ P_2 \ldots$ in genau richtiger Lage, wie aus der Betrachtung ihrer Horizontalprojektion und ihrer Senkung gegen I unmittelbar hervorgeht. Die Parabelbogen $P_0P_1,\ P_1P_2, \ldots$ sind hier Stücke einer und derselben Parabel.

Wir fügen auch hier zum Vergleiche die erste Annäherung hinzu, welche Fig. 51 darstellt. Die Horizontalprojektionen der Punkte $P_0,\ P_1,\ P_2, \ldots$ liegen auch hier richtig.

Für die Senkung gegen I gilt:

Dauer:	Senkung:
$0 \ldots\ldots\ldots \tau$	0
$\tau \ldots\ldots\ldots 2\tau$	$g\tau^2$
$2\tau \ldots\ldots\ldots 3\tau$	$2g\tau^2$
$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$
$(n-1)\tau \ldots n\tau$	$(n-1)g\tau^2$.

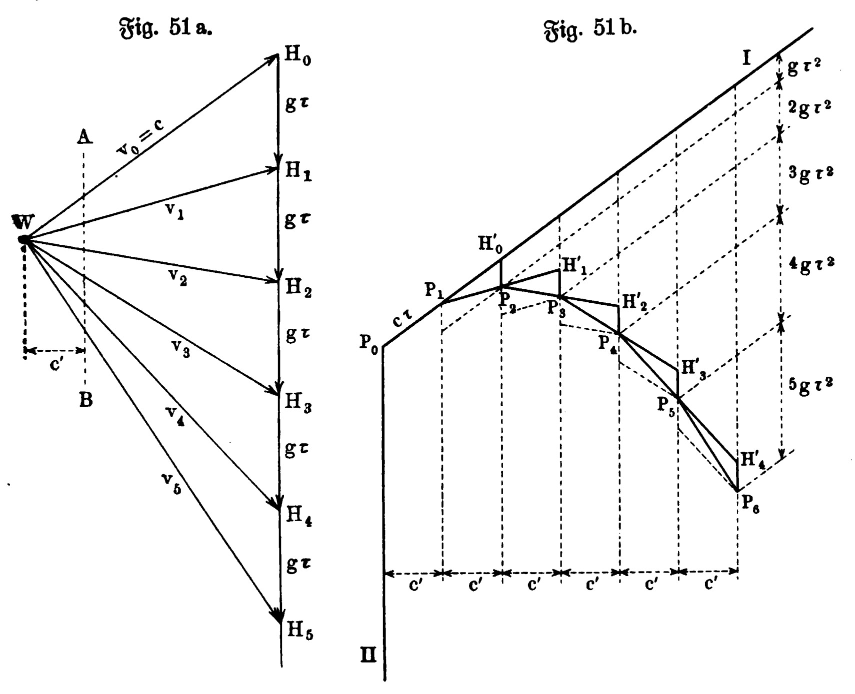
Demgemäß ist die gesamte Senkung von P_n gegeben als:

$$[0+1+2+\cdots(n-1)]\,g\tau^2 = \tfrac{1}{2}n(n-1)\,g\tau^2$$
$$= \frac{g}{2}(n\tau)^2 - \frac{g}{2}(n\tau)\tau = \frac{g}{2}t^2 - \frac{g}{2}t\tau.$$

Für $\lim n = \infty$ hat auch hier die Senkung den Wert $\frac{1}{2}gt^2$.

Diese Beispiele zeigen, daß sowohl die erste als auch die zweite Annäherung bei einem geeigneten Grenzübergange genaue Ergebnisse liefern,

Fig. 51 a. Fig. 51 b.



obwohl bei jeder eine ganz verschiedene Auffassung von der Natur einer Bewegung, welche keine Urbewegung ist, zur Geltung kommt.

Der ersten Annäherung liegt die Vorstellung zu Grunde, daß die Geschwindigkeit, welche der Beschleunigung bezw. der Abweichung entspricht, plötzlich auftritt und ihrem Werte nach proportional zu τ ist ($j\tau$).

Der zweiten Annäherung liegt die Vorstellung zu Grunde, daß sich jene Geschwindigkeit $(j\tau)$ stetig bildet.

Denkt man die Beschleunigung durch eine Kraft bewirkt, so hat man sich dieselbe im ersten Falle periodisch wirksam (pulsierend) zu denken. Sie erteilt dem Punkte W immer nach Ablauf der Zeit τ eine zu τ proportionale Geschwindigkeit $j\tau$ von bestimmter Richtung, so daß sie für $\lim \tau = 0$ in jeder endlichen, noch so kleinen Zeit, unendlich oft pulsiert.

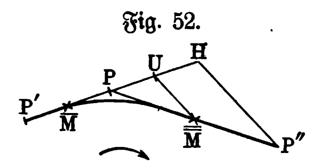
Bei der zweiten Anschauung muß die Kraft stetig wirksam gedacht werden, so daß sie in der Zeit τ eine Geschwindigkeit entstehen läßt, welche während dieser Zeit von 0 bis $j\tau$ wächst.

Beide Vorstellungen sind zulässig. Die erste liegt dem Physiker und Techniker (namentlich in Hinblick auf die neueren Auffassungen der Aggregatzustände) näher, weil sie anschaulich ist, die zweite dem Mathematiker, weil sie die hier auftretenden Funktionen stetig erscheinen läßt und demnach ihre leichte Verwendbarkeit sichert.

Bei der ersten Vorstellung ist der Hodograph, ebenso wie für die Bewegung auf einem endlichen Streckenzuge, etwa wie eine Uhr mit springendem Zeiger (von veränderlicher Größe) aufzufassen. Die einfachste Bewegung auf einem endlichen Streckenzuge konnten wir uns durch eine Reihe von Stößen hervorgebracht denken und uns dabei die Verhältnisse vor und nach jedem Stoße deutlich veranschaulichen, während der kurze, aber verwickelte Stoßvorgang selbst nur in seiner Wirkung, nämlich in der Änderung der Geschwindigkeit, nach Wert und Richtung erschien. Darum bestand der Hodograph hier nur aus einzelnen Punkten, deren fehlender Verbindung die Zeit eines Stoßvorganges entspricht. Beim Grenzübergange bleibt diese ganze Auffassung bestehen.

Bei der zweiten Vorstellung ist der Hodograph eine stetig erzeugte Linie. Schließlich[1]) mag noch darauf hingewiesen werden, daß auch die erste und die zweite Annäherung einer Bewegung unmittelbar in Beziehung gesetzt werden können. Stellen $P'P$ und PP'' in Fig. 52 zwei aufeinander folgende sehr kleine, aber endliche Bahnstücke dar, welche bezw. mit den Durchschnittsgeschwindigkeiten $\overline{v}$ und $\overline{\overline{v}}$ durchlaufen werden, so ist

Fig. 52.



$P'P = \overline{v}\tau$ und $PP'' = \overline{\overline{v}}\tau$. Diese Geschwindigkeiten $\overline{v}$ und $\overline{\overline{v}}$ sind von den Geschwindigkeiten v', v und v'' in P', P und P'' verschieden, sie entsprechen bezw. Punkten $\overline{M}$ und $\overline{\overline{M}}$ zwischen P' und P bezw. P und P''. Will man also die Abweichung darstellen, so hat man $\overline{M}U = P'P$ abzutragen und U mit $\overline{\overline{M}}$ zu verbinden; die Abweichung entsteht dann als $[U\overline{\overline{M}}]$. Dagegen ist der entsprechende Teil des Hodographen gemäß $[P'P]$

[1]) Diese Betrachtungen müssen etwas ausführlicher sein, weil anerkannte Lehrbücher bei der Behandlung der ersten und der zweiten Annäherung vielfach Unklarheiten, ja sogar Fehler enthalten.

und $[PP'']$ zu bilden, so daß dieser für $PH = P'P$ durch $\triangle\, PHP''$ ähnlich abgebildet wird nach dem Modul $\tau : 1$.

Beim Grenzübergang rücken $\overline{M}$ und $\overline{\overline{M}}$ bezw. in die Mitten von $P'P$ und PP'', so daß $U\overline{\overline{M}} = \frac{1}{2} HP''$ und $U\overline{\overline{M}} \,//\, HP''$ ist, während sich der entsprechende Parabelbogen der zweiten Annäherung zwischen $\overline{M}$ und $\overline{\overline{M}}$ bildet.

28. Die Grundmethode für die Behandlung von Bewegungen. Die Gesamtheit der bisherigen Untersuchungen, bei welchen die Bahn der Bewegung als gegeben vorausgesetzt wurde, fassen wir unter dem Namen Grundmethode zusammen. So unentbehrlich sie ist, um über die Natur einer beliebigen Bewegung Aufschluß zu erhalten, so ungeeignet ist sie doch meist in der bisher gegebenen Form für die Darstellung bestimmter Bewegungen der Außenwelt. Um sie hierfür völlig geeignet zu machen, bildet man sie durch Einführung von Hülfsbahnen um. Zwei solche Umbildungen sind besonders wichtig, sie mögen Projektionsmethode und Polarmethode heißen, weil sie bezw. die Projektionen des sich bewegenden Punktes und dessen Abstände von einem festen Punkte (Pol) benutzen.

29. Die Projektionsmethode für die Behandlung von Bewegungen. Wenn die Bahn der Bewegung eben ist, so führen wir in der Ebene der Bewegung ein Parallel-Koordinatensystem ein mit den Achsen OX und OY und denken den Punkt W in jedem Zeitpunkte sowohl auf die X-Achse als auch auf die Y-Achse projiziert. Bezeichnen wir die Projektionen des Bahnpunktes P, in dem sich W augenblicklich befindet, auf die beiden Achsen bezw. mit P_x und P_y, so gestattet die Angabe der Lage von P_x und P_y wiederum, die Lage von P zu bestimmen. Hat man also statt der einen Stellungsgleichung $s = f(t)$, welche für die Bahn der Bewegung gilt und auf ihr die Stellung P bestimmt, zwei Gleichungen $s_x = f_x(t)$ und $s_y = f_y(t)$ gegeben, welche bezw. die Stellung von P_x auf der X-Achse und von P_y auf der Y-Achse bestimmen, so giebt dieses System von Stellungsgleichungen für jeden Zeitpunkt die Lage von P_x und P_y und damit auch die Lage von P, d. h. es bestimmt die Bewegung von W einschließlich der Bahn.

Als Beispiel kann die Wurfbewegung dienen, für welche $s_x = ct$ und $s_y = \frac{1}{2} g t^2$ ist. Hier erwächst die Bewegung auf der Parabel aus zwei geradlinigen Seitenbewegungen, und dies kennzeichnet überhaupt unsere Methode, bei welcher die geradlinigen Bewegungen der Projektionen von W auf zwei Achsen als Seitenbewegungen der Bewegung von W betrachtet werden. Diese Seitenbewegungen bilden ein Verschiebungssystem.

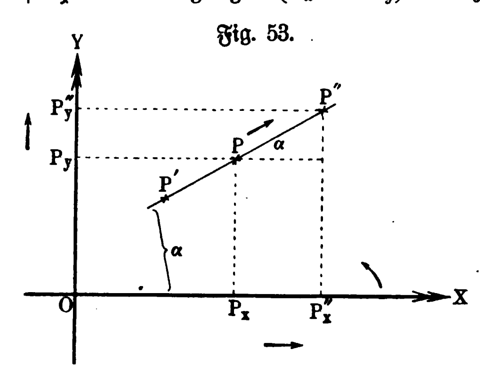
Ist die Bahn der Bewegung gewunden, so muß man ein räumliches Parallel-Koordinatensystem einführen mit den Achsen OX, OY, OZ. Das System der Stellungsgleichungen besteht hier aus drei Gliedern $s_x = f_x(t)$, $s_y = f_y(t)$, $s_z = f_z(t)$.

Statt s_x, s_y, s_z kann man auch einfacher bezw. x, y, z schreiben.

Die Verlegung $[OW] = [r]$ von W erwächst hier stets aus den Verlegungen $[x]$, $[y]$, $[z]$ nach dem Parallelogrammprincipe; die Seitenbewegungen bilden ein Verschiebungssystem.

Um die Geschwindigkeit der Bewegung mit den Geschwindigkeiten der Projektionsbewegungen (P_x und P_y) in Beziehung zu setzen, stellen wir folgende Betrachtung an, unter der Voraussetzung rechtwinkliger Achsen.

Fig. 53.



In der Ebene YOX liegt eine Gerade (vergl. Fig. 53), auf der sich W in der Zeit τ von P nach P'' bewegt, während die Projektion von W auf die X-Achse gleichzeitig von P_x nach P''_x und die Projektion von W auf die Y-Achse gleichzeitig von P_y nach P''_y geht.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Bewegung $\frac{PP''}{\tau}$ hängt mit der Durchschnittsgeschwindigkeit der Bewegung auf der X-Achse, d. h. mit $\frac{P_x P''_x}{\tau}$, da $PP'' \cdot \cos\alpha = P_x P''_x$ ist, zusammen durch die einfache Gleichung:

$$\frac{PP''}{\tau} \cdot \cos\alpha = \frac{P_x P''_x}{\tau}.$$

Geht man zu den betreffenden Geschwindigkeiten in P über, so ist demnach $v \cdot \cos\alpha = v_x$, falls man die Geschwindigkeit für die Bewegung auf der X-Achse mit v_x bezeichnet. Stellt man $[v]$, welches die Richtung PP'' hat, graphisch dar und ebenso $[v_x]$, welches die Richtung $P_x P''_x$ hat, so erhält man den Satz: Die Projektion der Geschwindigkeit der Bewegung auf die X-Achse ist die Geschwindigkeit der Projektionsbewegung auf der X-Achse.

Da jede Bewegung für ein Zeitelement als Urbewegung aufgefaßt werden kann, so gilt dieser Satz (vergl. Fig. 54) allgemein und zwar für jede Achse.

Man hat also:

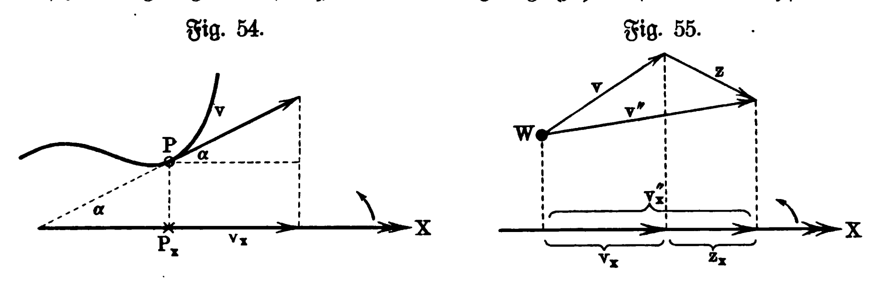
$$\left.\begin{aligned} v_x &= v\cos\alpha \\ v_y &= v\sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 32\text{a)}$$

Im Raum gilt ebenso für rechtwinklige Achsen, falls $[v]$ mit diesen bezw. die Winkel α, β, γ bildet:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v\cos\alpha \\ v_y &= v\cos\beta \\ v_z &= v\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 32\text{b)}$$

Die Geschwindigkeit von W erwächst hier stets aus den Geschwindigkeiten der Projektionsbewegungen nach dem Parallelogrammprincipe.

Um auch noch die Beschleunigung der Bewegung mit den Beschleunigungen der Projektionsbewegungen in Beziehung zu setzen, betrachten wir Fig. 55. Die Beschleunigung der Bewegung ist der Grenzwert von $\left[\frac{z}{\tau}\right]$, die Beschleunigung der Projektionsbewegung auf der X-Achse ist der Grenzwert von $\left[\frac{z_x}{\tau}\right]$. Man sieht unmittelbar, daß hier der Satz gilt: Die Projektion der Beschleunigung der Bewegung auf die X-Achse ist die Beschleunigung der Projektionsbewegung (j_x) auf der X-Achse.



Natürlich gilt der Satz für jede Achse. Bildet also $[j_G]$ mit den rechtwinkeligen Achsen die Winkel $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, so ist bei entsprechender Bezeichnung:

$$\left.\begin{aligned} j_x &= j_G \cos\bar{\alpha} \\ j_y &= j_G \cos\bar{\beta} \\ j_z &= j_G \cos\bar{\gamma} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 33)$$

Für die Gruppen x, y, z und r, v_x, v_y, v_z und v, j_x, j_y, j_z und j_G gelten die Entwickelungen der Einleitung, S. 24 u. f. Dabei werden die Zeichen $V^{(x)}$ und V_x ohne Unterschied gebraucht, je nachdem ihre Verwendung zweckmäßig erscheint.

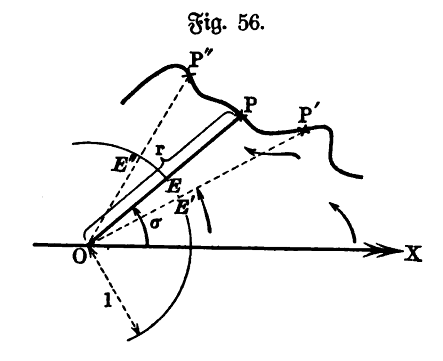
Die Größen s_x oder x, v_x und j_x stehen in derselben Beziehung zu einander wie s, v und j, vergl. S. 69 u. f.; dasselbe gilt für die Y-Gruppe und für die Z-Gruppe.

Der Kern der Projektionsmethode ist die Verwendung eines Verschiebungssystems von geradlinigen Bewegungen, welche sich als Seitenbewegungen der zu behandelnden Bewegung (Mittelbewegung) auffassen lassen.

30. Die Polarmethode für die Behandlung der Bewegungen. Bei der Polarmethode denkt man sich W mit einem festen Punkt O, dem Pole, verbunden und betrachtet OW als Vektor. Nennt man dessen Länge r, so muß $r = f(t)$ gegeben sein, wenn die Größe r zu jeder Zeit bekannt sein soll. Kennt man außerdem zu jeder Zeit die Lage von $[OW]$ im Raume, so ist die Lage von W zu jeder Zeit bestimmt. Für Bewegungen auf ebener Bahn ist die Lagenänderung von $[OW]$ als Drehung darstellbar, während sie für gewundene Bahnen als Schwenkung erscheint.

Nimmt man für eine ebene Bahn in deren Ebene den Pol O an, und legt man ferner durch ihn für die Winkelmessung eine Achse OX, so ist die Lage vom Punkt W, wenn er sich in P befindet, durch $OP = r$ und $\measuredangle\, POX = \sigma$ bestimmt. (Vergl. Fig. 56.)

Fig. 56.

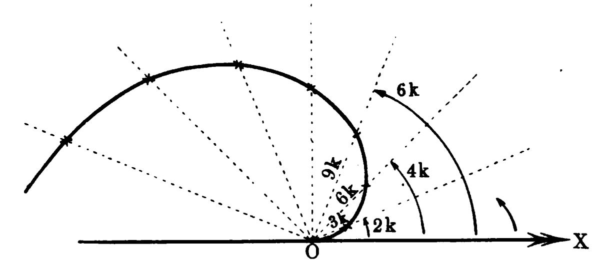


Um die Lage von W für jeden Zeitpunkt t zu bestimmen, sind also zwei Stellungsgleichungen $r = f_r(t)$ und $\sigma = f_\sigma(t)$ nötig. Dabei mag σ als Winkelweg (Arcus) aufgefaßt werden, wozu man sich am besten $OE = 1$ auf $[OW]$ abgetragen denkt, um E auf dem Einheitskreise verfolgen zu können.

Als Beispiel diene $r = 3t$ und $\sigma = 2t$.

Da $\sigma = 2\pi$ für $t = \pi$ eintritt, so ist es zweckmäßig, für den Entwurf einer Tabelle t nach Bruchteilen von π fortschreiten zu lassen. Setzt man $\frac{\pi}{n} = k$, so ergiebt sich für $t = 0, k, 2k, \ldots$:

Fig. 57.

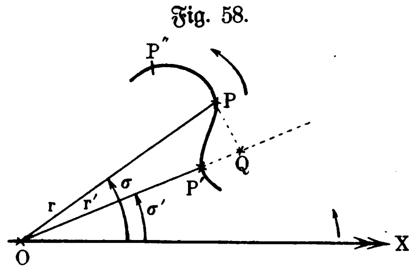


t	r	σ
0	0	0
k	$3k$	$2k$
$2k$	$6k$	$4k$
$3k$	$9k$	$6k$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Dieser Tabelle entspricht Fig. 57, sie ist für $n = 16$ bezw. für $k = \frac{\pi}{16}$ durchgeführt. Die Bahn ist eine Archimedische Spirale. Vergl. das Beispiel 2 auf S. 84.

Um die Geschwindigkeit $[v]$ zu bestimmen, tragen wir in Fig. 58 auf $OP' = r'$ ab $OQ = OP = r$ und ziehen die Strecke QP. Man hat dann:

Fig. 58.



$$P'Q = r - r'$$

und

$$QP = 2r \sin\frac{\sigma - \sigma'}{2} = r(\sigma - \sigma') + \cdots$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeiten

$$\frac{P'Q}{\tau} = \frac{r - r'}{\tau}$$

und

$$\frac{QP}{\tau} = r\,\frac{\sigma - \sigma'}{\tau} + \cdots$$

gehen für $\lim \tau = 0$ über in die Geschwindigkeiten v_r und $r \,.\, \varphi$, so daß für $v = \lim \left[\frac{P'P}{\tau}\right]$ gilt:

$$[v] \stackrel{\times}{=} [v_r] \stackrel{\times}{+} [r\,\varphi].$$

Dabei bedeutet v_r die Geschwindigkeit, mit der P' im Grenzübergange nach Q rückt, d. h. die Geschwindigkeit von W auf dem Strahle OW. Ist $r = f_r(t)$, so ist also v_r die Ableitung von $f_r(t)$.

Dabei bedeutet ferner φ die Winkelgeschwindigkeit für die Drehung von OW um O und $r\varphi$ die Geschwindigkeit, welche ein Punkt von OW im Abstande r von O bei dieser Drehung hat. Ist $\sigma = f_\sigma(t)$, so ist also φ die Ableitung von $f_\sigma(t)$ und $r \,.\, \varphi = r \,.\, f'_\sigma(t)$.

Demnach hat man, wie Fig. 59 zeigt,

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{v_r^2 + r^2\varphi^2} \\ \text{und}\qquad \cos\varepsilon &= \frac{v_r}{v} \\ \text{und}\qquad \sin\varepsilon &= \frac{r\varphi}{v} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

Dabei bedeutet ε den Winkel, den $[v]$ mit dem Strahle $[OP]$ bezw. $[OW]$ bildet; mit der Achse bildet $[v]$ den Winkel $\sigma + \varepsilon$.

Ergänzt man die X-Achse durch ein Lot auf ihr in O zu einem rechtwinkeligen System YOX, so kann man die Seitengeschwindigkeiten v_x und v_y, welche der Projektionsmethode entsprechen, leicht bestimmen. Man hat:

$$\begin{aligned} v_x &= v\,.\cos(\sigma + \varepsilon) = v\cos\sigma\cos\varepsilon - v\sin\sigma\sin\varepsilon \\ &= v_r\cos\sigma - r\varphi\sin\sigma \\ v_y &= v\,.\sin(\sigma + \varepsilon) = v\sin\sigma\cos\varepsilon + v\cos\sigma\sin\varepsilon \\ &= v_r\sin\sigma + r\varphi\cos\sigma. \end{aligned}$$

Außerdem ist:

$$s_x = x = r\cos\sigma$$

und

$$s_y = y = r\sin\sigma.$$

Umgekehrt ist:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$\cos\sigma = \frac{x}{r}$$

und

$$\sin\sigma = \frac{y}{r}.$$

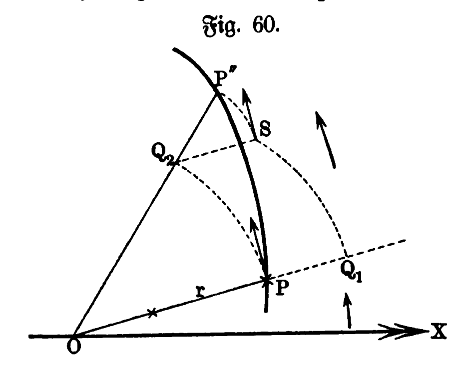
Fig. 59.

$$\begin{aligned} v_r &= v_x\cos\sigma + v_y\sin\sigma \\ r\varphi &= -v_x\sin\sigma + v_y\cos\sigma. \end{aligned}$$

Da $[v]$ die Richtung der Tangente in P hat, so läßt sich die Tangente in P konstruieren, wenn $[v_r]$ und $[r\,\varphi]$ bestimmt werden können. Entsprechendes gilt auch, wenn $[v_x]$ und $[v_y]$ gegeben sind, und überhaupt für jede Zerlegung der Bewegung, welche die Bahn von W erzeugt.

Um die Beschleunigung der Bewegung aus $r = f_r(t)$ und $\sigma = f_\sigma(t)$ herzustellen, verfahren wir folgendermaßen: Die Bewegung auf OP würde W für sich von P nach Q_1 führen, wobei PQ_1 in zweiter Annäherung als $v_r\tau + \frac{1}{2}j_r\tau^2$ erscheint, falls v_r und j_r für die Stelle P gelten. Die Bewegung um O würde P für sich von P nach Q_2 führen, wobei PQ_2 in zweiter Annäherung als $r\varphi\tau + \frac{1}{2}r\iota\tau^2$ erscheint, falls φ und ι für die Stelle P gelten. Dürfte man beide Bewegungen nach dem Parallelogrammprincipe zusammensetzen, so würden sie zusammen P nach S führen, während P thatsächlich nach P'' gelangt. Der Übergang von S nach P'' läßt sich als eine Drehung um Q_2 auffassen. Man hat:

Fig. 60.



$$\widehat{SP''} : \widehat{PQ_2} = SQ_2 : PO,$$

so daß

$$\widehat{SP''} = \frac{\widehat{PQ_2} \cdot SQ_2}{OP} = \frac{(r\varphi\tau + \frac{1}{2}r\iota\tau^2)(v_r\tau + \frac{1}{2}j_r\tau^2)}{r}$$

$$= \varphi\, v_r\tau^2 + \cdots = \tfrac{1}{2}(2\,\varphi\, v_r)\,\tau^2 + \cdots$$

ist und $\widehat{SP''}$ demnach ohne Anfangsgeschwindigkeit mit der Tangentialbeschleunigung $2\,\varphi\, v_r$ durchlaufen gedacht werden kann. Die zugehörige Normalbeschleunigung ist $\frac{v^2}{\varrho}$, wobei $v = \frac{\widehat{SP''}}{\tau}$ und $\varrho = Q_2 S$ zu setzen ist, d. h. sie wird $\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\varphi v_r\tau^2 + \cdots}{\tau}\right)^2 = \frac{\varphi^2 v_r^2}{\varrho}\tau^2 + \cdots$ und erhält also für $\lim\tau = 0$ den Wert Null.

Die Bewegung auf $\widehat{SP''}$ ist demnach bei der gewählten Annäherung als geradlinig aufzufassen, bestimmt durch die Gesamtbeschleunigung $[2\,\varphi\, v_r]$, deren Richtung senkrecht zu $Q_2 S$ bezw. zu OP ist und zwar im Sinne der Bewegung.

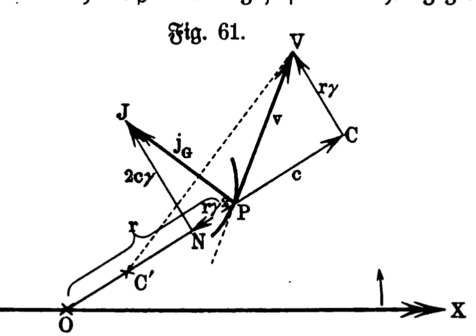
Demnach setzt sich die Gesamtbeschleunigung $[j_G]$ für die Bewegung von W stets aus drei Seitenbeschleunigungen zusammen, der Beschleunigung $[j_r]$ für PQ_1, der Beschleunigung für PQ_2, welche die Tangentialkomponente $r\,\iota$ und die Normalkomponente $r\,\varphi^2$ hat, und der Beschleunigung $[2\,v_r\,\varphi]$, welche senkrecht zu r ist im Sinne der Bewegung. 35)

Sind die Bewegungen auf PQ_1 und PQ_2 gleichförmig, so ist $j_r = 0$

und $r\iota = 0$, d. h. man hat nur $[r\varphi^2]$ und $[2\varphi v_r]$ zu berücksichtigen für $v_r = c$ und $\varphi = \gamma$.

Als Beispiel für diese einfacheren Verhältnisse führen wir die Untersuchung weiter, welche S. 84 gemäß Fig. 36 begonnen wurde. Wir stellen uns vor, daß sich ein Punkt W auf einer gleichförmig rotierenden (γ) Scheibe mit konstanter Geschwindigkeit (c) radial nach außen bewegt; seine Bahn gegen die feste Unterlage ist dann ein Stück einer Archimedischen Spirale, wie sie auch Fig. 57 zeigt. Um die Bewegung genauer zu bestimmen, greifen wir auf Fig. 60 zurück und bilden mit der konstanten Geschwindigkeit c für PQ_1 und der konstanten Winkelgeschwindigkeit γ für PQ_2 zunächst das Dreieck der Geschwindigkeiten aus $[c]$ und $[r\gamma]$ und darauf das Dreieck der Beschleunigungen aus $[r\gamma^2]$ und $[2\gamma c]$ am Punkte P, wie es Fig. 61 zeigt.

Fig. 61.



Trägt man c auch auf der anderen Seite von P ab ($PC' = c$), so ist $\triangle VCC' \sim \triangle PNJ$ nach dem Modul $1 : \gamma$, und demnach ist $\measuredangle PJN = \measuredangle VC'C$. Infolgedessen steht PJ auf VC' senkrecht, so daß die Richtung von $[j_G]$ schon durch das Geschwindigkeitsdreieck bestimmt ist. Die Zerlegung von $[j_G]$ in $[j_N]$, welches senkrecht zu $[v]$ ist, und in $[j_T]$, welches die Richtung von $[v]$ hat, macht keine Schwierigkeiten.

Bei gewissen Aufgaben ist es zweckmäßig, nicht die Linie zu betrachten, welche der Endpunkt von $[OW]$ bei seiner Bewegung erzeugt, sondern die Fläche, welche $[OW]$ selbst beschreibt.

Bezeichnet man die Fläche, welche $[OW]$ zur Zeit t im Sinne der Winkelmessung (σ) mit der X-Achse bildet, entsprechend dem früher für die Stellung benutzten Zeichen s, mit S, so muß nun S für jeden Zeitpunkt bestimmt werden. Man bedarf also einer Gleichung zwischen S und t, für welche $S = S_0 + Ct$ das einfachste Beispiel ist, entsprechend der Gleichung $s = s_0 + ct$ für die gleichförmige Bewegung. Aus $S = S_0 + Ct$ folgt $C = \frac{S - S_0}{t}$ als Maß für die in der Zeiteinheit erzeugte Fläche; dieses Maß (C) heißt die Flächengeschwindigkeit der Bewegung.

Allgemein ist die Flächengeschwindigkeit V gegeben durch:

$$V = lim\left[\frac{S - S'}{\tau}\right]_{\tau=0} = lim\left[\frac{S'' - S}{\tau}\right]_{\tau=0}.$$

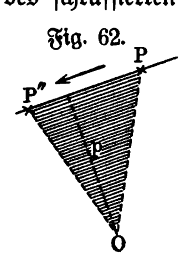
Ebenso ist die Flächenbeschleunigung J gegeben durch:

$$J = lim\left[\frac{V - V'}{\tau}\right]_{\tau=0} = lim\left[\frac{V'' - V}{\tau}\right]_{\tau=0}.$$

Flächengeschwindigkeit V und Lineargeschwindigkeit v stehen in einer einfachen Beziehung. Bewegt sich W bei einer geradlinigen Bewegung

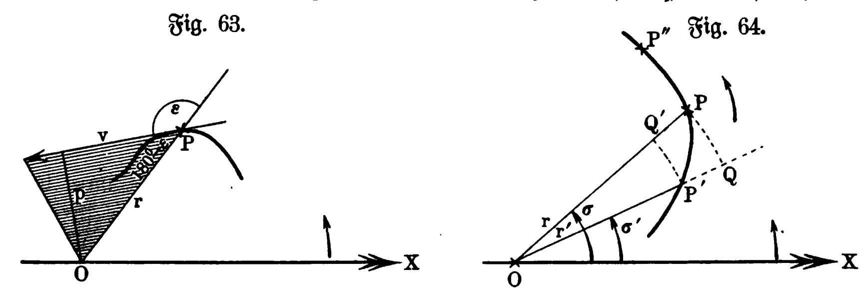
in der Zeit τ von P nach P'', so beschreibt $[OW]$ in der Zeit τ das Dreieck OPP'', dessen Inhalt $\frac{1}{2} PP'' \cdot p$ ist, gemäß Fig. 62. Da $\frac{PP''}{\tau}$ und $\frac{1}{2} \frac{PP'' \cdot p}{\tau}$ bezw. an der Grenze in v und V übergehen, so ist $V = \frac{1}{2} vp$. Stellt man v in P als Vektor dar, wie es Fig. 63 zeigt, so hat die Fläche des schraffierten Dreiecks den Wert $\frac{1}{2} vp$, d. h. V. Sieht man von der Vorzeichenbestimmung ab, so stellt $vp = 2V$ das **Moment** von $[v]$ für O als Drehpunkt dar, wie es in der Einleitung S. 36 u. f. eingeführt wurde. Will man auch Vorzeichen einführen, so ist es zweckmäßig, hier Momente als positiv anzusehen, deren Drehung der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt ist, weil die der Winkelerzeugung (σ) entsprechende Flächengeschwindigkeit in diesem Falle als positiv angesehen wird. Jedenfalls muß man daran festhalten, daß Momente von entgegengesetztem Drehungssinne mit entgegengesetztem Vorzeichen eingeführt werden, mag man nun diese oder jene Drehung als positiv bezeichnen. (Vergl. den Schlußsatz der Einleitung, S. 37.) Unter dieser Voraussetzung kann man der Gleichung $V = \frac{1}{2} vp$ den Ausdruck geben:

Fig. 62.



Die Flächengeschwindigkeit in P ist das halbe Moment der Lineargeschwindigkeit in P und zwar für jeden Pol. 36)

Fig. 63. Fig. 64.



Eine andere Darstellung von V ergiebt sich aus Fig. 64.

Für $r > r'$ ist Fläche $OP'P$ zwischen den Kreisausschnitten OPQ und $OQ'P'$ gelegen, d. h. ihr Wert ist begrenzt durch die Werte $\frac{1}{2} r^2 (\sigma - \sigma')$ und $\frac{1}{2} (r')^2 (\sigma - \sigma')$.

Für $r - r' = d$ ist $(r')^2 = r^2 - 2rd + d^2$ und man hat:

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\sigma - \sigma'}{\tau} > \frac{OP'P}{\tau} > \frac{1}{2} (r^2 - 2rd + d^2) \frac{\sigma - \sigma'}{\tau}.$$

Beim Grenzübergange verschwinden auf der rechten Seite d und d^2 gegen r^2, d. h. man hat:

$$V = \frac{1}{2} r^2 \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 37)$$

Dasselbe Ergebnis liefert $V = \frac{1}{2} vp$, da $p = r \sin \varepsilon$ und $\sin \varepsilon = \frac{r\varphi}{v}$ ist (vergl. Formel 34 und Fig. 63).

Um auch die Flächenbeschleunigung J mit der Beschleunigung $[j_G]$ in Beziehung zu setzen, betrachten wir $[v]$ in P und $[v'']$ in P''. Gemäß Fig. 65 ist dann $V = \frac{1}{2} v p$ und $V'' = \frac{1}{2} v'' p''$, also $V'' - V = \frac{1}{2}(v'' p'' - v p)$. Trägt man $[v'']$ in P als $[PH'']$ an, so erscheinen die beiden Vektoren $[v'']$ in P'' und in P gegeneinander verschoben; der senkrechte Abstand dieser Verschiebung mag u heißen. Vervollständigt man das Dreieck PHH'' durch Hinzunahme von Q zu einem Parallelogramm, so gilt für $[PH]$ und $[PQ]$ als Seitenvektoren und $[PH'']$ als Mittelvektor der Momentensatz (vergl. Einleit., S. 36), und man hat:

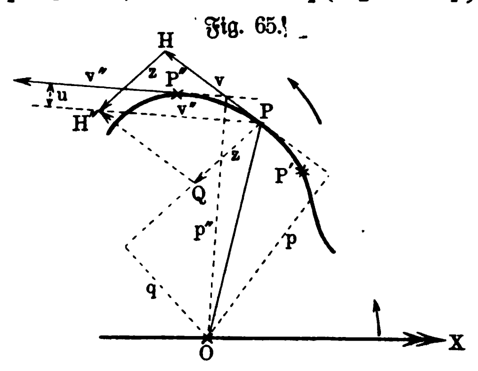


Fig. 65.

$$(p'' - u) v'' = p v + q z,$$

d. h.:

$$p'' v'' - p v = q z + u v''.$$

Demgemäß ist:

$$V'' - V = \frac{1}{2}(q z + u v'')$$

und

$$\frac{V'' - V}{\tau} = \frac{1}{2}\left(q \cdot \frac{z}{\tau} + \frac{u}{\tau} \cdot v''\right).$$

Beim Grenzübergange ist u als $PP'' . \sin P''PH''$ aufzufassen, so daß $\frac{u}{\tau} = \frac{PP''}{\tau} \cdot \sin P''PH''$ für $\lim \tau = 0$ verschwindet, während dabei $\lim \left[\frac{z}{\tau}\right] = j_G$ wird.

Man hat also:

$$J = \frac{1}{2} q \cdot j_G.$$

Die Flächenbeschleunigung in P ist das halbe Moment der Gesamtbeschleunigung in P und zwar für jeden Pol. } 38)

Als Beispiel dieser Art der Darstellung betrachten wir den bereits erwähnten Fall der Bewegung genauer, für welchen $S = S_0 + Ct$ gilt, so daß $V = C$ und $J = 0$ ist.

Da $J = \frac{1}{2} q \cdot j_G$ ist, so ist $q \cdot j_G = 0$ für $J = 0$, d. h. man hat entweder $j_G = 0$ oder $q = 0$.

Ist $j_G = 0$, so liegt eine Urbewegung vor. Verbindet man hier W mit irgend einem Pole O außerhalb der Bahn, so sind die während der Bewegung entstehenden Flächenstücke Dreiecke, welche auch bei einer endlichen Einteilung der Zeit in gleiche Teile flächengleich sind (konstante Höhe und gleiche Grundlinie); liegt O auf der Bahn, so hat man den Grenzfall von Dreiecken mit der Fläche Null.

Die Angabe $q = 0$ bedeutet, daß die Lote von dem Pole O auf die

Vektoren, welche die Gesamtbeschleunigung darstellen, stets Null sind, d. h. diese Vektoren müssen durch den Pol gehen. Dies ist aber im allgemeinen nur für eine bestimmte Lage des Poles möglich, während im besonderen für die Bewegung auf gerader Linie, bei welcher $j_N = 0$ ist, das Gebiet der möglichen Pole eben auf diese Gerade eingeschränkt ist.

Schließt man Bewegungen auf gerader Linie zunächst aus, so ist die Bewegung, für welche $S = S_0 + Ct$ gilt, dadurch gekennzeichnet, daß ihre Gesamtbeschleunigung stets durch einen festen Punkt (Centrum der Bewegung) geht, man nennt sie deshalb Centralbewegung. Eine genauere Untersuchung zeigt dann, daß auch gewisse Bewegungen auf gerader Linie, nämlich geradlinige Schwingungen, als Centralbewegungen aufgefaßt werden dürfen.

Der einfachste Fall der Centralbewegung ist die gleichförmige Bewegung auf einem Kreise; hier ist $j_T = 0$ und demnach $j_G = j_N$, d. h. die Gesamtbeschleunigung geht stets durch den Mittelpunkt des Kreises.

Projiziert man diese Bewegung auf eine Gerade innerhalb der Ebene des Kreises, so stellt diese Projektionsbewegung die einfachste Art von geradlinigen Schwingungen dar; die Beschleunigungen bleiben dabei nach der Projektion des Kreismittelpunktes gerichtet.

Man darf sich das Centrum der Bewegung stets als Ausgangspunkt (Sitz) einer anziehenden oder abstoßenden Kraft denken, welche die Beschleunigungen der Bewegung hervorruft. Innerhalb dieser Vorstellung kann man sagen: Ist ein Punkt W in Ruhe, oder bewegt er sich auf einer durch das Centrum gehenden Geraden, so entsteht unter dem Einflusse des anziehenden und abstoßenden Centrums eine geradlinige Bewegung von W, während dieses bei anders gerichteter Geschwindigkeit von W eine krummlinige Bewegung hervorruft.

So ist z. B. die Bewegung des Erdmittelpunktes W eine Centralbewegung, für welche der Mittelpunkt der Sonne als anziehendes Centrum angesehen werden kann; die Geschwindigkeit von W (als Vektor) trifft hier das Centrum nicht. Würde die Erde aber plötzlich in ihrer Bahn angehalten, oder erhielte ihr Mittelpunkt durch andere Einflüsse (Zusammenstoß u. s. w.) eine Bewegung in der Richtung auf das Sonnencentrum zu oder von diesem fort, so würde der Erdmittelpunkt eine geradlinige Bahn einschlagen.

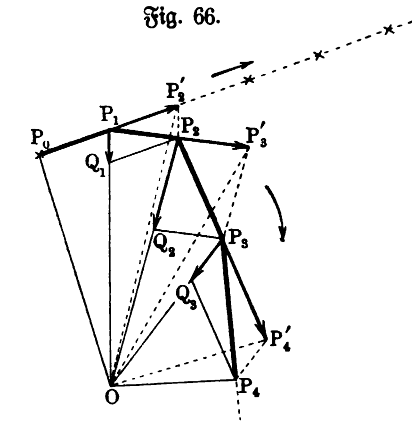
Für eine krummlinige Centralbewegung gilt auch umgekehrt stets die Gleichung $J = 0$, falls man ihr Centrum zum Pole wählt, und demnach auch $V = C$ und $S = S_0 + Ct$. Daß die Flächengeschwindigkeit in diesem Falle eine Konstante ist, läßt sich auch durch eine einfache geometrische Betrachtung zeigen, gemäß Fig. 66. Hat sich Punkt W in der Zeit τ gleichförmig von P_0 nach P_1 bewegt, so würde er bei einer Urbewegung in der anschließenden Zeit τ nach P_2' gelangen ($P_0 P_1 = P_1 P_2'$). Erteilt ihm aber O in der Stellung P_1 eine Beschleunigung, welcher die plötzlich auftretende Verlegung $[P_1 Q_1]$ entspricht, so gelangt er während der Zeit τ in Urbewegung nach P_2. Erteilt ihm O in der Stellung P_2 wiederum eine Beschleunigung, welcher die plötzlich auftretende Verlegung $[P_2 Q_2]$ entspricht, so gelangt er während der Zeit τ in Urbewegung nach P_3 u. s. f.

Da $P_0 P_1 = P_1 P_2'$ ist, so ist $\triangle\, O P_0 P_1 = \triangle\, O P_1 P_2'$, und da ferner $P_2' P_2 \,//\, P_1 Q_1$ ist, so ist $\triangle\, O P_1 P_2' = \triangle\, O P_1 P_2$, d. h. man hat $\triangle\, O P_0 P_1 = \triangle\, O P_1 P_2$.

Da $P_1 P_2 = P_2 P_3'$ ist, so ist $\triangle\, O P_1 P_2 = \triangle\, O P_2 P_3'$, und da ferner $P_3' P_3 \,//\, P_2 Q_2$ ist, so ist $\triangle\, O P_2 P_3' = \triangle\, O P_2 P_3$, d. h. man hat $\triangle\, O P_1 P_2 = \triangle\, O P_2 P_3$ u. s. f.

So ergiebt sich $\triangle\, O P_0 P_1 = \triangle\, O P_1 P_2 = \triangle\, O P_2 P_3$ u. s. f., d. h. innerhalb der Zeit τ werden von $[OW]$ stets gleiche Flächen beschrieben, vorausgesetzt, daß die Verlegungen $[P_1 Q_1]$, $[P_2 Q_2]$ u. s. w., welche übrigens von ganz beliebiger Länge sind, stets nach Ablauf der Zeit τ auftreten.

Fig. 66.



Faßt man diese Darstellung als erste Annäherung einer beliebigen krummlinigen Centralbewegung auf, so führt der Grenzübergang auch für diese zu dem gleichen Ergebnisse.

Handelt es sich bei der Polarmethode um gewundene Bahnen, so denkt man sich um den Pol eine Kugel vom Radius 1 geschlagen und bestimmt auf dieser den Schnittpunkt mit $[OW]$ nach Länge und Breite, wie auf der Erdoberfläche.

Die Stellung von $[OW]$ ist dann zu jeder Zeit gegeben, wenn $r = OW$ und Breite und Länge zu jeder Zeit gegeben sind.

Auch hier ist die Einführung der Flächengeschwindigkeit und Flächenbeschleunigung unter Umständen von Bedeutung; man betrachtet dazu die Fläche, welche $[OW]$ erzeugt, in ihren Projektionen auf die Äquatorialebene des Polarsystems und auf zwei Ebenen, welche mit dieser ein rechtwinkliges System von Parallelkoordinaten bilden.

Bei der Polarmethode verwendet man für ebene Bahnen eine Verschiebung auf $[OW]$ und eine Drehung um O, für gewundene Bahnen eine Verschiebung auf $[OW]$ und eine Schwenkung um O.

31. Übertragung der Ergebnisse auf Körperbewegungen. Für Verschiebungen und Drehungen von Körpern lassen sich natürlich auch die vorstehenden Entwickelungen ohne weiteres verwenden.

Drittes Kapitel.

Bewegungen starrer Körper.

32. Lagenänderung eines starren Körpers durch Verbindung von Verschiebung und Drehung. Wenn ein starrer Körper aus einer Lage I in eine Lage II weder allein durch Verschiebung noch allein durch Drehung übergeführt werden kann, wie im folgenden stets vorausgesetzt werden soll, so gelingt die Überführung, indem man eine Verschiebung mit einer Schwenkung des Körpers verbindet. Hat das Bewegungsdreieck ABC des Körpers (vergl. S. 40) einmal (I) die Lage $A'_1B'_1C'_1$ und dann (II) die Lage $A'_2B'_2C'_2$ im Raume, so kann man es z. B. unter Auszeichnung des Punktes C zunächst aus der Lage $A'_1B'_1C'_1$ durch eine Verschiebung längs irgend einer Linie $C'_1C'_2$ in die Zwischenlage $A'B'C'_2$ und dann durch eine Schwenkung um C'_2 aus dieser in die Lage $A'_2B'_2C'_2$ bringen.

Ist einmal Punkt C ausgezeichnet worden, so giebt es unter den unendlich vielen Arten der angegebenen Überführung eine von möglichster Einfachheit; bei ihr folgt die Verschiebung der geradlinigen Leitlinie $C'_1C'_2$, während sich die Schwenkung als eine Drehung um eine bestimmte Achse durch C'_2 darstellt.

Um die Achse dieser Drehung zu bestimmen, legen wir um C'_2 eine Kugelfläche, welche einerseits C'_2A' in A' und C'_2B' in B', anderseits $C'_2A'_2$ in A'_2 und $C'_2B'_2$ in B'_2 schneidet, während sie das Bewegungsdreieck selbst in A und B trifft. Bei der Schwenkung um A'_2 geht dann auf dieser Kugelfläche der Hauptbogen AB aus der Lage $A'B'$ in die Lage $A'_2B'_2$ über.

Um die einfachste Art der Überführung dieses Bogens auf der Kugelfläche zu bestimmen, behandeln wir zunächst die entsprechende, auch an und für sich wichtige Aufgabe der Ebene.

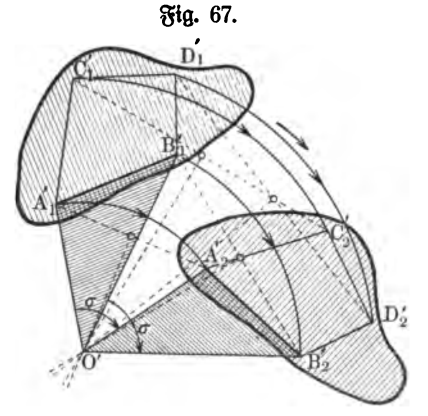
Eine ebene Figur, welche sich innerhalb einer Ebene bewegt (Umklappen ausgeschlossen), ist ihrer Lage nach bestimmt, wenn zwei Punkte A und B der Figur mit zwei Punkten A' und B' der Ebene ($AB = A'B'$) zusammenfallen, so daß bei solchen Bewegungen nur die Lagenänderung einer Bewegungsstrecke AB zu verfolgen ist. Hat eine solche Strecke einmal die Lage $A'_1B'_1$ und dann die Lage $A'_2B'_2$, so ist für die Mittellote von $A'_1A'_2$ und $B'_1B'_2$ im allgemeinen, wie Fig. 67 zeigt, ein Schnittpunkt O oder O'

vorhanden, der als Drehpunkt für die Überführung der Strecke AB aus der Lage $A'_1 B'_1$ in die Lage $A'_2 B'_2$ benutzt werden kann. Denkt man sich nämlich A und B in der Lage $A'_1 B'_1$ mit O durch Strecken fest verbunden, so gleitet bei einer Drehung von $\triangle\, OAB$ um O im Sinne des Pfeiles zugleich A auf Bogen $A'_1 A'_2$ von A'_1 nach A'_2 und B auf Bogen $B'_1 B'_2$ von B'_1 nach B'_2 ($\triangle\, OA'_1 B'_1 \cong \triangle\, OA'_2 B'_2$), d. h. AB gelangt durch die Drehung um O aus der Lage I in die Lage II.

Denkt man in O senkrecht zur Ebene der Zeichnung ein Lot errichtet und mit diesem die Strecke AB fest verbunden, so ist dieses Lot die Achse für die betrachtete Drehung.

Hätte man statt A und B zwei andere Punkte C und D der Figur als Endpunkte einer Bewegungsstrecke ausgewählt, so würden die Mittellote von $C'_1 C'_2$ und $D'_1 D'_2$ (vergl. Fig. 67) zu demselben Punkte O führen, der oben gewonnen wurde, d. h. die Lage von O ist bei einer bestimmten Lagenänderung der Figur unabhängig von der Auswahl der Bewegungsstrecke. Dasselbe gilt demnach auch für die Achse in O, mit der man sich die Figur fest verbunden denkt. Die Drehung kann auf doppelte Weise vorgenommen werden, wie in Fig. 67 im Sinne des Uhrzeigers, oder auch in umgekehrtem Sinne. Im allgemeinen bewirkt man die Drehung auf dem kürzesten Wege, so daß nur Doppeldeutigkeiten entstehen, wenn der Drehungswinkel $\sigma = A'_1 O A'_2$ (bezw. $= B'_1 O B'_2$ u. s. w.) gerade 180^0 beträgt.

Fig. 67.



Ebenso wie man einen Vektor von der Maßzahl s in seiner vollständigen (abgesehen vom Ursprunge) Bestimmung durch $[s]$ ausdrückt, so soll auch eine Drehung von der Maßzahl σ, welche stets als Arcus dargestellt gedacht wird, in ihrer vollständigen Bestimmung durch $[\sigma]$ bezeichnet werden. Dazu gehört Angabe der Richtung der Achse im Raume, Angabe des Drehungssinnes und Angabe des Drehungswinkels σ, welcher auch Amplitude genannt wird. Denkt man eine Drehungsachse durch den eigenen Körper gehend, so kann man auf ihr durch einen Pfeil, der die Richtung von den Füßen zum Kopfe hat, den Drehungssinn bezeichnen, welcher für den nach unten schauenden Beobachter mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmt, den umgekehrten Drehungssinn durch einen Pfeil, der die Richtung vom Kopfe zu den Füßen hat. Wählt man solche Pfeile zur Bezeichnung der Richtung eines Vektors, welcher die Länge σ hat, so stellt dieser Vektor $[\sigma]$ die Drehung für eine bestimmte Achse und für dazu parallele Achsen dar; man nennt ihn eine Drehungsstrecke. Giebt man ihm noch einen bestimmten Ursprung, so ist auch unter den Parallelachsen diejenige bezeichnet, welche für die Drehung zu wählen ist. Mit $[+\sigma]$ und $[-\sigma]$ können dann

Drehungen von gleicher Größe und entgegengesetztem Sinne bezeichnet werden, so daß die Verbindung von [+ σ] und [— σ] auf derselben Achse eine Drehung um diese ausschließt; eine solche Verbindung soll ein System von Gegendrehungen heißen.

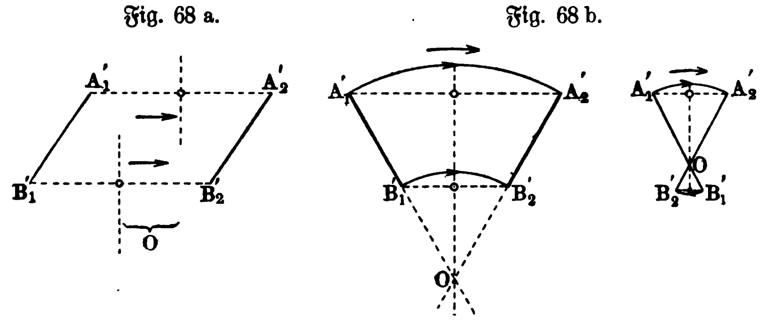
Bei unserem Beispiele (Fig. 67) wäre [σ] in O senkrecht zur Ebene der Zeichnung aufzutragen und zwar hätte [σ] einen nach oben gerichteten Pfeil.

Der Schnittpunkt O der Mittellote ist nicht vorhanden, wenn $A'_1 A'_2 // B'_1 B'_2$ ist, und dieses tritt ein bei Parallellage und bei Antiparallellage von $A'_1 B'_1$ und $A'_2 B'_2$. Für die Parallellage (vergl. Fig. 68a) ist O ins Unendliche gerückt, so daß eine Verschiebung von AB vorliegt; für die Antiparallellage (vergl. Fig. 68b) tritt der Schnittpunkt O von $A'_1 B'_1$ und $A'_2 B'_2$ als Drehpunkt ein.

Man bezeichnet den Drehpunkt O in jedem Falle als Pol und sagt im Falle der Verschiebung, daß der Pol ins Unendliche gerückt sei.

Für eine sphärische Figur, die sich innerhalb einer Kugelfläche bewegt, gilt Entsprechendes. Sie ist in ihrer Lage bestimmt, wenn zwei

Fig. 68 a. Fig. 68 b.



Punkte der Figur A und B, welche man sich durch den Hauptbogen $\widehat{AB}$ verbunden denkt, mit zwei Punkten A' und B' in der Kugelfläche ($\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$) zusammenfallen, so daß bei ihrer Bewegung nur die Lagenänderung eines Bewegungsbogens $\widehat{AB}$ zu verfolgen ist. Denkt man sich Fig. 67 sphärisch umgewandelt, so sind die Mittellote von $A'_1 A'_2$ und $B'_1 B'_2$ Hauptkreise, welche sich stets in konjugierten Polen O und $\overline{O}$ schneiden. Durch diese konjugierten Pole wird die Gerade $O\overline{O}$ als Drehungsachse für die Überführung von $\widehat{AB}$ aus der Lage I in die Lage II eindeutig bestimmt, sie geht natürlich stets durch den Mittelpunkt der Kugel.

Die Bestimmung der Achse ist auch hier unabhängig von der Auswahl der Punkte A und B.

Damit ist auch die Achse für die Drehung bestimmt, welche für die Schwenkung des Körpers um C'_2 eintreten sollte, sie ist die Schnittlinie der Hauptkreisflächen, welche für die Bogen $A' A'_2$ und $B' B'_2$ die Rolle von Mittelloten spielen, und geht infolgedessen durch C'_2.

Die einfachste Art der Überführung eines starren Körpers aus einer Lage I in eine Lage II besteht demnach, falls man den Punkt C des

Bewegungsdreiecks von vornherein auszeichnet, darin, daß man zunächst das Bewegungsdreieck ABC verschiebt längs der Leitstrecke $C_1' C_2'$ und es dann dreht um die oben bestimmte Achse durch C_2'.

Es ist ersichtlich, daß man auch erst die entsprechende Drehung um C_1' vornehmen und dann die Verschiebung längs $C_1' C_2'$ folgen lassen kann.

Man darf auch beide Bewegungen gleichzeitig vorgenommen denken, falls man die Achse durch C_1' oder C_2' im Körper durch C verzeichnet denkt und nun den Körper in derselben Zeit um diese Achse durch C dreht, in welcher er sich mit C auf $C_1' C_2'$ verschiebt.

Diese einfachste Art der Überführung soll im folgenden stets gemeint sein, wenn von der Lagenänderung eines starren Körpers durch Verschiebung und Drehung bezw. durch Drehung und Verschiebung gesprochen wird, unter Auszeichnung des Punktes C.

Da je drei Punkte des starren Körpers, welche nicht auf einer Geraden liegen, als Eckpunkte A, B, C des Bewegungsdreiecks gewählt werden können und da auch unter diesen Eckpunkten A, B, C die Hervorhebung von C durchaus willkürlich ist, so stellt C jeden beliebigen Punkt des starren Körpers dar.

33. Lagenänderung eines starren Körpers durch Schraubung. Die einfachste Art der Überführung eines starren Körpers aus einer Lage I in eine Lage II ist nur dann eindeutig bestimmt, wenn von vornherein ein bestimmter Punkt C des Körpers für die Betrachtung ausgezeichnet wird. Wir wollen jetzt andere Punkte des Körpers an die Stelle von C treten lassen und die entsprechenden Überführungen vergleichen. Bei der Drehung um die Achse durch C_2', welche c' heißen mag, bleiben alle Geraden des Körpers, welche dieser Achse vor der Drehung parallel sind, dieser Achse parallel, so daß sie ihr auch nach der Drehung, d. h. in der Lage II des Körpers, parallel sind. Da der Körper vor der Drehung einer Verschiebung unterlag, bei welcher jede Gerade sich selbst parallel bleibt, so waren diese Geraden auch vor der Verschiebung, d. h. in der Lage I des Körpers zur Achse c' parallel. Es giebt also für die Lagen I und II des Körpers eine bestimmte Richtung (c') im Raume, mit welcher die Richtung eines Systems von Geraden im Körper während der gesamten Lagenänderung des Körpers übereinstimmt.

Ersetzt man C für die Betrachtung durch einen anderen Punkt A des Körpers, so bleibt dieses System von Geraden auch bei der Verschiebung längs $A_1' A_2'$ der Anfangslage I parallel. Da es nach der Drehung um die Achse a', die durch A_2' geht, in die Lage II kommt, in welcher es gleichfalls seiner Anfangslage (I) parallel ist, so muß die Achse a' die Richtung des Systems haben, welche durch c' bestimmt wurde, d. h. c' und a' haben dieselbe Richtung. Da A irgend einen von C verschiedenen Punkt bezeichnet, so gilt: Die Lagen I und II des Körpers bestimmen eine und nur eine Richtung im Raume, mit der die Richtungen aller Drehungsachsen für verschiedene Überführungen (der Auszeichnung verschiedener Punkte entsprechend) übereinstimmen.

Betrachtet man nun eine Ebene E des Körpers, welche zu dieser Rich-

tung senkrecht ist, bei irgend einer Überführung aus der Lage I in die Lage II, so kann diese Ebene durch *jede* Drehung nur in sich gedreht werden und muß daher als Ganzes betrachtet (d. h. abgesehen von der noch folgenden Drehung in sich) durch *jede* Verschiebung *in dieselbe Lage* kommen. Hat E im Raume zunächst (I) die Lage E_1' und dann (II) die Lage E_2', so bestimmt der senkrechte Abstand $[p]$ von E_1' und E_2' eine bestimmte Verschiebung.

Giebt man dem Körper in der Lage I die Verschiebung $[p]$, so gelangt die Ebene E aus der Lage E_1' in eine Zwischenlage E', welche sich von der Lage E_2' nur durch eine Drehung der Ebene in sich unterscheidet. Bezeichnet man den Drehpunkt in der Ebene für diese Drehung in sich mit O', so ist die durch O' gehende Normale der Ebene *eindeutig bestimmt* im Raume; sie heißt *Centralachse* für die Lagen I und II des Körpers.

Um sie aus den Lagen $A_1' B_1' C_1'$ und $A_2' B_2' C_2'$ des Bewegungsdreiecks ABC zu bestimmen, verfahren wir folgendermaßen:

Den Vektoren $[A_1' A_2']$, $[B_1' B_2']$, $[C_1' C_2']$, welche bezw. die Verschiebungen von A, B, C darstellen, geben wir einen gemeinsamen Ursprung und fällen aus ihm in der, durch die drei Vektoren bestimmten Pyramide die Höhe. *Diese ist, als Vektor aufgefaßt, die gesuchte Verschiebung* $[p]$. Da nämlich die Verschiebung längs $A_1' A_2'$ jeden Punkt des Körpers, also auch einen bestimmten Punkt der oben betrachteten Ebene E um eine Strecke $[A_1' A_2']$ verschiebt, während dabei die Ebene um $[p]$ vorrückt, so ist $[p]$ die senkrechte Projektion von $[A_1' A_2']$ auf eine Normale der Ebene E, und dasselbe gilt für $[B_1' B_2']$ und $[C_1' C_2']$.

Durch die Verschiebung $[p]$ gelangt das Dreieck ABC aus der Lage I in eine bestimmte Zwischenlage $A' B' C'$, aus der es durch Drehung um eine bestimmte Gerade (Centralachse) von der Richtung des Vektors $[p]$ in die Lage II übergeführt werden kann. Dabei muß zugleich A' nach A_2', B' nach B_2' und C' nach C_2' rücken, und infolgedessen ist der Schnitt der Mittellot-Ebenen für die Strecken $A' A_2'$ und $B' B_2'$, welcher zugleich die Mittellot-Ebene für die Strecke $C' C_2'$ aufnimmt, die gesuchte *Centralachse*. Zur Veranschaulichung ist es nützlich, die dreiseitige Pyramide aus $[A_1' A_2']$, $[B_1' B_2']$ $[C_1' C_2']$ in jedem der Punkte A_1', B_1', C_1' zu konstruieren und in diesen drei Pyramiden bezw. die Höhen aus A_1', B_1', C_1' zu fällen, welche sämtlich $[p]$ darstellen; die Fußpunkte dieser Höhen sind dann bezw. A', B', C', und die Pyramidenfläche durch A' enthält die Punkte A' und A_2', die Pyramidenfläche durch B' die Punkte B' und B_2', die Pyramidenfläche durch C' die Punkte C' und C_2', so daß die Mittellot-Ebenen für die Strecken $A' A_2'$, $B' B_2'$, $C' C_2'$ bezw. auf den unter sich parallelen Pyramidenflächen durch A', B', C' senkrecht stehen, welche selbst senkrecht zu $[p]$ sind.

Schneidet die Centralachse die Ebene von $A' A_2'$ in $\mathfrak{A}'$, so ist $\sphericalangle A' \mathfrak{A}' A_2'$ der Winkel σ, welcher die Größe und den Sinn (von A' nach A_2') der *Drehung* um die Centralachse bestimmt.

Anstatt die Verschiebung $[p]$ und die Drehung $[\sigma]$ oder auch die Drehung $[\sigma]$ und die Verschiebung $[p]$ *nacheinander* vorzunehmen, kann man sich auch wiederum vorstellen, daß beide Lagenänderungen zugleich vor

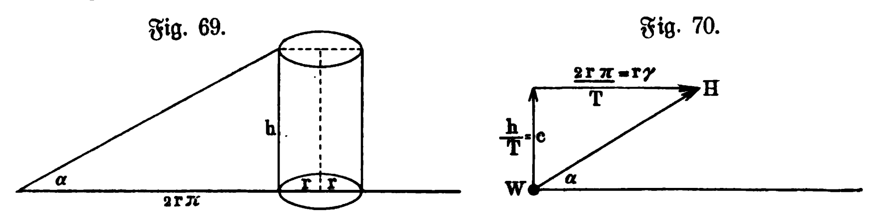
sich gehen und zwar als gleichförmige Bewegungen. Ist τ die Zeitdauer dieser beiden Bewegungen, so verschiebt sich der Körper mit der Geschwindigkeit $c = \frac{p}{\tau}$ in der Richtung der Centralachse und dreht sich zugleich mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{\sigma}{\tau} = \gamma$ um diese. Alle Punkte des Körpers, welche nicht auf der Centralachse liegen, beschreiben Stücke von Schraubenlinien.

Nennt man diese Art der Bewegung des Körpers kurzweg Schraubung, so ist durch die Lagen I und II eine und nur eine Schraubung von bestimmter Centralachse und bestimmtem $[p]$ und $[\sigma]$ gegeben.

Wir betrachten diese Bewegung, für welche die Bewegung einer Schraubenspindel in ihrer Mutter zur Veranschaulichung dient, noch etwas näher.

Macht man die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks gleich dem Umfange des Normalschnittes eines geraden Kreiscylinders vom Radius r,

Fig. 69. Fig. 70.



so läßt sich das Dreieck auf dessen Mantel so aufwickeln, daß diese Kathete ($2 r \pi$) ein Normalschnitt wird, während die andere Kathete (h) in eine Seite des Cylinders fällt; dabei stellt die Hypotenuse einen (vollen) Umgang einer Schraubenlinie (Schraubengang) dar von der Ganghöhe h und der Steigung $tang\, \alpha = \frac{h}{2 r \pi}$. (Vergl. Fig. 69, Aufwickelung nach vorn oder nach hinten.)

Soll ein Punkt W diesen Schraubengang in der Zeit T gleichförmig durchlaufen, so muß seine Projektion auf eine Normalebene des Cylinders den Kreis vom Radius r mit der Geschwindigkeit $\frac{2 r \pi}{T} = r \gamma$ und seine Projektion auf die Achse des Cylinders die Ganghöhe mit der Geschwindigkeit $\frac{h}{T} = c$ beschreiben, so daß seine Geschwindigkeit, wie es Fig. 70 zeigt, durch $[WH]$ dargestellt wird.

Bezeichnet W einen der Punkte des oben betrachteten Körpers, welcher von der Centralachse den Abstand r hat, so ist:

$$\frac{2 r \pi}{T} = r \gamma = \frac{r \sigma}{\tau} \quad \text{und} \quad \frac{h}{T} = c = \frac{p}{\tau}.$$

Daraus folgt:

$$tang\, \alpha = \frac{c}{r \gamma} = \frac{p}{r \sigma} \quad \text{und} \quad h = \frac{2 \pi}{\sigma} \cdot p \quad \text{und} \quad T = \frac{2 \pi}{\sigma} \cdot \tau.$$

Die Gleichung für $tang\, \alpha$ zeigt, daß die Steigung der Schraubenlinie, welche W beschreibt, nicht bloß von der Verschiebung p und der Amplitude σ abhängt,

sondern auch von r und daß sie proportional zu $\frac{1}{r}$ ist, d. h. je weiter der Punkt W des Körpers von der Achse entfernt ist, um so flacher ist die Schraubenlinie, die er beschreibt. Die Gleichung für h zeigt, daß die Ganghöhe der Schraubenlinie, welche W beschreibt, nur von p und σ und nicht von r abhängig ist, d. h. alle Punkte des Körpers beschreiben Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe. Die Gleichung für T zeigt, daß bei der Schraubung des Körpers selbstverständlich die Zeit eines vollen Umganges für alle diese Schraubenlinien dieselbe sein würde, falls überhaupt ein voller Umgang zu stande käme.

Um die Geschwindigkeit von W als Vektor darzustellen, hat man, wie in Fig. 70, $[c]$ und $[r\gamma]$ für die Werte $c = \frac{p}{\tau}$ und $r\gamma = \frac{r\sigma}{\tau}$ zum Dreieck zu vereinigen. Thut man dies für drei beliebige Punkte W_1, W_2, W_3 des Körpers, die bezw. die Abstände r_1, r_2, r_3 von der Achse haben, so stimmen die entsprechenden Dreiecke, welche bezw. die Geschwindigkeiten $[c_1]$, $[c_2]$, $[c_3]$ liefern mögen, in den Katheten $[c]$ überein. Schiebt man diese drei Dreiecke im Raume so aneinander, daß die Katheten $[c]$ aufeinander fallen, so legen sich $[r_1\gamma]$, $[r_2\gamma]$, $[r_3\gamma]$ in dieselbe Ebene, welche dabei im allgemeinen als Grundfläche der nun aus $[c_1]$, $[c_2]$, $[c_3]$ gebildeten Pyramide erscheint. Demnach kann man umgekehrt aus $[c_1]$, $[c_2]$, $[c_3]$ sowohl $[c]$ als auch $[r_1\gamma]$, $[r_2\gamma]$, $[r_3\gamma]$ und damit γ finden. Sind also für drei beliebige Punkte W_1, W_2, W_3 des Körpers die Geschwindigkeiten als Vektoren gegeben, so ist damit auch $[c]$ und γ gegeben und ebenso die Lage der Centralachse, da drei Ebenen bezw. durch W_1, W_2, W_3 und bezw. senkrecht zu $[r_1\gamma]$, $[r_2\gamma]$, $[r_3\gamma]$ sich auf dieser schneiden.

Der Zusammenhang der beiden Konstruktionen für die Centralachse wird ersichtlich, wenn man in der ersten $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$, $C_1'C_2'$ nicht als endliche Strecken, sondern als Elemente auffaßt.

34. Zusammensetzungen von Lagenänderungen eines starren Körpers aus endlichen Verschiebungen und Drehungen und die entsprechenden Zerlegungen. Da jede Lagenänderung eines starren Körpers durch Verbindung von einer Verschiebung und einer Drehung, im Besonderen durch eine Schraubung dargestellt werden kann, so liegt es nahe, bestimmte Folgen von bestimmten Lagenänderungen eines starren Körpers, welche den Bedürfnissen der Technik entsprechen, aus Verschiebungen und Drehungen und auch aus Schraubungen zusammenzusetzen, zumal sich diese einfachen Lagenänderungen durch materielle Konstruktionen (Führungen, Achsen, Spindel und Mutter) verhältnismäßig leicht erreichen lassen.

Als einfache Maschinen sind aus der Physik bekannt: Schiefe Ebene, Hebel, Schraube.

Hierzu kommt noch, daß die §§ 32 und 33 noch eine Frage nahe legen in Bezug auf den Zusammenhang der Überführung unter Auszeichnung irgend eines Punktes C und der Schraubung. Die Verschiebung $[C_1'C_2']$ zerlegt sich bei der Schraubung in deren Verschiebung $[C_1'C'] \overset{\times}{=} [p]$ und in

$[C' C_2']$, so daß die Verschiebung $[C' C_2']$ in Verbindung mit der Drehung um C_2' der einen Drehung für die Schraubung entspricht. Hier führt also eine Drehung in Verbindung mit einer Verschiebung, senkrecht zur Drehungsachse, zu einer Drehung. Diese und ähnliche Betrachtungen legen es nahe, sowohl aus theoretischen als auch aus praktischen Rücksichten festzustellen, welche resultierende Lagenänderungen den Verbindungen von bestimmten Verschiebungen und Drehungen als komponierenden Lagenänderungen entsprechen. Dabei ist auch zu untersuchen, ob diese Komponenten nacheinander in bestimmter Folge eingeführt werden müssen, oder in beliebiger Anordnung, und ob sie auch gleichzeitig zusammenwirken können.

1. Wird ein Körper nacheinander mehreren Verschiebungen unterworfen, so setzen sich diese, unabhängig von der Anordnung, nach dem Parallelogrammprincipe zu einer einzigen Verschiebung zusammen, wie ohne weiteres aus der Phoronomie des Punktes folgt. Die resultierende Verschiebung wird auch erhalten, wenn man die komponierenden Verschiebungen gleichzeitig vorgenommen denkt.

Schließt sich der Streckenzug der Verschiebungen von selbst, so stimmt die Endlage des Körpers mit der Anfangslage überein, so daß dieser bei gleichzeitigem Auftreten der Verschiebungen in Ruhe bleibt. Natürlich sind die Bewegungen des Körpers verschieden, wenn die Verschiebungen nacheinander in dieser oder jener Folge und wenn sie gleichzeitig auftreten. Entsprechendes gilt für Zerlegungen.

2. Die Zusammensetzung mehrerer Drehungen um dieselbe Achse bietet gleichfalls keine Schwierigkeiten, da sich die einzelnen Amplituden durch algebraische Addition vereinigen lassen. Die Vektoren, welche die einzelnen Drehungen darstellen, liegen hier alle auf der Achse und zerstören sich gegenseitig, wenn die algebraische Summe der Amplituden Null ist. Im übrigen gelten die Bemerkungen der Nr. 1.

3. Handelt es sich um beliebig-viele Verschiebungen und um beliebig-viele Drehungen um dieselbe Achse, so ist nach Nr. 1 und Nr. 2 schließlich nur eine resultierende Verschiebung und eine resultierende Drehung zu betrachten. Zerlegt man die Verschiebung in zwei Komponenten senkrecht $[s]$ und parallel $[p]$ zur Achse der Drehung, so ist erstere $[s]$ in Verbindung mit der Drehung nur imstande, eine Ebene E des Körpers, senkrecht zur Achse, in sich zu drehen. Betrachtet man in einer solchen Ebene den Punkt A, durch welchen die Achse hindurchgeht, und noch einen zweiten Punkt B, welche zunächst in den Punkten A' und B' des Raumes (vergl. Fig. 71, a. f. S.) ruhen mögen, so führt zunächst die Verschiebung A von A' nach A_1' und B von B' nach B_1' und dann die Drehung um A bezw. A_1' ferner B_1' nach B_2', so daß AB schließlich von der Lage $A'B'$ in die Lage $A_1' B_2'$ gelangt. Kehrt man die Folge der komponierenden Bewegungen um, so führt (vergl. Fig. 71b) die Drehung um A bezw. A' zunächst B' nach B_1' und dann die Verschiebung A' nach A_2' und B_1' nach B_2', so daß AB schließlich in die Lage $A_2' B_2'$ gelangt. Da $A_1' B_1'$ in Fig. 71a zu $A' B'$ in Fig. 71b parallel ist, so ist die Verlegung $[B_1' B_2']$ in Fig. 71a der Verlegung $[B' B_1']$ in Fig 71b gleich, und demnach ist auch die Gesamtverlegung

$[B'B_2']$ in Fig. 71a der Gesamtverlegung $[B'B_2']$ in Fig. 71b gleich, so daß B_2' beide Mal dieselbe Lage erhält, ebenso wie A_1' in Fig. 71a und A_2' in Fig. 71b. Demgemäß ist es gleichgültig, ob erst die Verschiebung $[s]$ und dann die Drehung $[\sigma]$ oder erst die Drehung $[\sigma]$ und dann die Verschiebung $[s]$ vorgenommen wird; man kann sich auch beide komponierende Lagenänderungen als gleichzeitig entstehend denken.

Die Mittellote von $A'A_1'$ und $B'B_2'$ in Fig. 71a und von $A'A_2'$ und BB_2' in Fig. 71b geben in ihrem Schnittpunkte den Pol O oder O', um den die eine Drehung stattfindet, welche die senkrechte Komponente $[s]$ der gegebenen Verschiebung und die gegebene Drehung $[\sigma]$ zugleich ersetzt. Bei der Drehung um A' in Fig. 71b hätte O den Bogen OO_1', entsprechend $[\sigma]$, beschrieben,

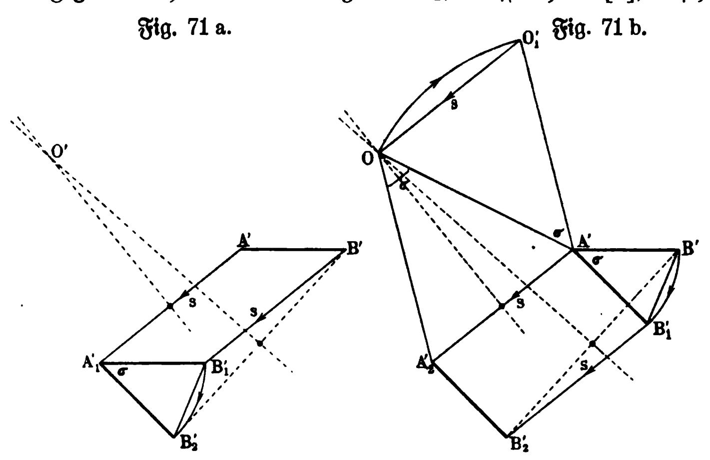


Fig. 71a. Fig. 71b.

während O thatsächlich in Ruhe geblieben ist; infolgedessen mußte die Verschiebung $[s]$ Punkt O von O_1' nach O' zurückführen, d. h. es ist $[O_1'O'] = [s]$ und demnach auch, da $O'O_1'A'A_2'$ ein Parallelogramm ist, $\measuredangle A_2'O'A' = \sigma$, so daß die Drehung um O' mit der Drehung um A' übereinstimmt. Man gewinnt also den Satz: Die Verbindung einer Drehung $[\sigma]$ um eine Achse (A) und einer Verschiebung $[s]$ senkrecht zu dieser Achse läßt sich ersetzen durch eine Drehung $[\sigma]$ um eine Achse (O), welche der ersten parallel ist. In einer Ebene, senkrecht zu beiden Achsen, bildet der Durchtritt der neuen Achse (O) mit der, vom Durchtritt der alten Achse (A) aus gezeichneten Verschiebung $[s]$ als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel an der Spitze σ ist, und zwar liegt das Dreieck rechts von einem Beschauer, der in der Drehungsstrecke von A stehend (bei unserer Figur auf dem Papiere) in die Richtung der Verschiebung blickt.

Die Verschiebung ist stets Sehne zum Centriwinkel σ.

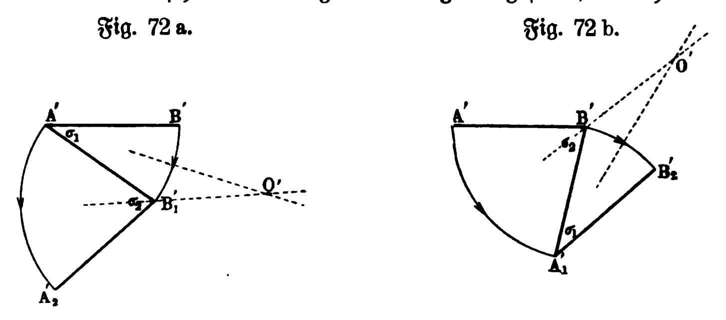
Umgekehrt läßt sich nach diesem Satze die Drehung $[\sigma]$ um eine Achse in O wieder ersetzen durch eine Drehung $[\sigma]$ um eine Achse in A, welche der ersten parallel ist, in Verbindung mit einer Verschiebung senkrecht zu dieser neuen Achse.

Ersetzt man die Drehung um A in Verbindung mit der Verschiebung $[s]$ durch die Drehung um O, so bleibt noch die Verschiebung $[p]$ zu berücksichtigen. Die Drehung um O liefert in Verbindung mit der anderen zur Achse parallelen Komponente $[p]$ der gegebenen Verschiebung eine Schraubung.

4. Bei Drehungen um verschiedene Achsen, welche für sich oder in Verbindung mit beliebig-vielen Verschiebungen zu betrachten sind, ist die Reihenfolge der Drehungen stets von Bedeutung. Dies zeigt sich schon im einfachsten Falle, nämlich bei Drehungen um zwei Parallelachsen.

Die beiden Parallelachsen mögen eine Ebene E des Körpers, senkrecht zu ihnen, in den Punkten A und B schneiden, welche zunächst in den Punkten A' und B' des Raumes ruhen. Für diese Ebene ist in Fig. 72a und Fig. 72b der Unterschied der Lagenänderung dargestellt, welche der Ver-

Fig. 72a. Fig. 72b.



tauschung der Drehungsfolge entspricht. In Fig. 72a ist erst die Drehung $[\sigma_1]$ um A vorgenommen, bei welcher B aus der Lage B' in die Lage B_1' gelangt, und dann die Drehung $[\sigma_2]$ um B, bei welcher A aus der Lage A' in die Lage A_2' gelangt. In Fig. 72b ist die Folge der Drehungen vertauscht. Der Unterschied ist ersichtlich.

In jedem Falle ist die Zusammensetzung der beiden Drehungen zu einer Drehung möglich, die Mittellote für $A'A_2'$ und $B'B_1'$ in Fig. 72a und die Mittellote für $A'A_1'$ und $B'B_2'$ in Fig. 72b geben in ihren Schnittpunkten die dazu gehörigen Pole O'.

Der Pol O' rückt ins Unendliche, so daß eine Verschiebung vorliegt, wenn in Fig. 72a $A'B' \,//\, A_2'B_1'$ und wenn in Fig. 72b $A'B' \,//\, A_1'B_2'$ ist. In diesem Falle ist $\sigma_1 = \sigma_2$ und zwar haben die beiden Drehungen, wie in Fig. 72, umgekehrten Drehungssinn. Die Verbindung zweier solcher Drehungen heißt ein Drehungspaar.

In den Fig. 73a und 73b (a. f. S.) sind die beiden Drehungen dargestellt, welche den Fig. 72a und 72b entsprechen für $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Der Reihenfolge A, B entspricht die Verschiebung $[s_{A,B}]$ in Fig. 73a, der Reihenfolge B, A entspricht die Verschiebung $[s_{B,A}]$ in Fig. 73b. Beide Verschiebungen liegen in einer Ebene, senkrecht zu den Achsen, und haben denselben Wert $s = 2\,AB \sin\frac{\sigma}{2}$, ihre Neigungen gegen die Ebene der Achsen sind aber bezw.

$90^0 + \frac{\sigma}{2}$ und $90^0 - \frac{\sigma}{2}$, gemessen im Sinne des Winkelpfeiles P, so daß sie miteinander den Winkel σ bilden.

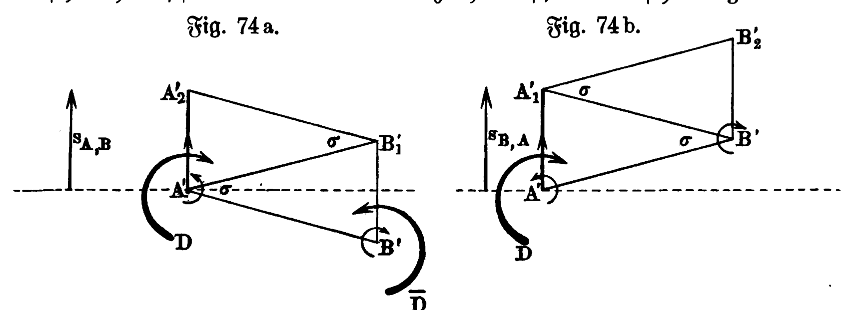
Bei endlichen Drehungen ist also ein Drehungspaar erst nach Festsetzung der Folge seiner Drehungen (A,B) oder (B,A) eindeutig bestimmt. Da die Verschiebung $[s_{A,B}]$ oder die Verschiebung $[s_{B,A}]$ nicht an einem bestimmten Punkte des Körpers haftet, sondern allen Punkten desselben zukommt, so darf ein bestimmtes Drehungspaar stets in seiner Ebene und parallel zu dieser verrückt werden, falls $[AB]$ dabei nur verschoben wird.

Fig. 73 a.

Fig. 73 b.

Umgekehrt läßt sich eine Verschiebung $[s]$ stets auf unendlich-viele Weisen durch ein Drehungspaar ersetzen. Die Anzahl der Lösungen wird bestimmt, sobald andere Angaben in hinreichender Menge hinzutreten. Ist z. B. die Achse A in A' und die Drehung $[\sigma]$ um diese gegeben, so hat man gemäß Fig. 74 a für die Folge A,B und gemäß Fig. 74 b für die Folge B,A die Lage von B in B'.

In beiden Fällen ersetzt das Drehungspaar, welches in Fig. 74 durch die schwachen Pfeile bei A' und B' bezeichnet ist, die Verschiebung.



Mit Hülfe des Drehungspaares erhält man auch eine neue Einsicht in die Zusammensetzung einer Drehung und einer senkrecht zu der Achse gerichteten Verschiebung, die wir bereits oben (S. 122) behandelten. Tritt zu einer Drehung $[\sigma]$ um eine Achse A (vergl. in Fig. 74 die starken mit D bezeichneten Pfeile) eine Verschiebung $[s]$, senkrecht zu dieser Achse, hinzu, so kann man diese Verschiebung durch ein Drehungspaar so ersetzen, daß sich die Drehung um A aufhebt und schließlich nur eine Drehung um B übrig bleibt. Im Gegensatz zu der früheren (S. 122) Behandlung dieses Falles scheinen hier zwei Lösungen aufzutreten, gemäß Fig. 74 a und Fig. 74 b. Eine genauere Betrachtung zeigt, daß nur die Lösung Fig. 74 b richtig ist, welche mit der früher gegebenen genau übereinstimmt. In Fig. 74 a führt die Ver-

schiebung A von A' nach A'_2 und B von B' nach B'_1, so daß B durch die folgende Drehung um A in A'_2 nicht nach B' zurückgeführt wird; ebensowenig wird A durch die Drehung um B in B' von A' nach A'_2 geführt.

Dagegen stimmt alles für Fig. 74 b. Hier werden A und B durch die Verschiebung [s] bezw. von A' nach A'_1 und von B' nach B'_2 geführt, so daß eine darauf folgende Drehung um A in A'_1, dem starken Pfeile entsprechend, B von B'_2 nach B' zurückbringt; ebenso wird A durch eine Drehung um B in B' von A' nach A'_1 gebracht.

Fig. 75 a.

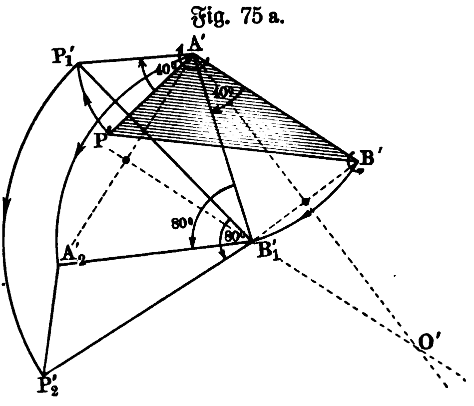


Fig. 75 b.

Die Fig. 74 a stellt eine richtige Lösung dar für den Fall, daß die gegebene Drehung, dem starken Pfeile $\overline{D}$ entsprechend, um B erfolgt, so daß A die neue Achse ist.

Unterscheiden wir die Achsen eines Drehungspaares, der Folge seiner Drehungen entsprechend, als erste und zweite Achse, so daß in Fig. 74 a die erste Achse durch A und die zweite Achse durch B, in Fig. 74 b die erste Achse durch B und die zweite Achse durch A bezeichnet werden, so gilt demnach:

Soll ein bestimmtes Drehungspaar, welches eine Verschiebung [s] ersetzt und welches unter Erhaltung der Richtung des Vektors [AB] beliebig bewegt werden darf, dazu dienen, die Drehung um eine bestimmte Achse aufzuheben, so muß dazu stets die zweite Achse des Paares benutzt werden.

Umgekehrt läßt sich eine Drehung um eine Achse B (starker Pfeil D) nach Fig. 74 a oder eine Drehung um eine Achse A (starker Pfeil D) nach Fig. 74 b auf unendlich-viele Weisen ([s] und [AB] sind veränderlich) zerlegen in eine Drehung derselben Art um eine Achse, parallel zur gegebenen, und in eine Verschiebung, wobei diese Komponenten stets vertauschbar sind.

Hat man also beliebig viele Drehungen um Parallelachsen (n) zu vereinigen, so kann man alle diese Drehungen auf eine Achse, parallel zu der gegebenen, übertragen, unter Abspaltung von n Verschiebungen, senkrecht zur Achsenrichtung. Wegen der Vertauschbarkeit der Komponenten jeder einzelnen Drehung darf man die Drehungen an der einen Achse unter sich

durch algebraische Addition und ebenso die Verschiebungen unter sich durch geometrische Addition vereinigen, so daß dann eine Drehung mit einer Verschiebung, senkrecht zur Achsenrichtung, zu vereinigen ist, welche schließlich zu einer Drehung um eine Achse der gegebenen Richtung führt. Treten außerdem beliebig-viele Verschiebungen hinzu, so ergiebt sich eine Schraubung.

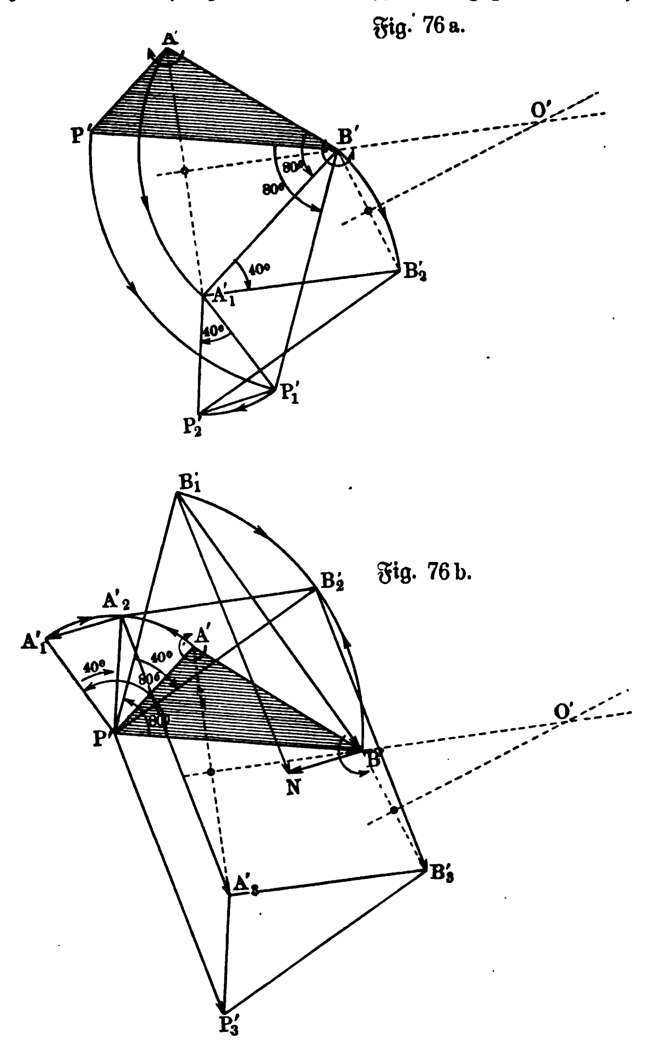


Fig. 76 a.

Fig. 76 b.

Obige Darstellung könnte den Anschein erwecken, als ob dabei eine eindeutige Lösung erhalten würde. Dies ist nicht der Fall, da die ursprünglich gegebene Folge der Drehungen die Richtungen der einzelnen Verschiebungen, welche senkrecht zur Achsenrichtung auftreten, durchaus bestimmt. Dies soll an dem Falle zweier Drehungen in den Figuren 75 (a. v. S.) und 76 veranschaulicht werden.

In Fig. 75 a ist die Folge A, B unmittelbar behandelt, in Fig. 75 b durch Verschiebung der Achsen nach P'.

In Fig. 76 a ist die Folge B, A unmittelbar behandelt, in Fig. 76 b durch Verschiebung der Achsen nach P'.

Der Vergleich der Figuren 75 b und 76 b zeigt, daß die Drehung um P', welche der Drehung um A' entspricht (40°), das eine Mal die Verschiebung $[A_1' A']$ und das andere Mal die Verschiebung $[A_2' A_1']$ fordert und daß diese zwar im Werte, nicht aber in der Richtung übereinstimmen. Ebenso

steht es in Bezug auf die Drehung für B' mit den Verschiebungen $[B'_2 B'_1]$ und $[B'_1 B']$. Demnach ist auch in Fig. 75 b die Gesamtverschiebung $[B'_2 B'_3] \overset{\times}{\triangleq} [B'_2 B'_1] \overset{\times}{+} [B'_1 B'_3]$, wobei $[B'_1 B'_3] \overset{\times}{\triangleq} [A'_1 A']$ ist, unterschieden von der in Fig. 76b auftretenden Gesamtverschiebung $[B'_1 N] \overset{\times}{\triangleq} [B'_1 B'] \overset{\times}{+} [B' N]$, wobei $[B' N] \overset{\times}{\triangleq} [A_2 A'_1]$ ist, und zwar nach Wert und Richtung.

Handelt es sich um Drehungen und beliebig-viele Achsen, welche sich in einem Punkte P schneiden, so tritt an die Stelle der Untersuchung in der Ebene, welche für Parallelachsen durchgeführt wurde, eine entsprechende Untersuchung auf der Kugelfläche. Die einzelnen Achsen bestimmen auf einer Kugelfläche vom Mittelpunkte P die Drehpunkte für die sphärischen Bewegungen, welche den Achsendrehungen entsprechen. Alle diese sphärischen Bewegungen führen schließlich bei bestimmter Folge irgend eine Figur der Kugelfläche aus einer Anfangslage in eine bestimmte Endlage, in die jene Figur auch durch eine Drehung hätte gebracht werden können. Demgemäß ist die Gesamtheit der Drehungen um Achsen aus P durch eine Drehung um eine Achse aus P ersetzbar, so lange es sich nur um Lagenänderungen handelt.

Treten beliebig-viele Verschiebungen hinzu, so ist deren Resultante wieder in eine Komponente senkrecht zur resultierenden Achse, und in eine Komponente parallel zur resultierenden Achse zu zerlegen, so daß auch hier im allgemeinen eine Schraubung entsteht.

Handelt es sich endlich um Drehungen um beliebig-viele Achsen, welche zu einander windschief liegen, so ersetzt man die Drehung um jede Achse durch eine Drehung um eine parallel zu ihr liegende Achse und eine Verschiebung, und zwar so, daß die neuen Achsen alle durch einen Punkt gehen. Damit ist dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt, mögen noch beliebig-viele Verschiebungen hinzutreten oder nicht.

Beispiele: Veranschaulichung an Maschinenmodellen.

35. Zusammensetzungen von Lagenänderungen eines starren Körpers aus elementaren Verschiebungen und Drehungen und die entsprechenden Zerlegungen. Um eine bestimmte Bewegung eines starren Körpes darzustellen, hat man die Lagenänderungen, denen er dabei innerhalb einer bestimmten Zeit unterliegt, zu dieser Zeit selbst in Beziehung zu setzen. Diese Aufgabe ist für Verschiebungen und Drehungen in der Phoronomie des Punktes mitgelöst worden, und auch andere einfache Bewegungen, wie z. B. die gleichförmige Schraubenbewegung (vergl. S. 119), bieten gemäß der früheren Betrachtung der Behandlung keine Schwierigkeiten. Überhaupt hat man bei der Untersuchung einer Bewegung eines Körpers stets auf die Methodik der Phoronomie des Punktes zurückzugreifen, d. h. man hat die Dauer t der Bewegung in n unter sich gleiche Teile τ zu zerlegen und die den Teilpunkten von t entsprechenden Lagen des Körpers zu bestimmen, so daß gegebenenfalls ein Grenzübergang für $lim\, \tau = 0$ zur Darstellung der Bewegung des Körpers führt.

Bei der Bedeutung, welche Verschiebungen und Drehungen als Komponenten der Lagenänderung haben, ist es zunächst erforderlich, diese für eine elementare Teilung der Zeit zu betrachten und dabei die entsprechenden Geschwindigkeiten einzuführen.

Die Zusammensetzung und Zerlegung von endlichen Verschiebungen ist so einfach, daß sich hier beim Übergange zu elementaren Verschiebungen keine neuen Gesichtspunkte ergeben.

Anders steht es beim Übergange von endlichen Drehungen zu elementaren Drehungen und demnach auch mit der Verbindung von Verschiebungen und Drehungen bei elementarer Teilung.

Während nämlich eine bestimmte Lagenänderung aus bestimmten Verschiebungen erwächst, mögen diese nacheinander in beliebiger Folge oder gleichzeitig auftreten, ist bei der Verbindung mehrerer endlichen Drehungen von verschiedenen Achsen stets auf deren Reihenfolge Rücksicht zu nehmen, und deshalb stößt auch die Vorstellung von einem gleichzeitigen Auftreten solcher Drehungen von vornherein auf Schwierigkeiten. Diese verwickelten Beziehungen vereinfachen sich beim Übergange von endlichen Drehungen zu elementaren Drehungen außerordentlich.

Den Nachweis dafür beginnen wir mit der Darstellung des Drehungspaares für elementare Drehungen. Nach Fig. 73 (S. 124) ergab sich für die beiden Verschiebungen, welche dem Drehungspaare bezw. bei den Folgen A, B und B, A entsprechen, der gemeinsame Wert $s = 2\,AB\,sin\frac{\sigma}{2}$, während ihre Richtungen um σ abweichen. Je kleiner σ wird, um so geringer ist der Fehler bei der Vertauschung von $sin\frac{\sigma}{2}$ durch $\frac{\sigma}{2}$, so daß sich s für $AB = l$ bei abnehmendem σ der Grenze $l\,.\,\sigma$ nähert. Führen wir die Winkelgeschwindigkeit $\varphi = lim\left[\frac{\sigma}{\tau}\right]$ und die Lineargeschwindigkeit $v = lim\left[\frac{s}{\tau}\right]$ ein, so folgt aus der Gleichung $\frac{s}{\tau} = l\cdot\frac{\sigma}{\tau}$ für die Grenze $v = l\,.\,\varphi$, während zugleich der Unterschied σ in den Richtungen der beiden Verschiebungen verschwindet.

Ein elementares Drehungspaar, welches der Winkelgeschwindigkeit φ entspricht, ist also ohne Rücksicht auf die Folge seiner beiden Drehungen durch eine elementare Verschiebung von der Geschwindigkeit $v = l\,.\,\varphi$ ersetzbar, deren Richtung in der Ebene der Drehungen und zwar senkrecht zur Verbindungsstrecke der Drehpunkte ($AB = l$) liegt. Die beiden Drehungen eines solchen elementaren Paares können infolgedessen auch als gleichzeitige Vorgänge aufgefaßt werden. Zur weiteren Erläuterung diene Fig. 77a. Die Drehung um A bewegt B in der Zeit τ um $l\,\varphi\,.\,\tau$, während zugleich die Drehung um B in derselben Zeit A um $l\,\varphi\,.\,\tau$ bewegt, beide Male im Sinne der gezeichneten Verschiebungspfeile. Ebenso wird Punkt P zugleich um $l\,\varphi\,.\,\tau$ bewegt, da ihn die Drehung um A um $AP\,.\,\varphi\,.\,\tau$ hebt (im Sinne der Zeichnung), während ihn die Drehung um B um

$BP \cdot \varphi \cdot \tau$ senkt, so daß er sich im ganzen um $(BP - AP) \cdot \varphi \cdot \tau = l\varphi \cdot \tau$ senkt. Dasselbe gilt für alle anderen Punkte, wie Q und R.

Da bei elementaren Drehungen die unendlich-kleinen Drehungsstrecken den entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten proportional sind, so braucht man diese in der Zeichnung als Drehungsstrecken, wie es Fig. 77 b für das Drehungspaar von Fig. 77 a zeigt.

Fig. 77 a.

Fig. 77 b.

Wenn Fig. 77 a in der Ebene des Papieres liegt, ist Fig. 77 b senkrecht dazu zu denken und zwar so, daß der Pfeil von A nach oben, der Pfeil von B nach unten zeigt.

Hat man ferner zwei verschiedene elementare Drehungen $[\sigma_1]$ und $[\sigma_2]$, denen die Winkelgeschwindigkeiten φ_1- und φ_2 entsprechen, um Parallelachsen A und B zu vereinigen, so verfährt man für Drehungen von verschiedenem Sinne nach Fig. 78, für Drehungen von gleichem Sinne nach Fig. 79; dabei ist vorausgesetzt, daß $\sigma_1 > \sigma_2$ ist. Die beiden Teile der Fig. 78 u. 79 stehen zu einander in derselben Beziehung wie die beiden Teile der Figur 77.

Fig. 78 a.

Fig. 78 b.

In Fig. 78 denke man sich die Drehung um B durch eine Drehung um A zu einem Drehungspaare ergänzt, so daß eine Drehung um A von der Amplitude $\sigma_1 - \sigma_2$ im Sinne von $[\sigma_1]$ übrig bleibt. Das Drehungspaar liefert die Verschiebung $[l\sigma_2]$, so daß diese mit der Drehung $[\sigma_1 - \sigma_2]$ um A zu vereinigen ist. In Fig. 78 a werden durch die Drehung um A alle Punkte rechts von A gesenkt, alle Punkte links von A gehoben, während die Verschiebung alle Punkte senkt; demgemäß muß der Drehpunkt O für die Vereinigung der Verschiebung und der Drehung links von A liegen.

Fig. 79 a.

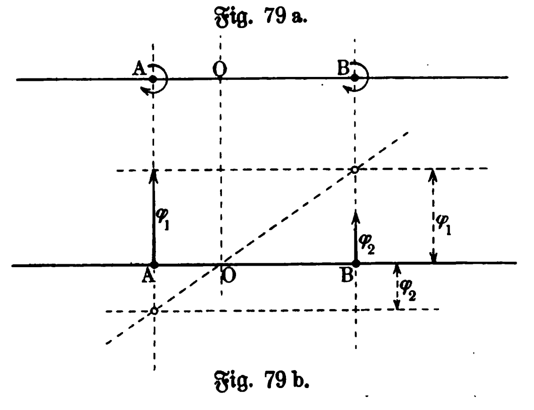


Fig. 79 b.

Für seine Bestimmung hat man:

$$OA(\varphi_1 - \varphi_2) = l\varphi_2, \text{ d. h. } OA = l\frac{\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Da nun $OB = OA + l = l\frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_2}$ ist, so ist $OA : OB = \varphi_2 : \varphi_1$, d. h. O ist der äußere Teilpunkt der Strecke AB für das Verhältnis $\varphi_2 : \varphi_1$. Diese äußere Teilung nach dem umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten veranschaulicht Fig. 78b.

Für Fig. 79 denke man sich ein Drehungspaar $[-\sigma_2]$ und $[+\sigma_2]$ so zugesetzt, daß die Drehung um B verschwindet und also eine Drehung um A von der Amplitude $\sigma_1 + \sigma_2$ im Sinne von $[\sigma_1]$ auftritt. Die Verschiebung $l\varphi_2$, welche dem eingeführten Drehungspaar entspricht, ist nach unten gerichtet und muß durch eine nach oben gerichtete Verschiebung $l\varphi_2$ wieder ausgeglichen werden, so daß hier die Drehung um A mit dieser nach oben gerichteten Verschiebung vereinigt werden muß. In Fig. 79a werden durch die Drehung um A alle Punkte rechts von A gesenkt, alle Punkte links von A gehoben, während die Verschiebung alle Punkte hebt; demgemäß muß der Drehpunkt O für die Vereinigung der Verschiebung und Drehung rechts von A liegen. Für seine Bestimmung hat man $AO(\varphi_1 + \varphi_2) = l\varphi_2$, d. h. $AO = l\frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}$ und $AO < AB$.

Da nun $OB = l - AO = l\frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}$ ist, so ist $AO : OB = \varphi_2 : \varphi_1$, d. h. O ist der innere Teilpunkt der Strecke AB für das Verhältnis $\varphi_2 : \varphi_1$. Diese innere Teilung nach dem umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten veranschaulicht Fig. 79b.

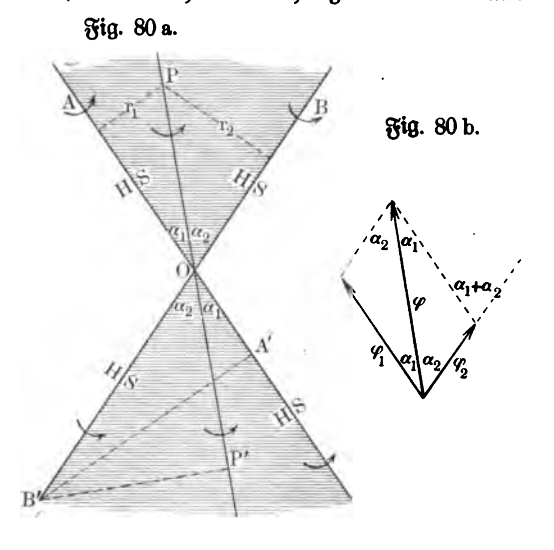
Die Fig. 78b und 79b stellen in ihrer Vereinigung eine harmonische Teilung dar, für welche ferner Fig. 77b den Sonderfall der Fig. 78b für das Verhältnis 1 : 1 bezeichnet (∞). Derselbe Sonderfall der Fig. 79b würde O in der Mitte von AB zeigen.

Diese Betrachtungen lassen sich leicht auf Achsen ausdehnen, die sich schneiden. Dazu denken wir die Achsen besser in der Ebene der Zeichnung gelegen, wie es Fig. 80a für die Achsen AA' und BB' zeigt, welche sich in O schneiden. Die Ebene der Zeichnung zerfällt in vier Felder, für welche durch die Buchstaben H und S als Abkürzung für Hebung und Senkung hervorgehoben ist, welchen Einfluß die beiden Drehungen hervorrufen. Die Drehung um AA' sucht alle Punkte rechts von AA' zu senken und alle Punkte links von AA' zu heben, die Drehung um BB' sucht alle Punkte rechts von BB' zu senken und alle Punkte links von BB' zu heben. Nur in dem (schraffierten) Felde, für welches sich Hebungen und Senkungen verbinden, können Punkte liegen, welche durch beide Drehungen in Ruhe bleiben. Bezeichnet P einen solchen fraglichen Punkt, so betragen seine Senkung durch die Achse AA' und seine Hebung durch die Achse BB' in der Zeit τ bezw. $r_1 \varphi_1 \tau$ und $r_2 \varphi_2 \tau$, falls die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten φ_1 und φ_2 sind. Die Ruhe von P fordert $r_1 \varphi_1 = r_2 \varphi_2$ oder, da $r_1 = OP \sin \alpha_1$ und $r_2 = OP \sin \alpha_2$ ist, $\varphi_1 \sin \alpha_1 = \varphi_2 \sin \alpha_2$, d. h.

$\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 = \varphi_2 : \varphi_1$. Demgemäß sind alle Punkte der Achse OP in Ruhe, falls $\measuredangle\, AOB$ so innerlich geteilt wird, daß die Sinus der Teilwinkel im umgekehrten Verhältnisse der entsprechenden Winkelgeschwindigkeit stehen. Die entsprechende Teilung zeigt Fig. 80 b.

Da nun statt der beiden Achsen AA' und BB' die eine Achse OP auftritt, so muß irgend ein Punkt der Zeichenebene, z. B. B', durch die Drehung um OP in dieselbe Lage kommen, wie durch die Drehungen um AA' und BB'. Da B' auf der Achse BB' liegt, so kommt nur die Hebung durch die Drehung um AA' in Frage, welche $B'A' . \varphi_1 \tau$ für die Zeit τ beträgt, und demnach muß B' durch die Drehung um OP um dieselbe Strecke gehoben werden. Bezeichnet man die Winkelgeschwindigkeit für OP mit φ, so hat die entsprechende Hebung durch die Achse OP für B' den Wert $B'P' . \varphi\tau$, und man hat also

Fig. 80 a. Fig. 80 b.



$$B'A' . \varphi_1 \tau = B'P' . \varphi \tau,$$

d. h.

$$\varphi = \varphi_1 \frac{B'A'}{B'P'} .$$

Da $B'A' = OB' . \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$ und $B'P' = OB' . \sin\alpha_2$ ist, so hat man $\varphi = \varphi_1 \dfrac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_2}$, d. h. φ ist die Diagonale zu dem in Fig. 80 b aus φ_1 und φ_2 gebildeten Parallelogramm und zwar so, daß zugleich

$$[\varphi] \overset{\times}{=} [\varphi_1] \overset{\times}{+} [\varphi_2]$$

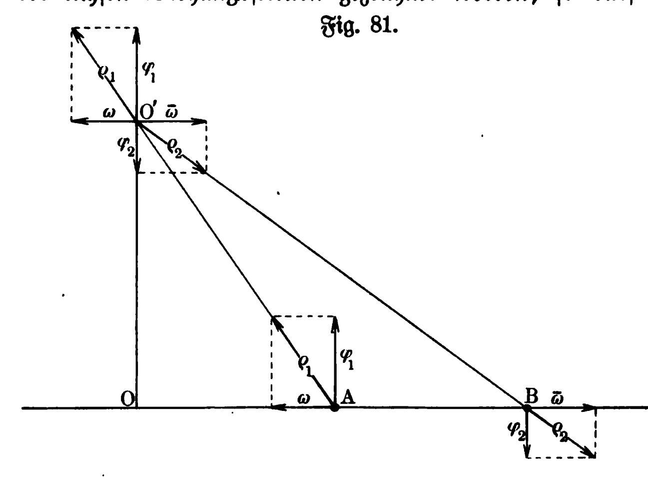
gilt.

Demnach lassen sich die Winkelgeschwindigkeiten bei zwei sich schneidenden Achsen nach dem Parallelogrammprincipe vereinigen, woraus ohne weiteres eine Ausdehnung auf beliebig-viele Achsen, die sich in einem Punkte schneiden, folgt. Natürlich ist auch hier die Vorstellung gleichzeitiger Drehungen zulässig, weil die Folge der Drehungen keinen Einfluß auf das Ergebnis hat.

Es liegt nun nahe zu fragen, ob nicht auch der Fall der Parallelachsen durch das Parallelogrammprincip behandelt werden kann. Dies ist möglich, wenn man zwei Drehungsstrecken von gleicher Größe und entgegengesetztem Sinne, welche in einer Geraden liegen, einführt, sie mögen Gegen-Drehungsstrecken heißen. Solche Gegen-Drehungsstrecken kann man stets zusetzen oder fortnehmen, ohne an dem gegebenen Bewegungszustande etwas zu ändern, da die entsprechenden Drehungen um die Gerade, auf welcher sie liegen, sich für jedes Zeitelement τ zerstören.

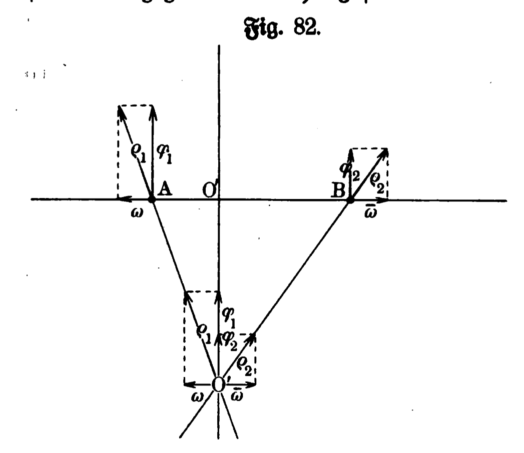
Führt man in Fig. 78 auf AB zwei solche Strecken $[\omega]$ und $[\overline{\omega}]$ ein, wie Fig. 81 zeigt, so geben $[\omega]$ und $[\varphi_1]$ für sich und $[\overline{\omega}]$ und $[\varphi_2]$ für sich nach dem eben bewiesenen Satze bezw. die Resultanten $[\varrho_1]$ und $[\varrho_2]$, deren Achsen sich in O' schneiden. Da es gleichgültig ist, an welcher Stelle der Achsen Drehungsstrecken gezeichnet werden, so darf man $[\varrho_1]$ und $[\varrho_2]$ nach O' verschieben und sie dort zu einer Resultante vereinigen. Um dies zu bewirken, zerlegt man $[\varrho_1]$ und $[\varrho_2]$ am besten wieder bezw. in $[\omega]$ und $[\varphi_1]$ und in $[\overline{\omega}]$ und $[\varphi_2]$, so daß sich unmittelbar die Resultante $[\varphi_1 - \varphi_2]$ im Sinne von $[\varphi_1]$ ergiebt. Daß ihre Achse AB in demselben Punkte O schneidet, der in Fig. 78b gewonnen wurde, ist leicht ersichtlich.

Fig. 81.



Würde man dies Verfahren auf Fig. 77b anwenden, so erhielte man statt des gegebenen Drehungspaares nur ein anderes, ohne daß sich dabei die Verschiebung $l\varphi . \tau$ änderte. Diese ist eine Konstante für alle solche Umformungen.

Fig. 82.



Dasselbe Verfahren führt für Fig. 79b zu den Konstruktionen, welche Fig. 82 darstellt.

Mit dieser neuen Behandlung der Drehung um Parallelachsen ist nun auch die Möglichkeit gegeben, beliebig-viele elementare Drehungen um beliebig-gelagerte Achsen nach dem Parallelogrammprincip zu vereinigen, auch in Verbindung mit beliebig-vielen Verschiebungen. Kommen Achsen vor, welche windschief zu einander liegen, so legt man durch eine dieser Achsen Parallelen zu den übrigen und verwandelt deren Drehungen, unter Abspaltung von Verschiebungen, in Drehungen um Achsen aus einem Punkte.

Stellt man jede elementare Drehung durch die entsprechende Drehungs-

strecke dar, so ist jede dieser Strecken auf ihrer Geraden (Achse) beliebig verschiebbar, sie dürfen auch parallel mit sich verschoben werden, falls man der Drehung eine entsprechende Verschiebung hinzufügt [1]).

Im allgemeinen gelangt man bei der Vereinigung von Verschiebungen und elementaren Drehungen zu einer Schraubenbewegung.

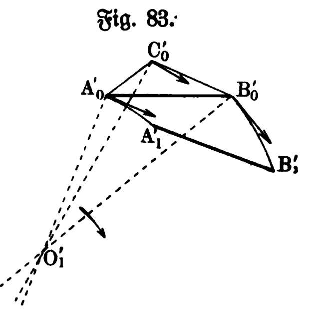
Beispiele: Veranschaulichung von Maschinenmodellen.

36. Die ebene Bewegung und die sphärische Bewegung des starren Körpers. Wenn eine Ebene E des Körpers bei dessen Bewegung stets mit einer Ebene E' des Raumes zusammenfällt, so wird die Bewegung des Körpers eine ebene Bewegung genannt. In diesem Falle ist die Bewegung des Körpers vollständig bestimmt, wenn man für jeden Zeitpunkt die Lage von E in E' kennt. Man betrachtet dazu die Lagen einer Bewegungsstrecke AB von E in E' zur Zeit 0, τ, $2\tau, \ldots$, welche der Reihe nach $A'_0B'_0$, $A'_1B'_1$, $A'_2B'_2$ sein mögen und stellt für je zwei Nachbarlagen den Drehpunkt (Pol) für deren Überführung fest. Bezeichnet man die Reihe dieser Drehpunkte (Pole) in E durch $O_1, O_2, \ldots$ und in E' durch $O'_1, O'_2, \ldots$, so fällt O_1 mit O'_1 zusammen während der Zeit $0 \ldots \tau$, O_2 mit O'_2 während der Zeit $\tau \ldots 2\tau$ u. s. w. Demnach fällt zur Zeit τ sowohl O_1 auf O'_1, als auch O_2 auf O'_2, also auch die Strecke O_1O_2 auf $O'_1O'_2$ u. s. w. Der Streckenzug $O_1O_2 \ldots$ und der Streckenzug $O'_1O'_2$ haben also der Reihe nach je eine Seite gemeinsam, sie rollen aufeinander ab, ohne zu gleiten. Für $\lim \tau = 0$ gehen die beiden Streckenzüge im allgemeinen in Kurven über, welche als bewegliche und als feste Polbahn unterschieden werden, so daß jede Bewegung von E in E' als Abrollen einer beweglichen Polbahn auf einer festen Polbahn angesehen werden kann; die Berührungspunkte beider Bahnen sind dabei jedesmal die augenblicklichen Drehpunkte.

Beispiel: Bei der Erzeugung der Cykloide rollt ein beweglicher Kreis auf einer festen Geraden, welche bezw. als bewegliche und feste Polbahn aufgefaßt werden kann.

Kennt man die Bahnen von A und B in E', so bestimmt der Schnittpunkt zusammengehöriger Normalen derselben stets einen augenblicklichen Drehpunkt, wie es Fig. 83 für die Lagen $A'_0B'_0$ und $A'_1B'_1$ erläutert. Die Tangenten in A'_0 und B'_0 stimmen überein mit den augenblicklichen Bewegungsrichtungen, während die zugehörigen Normalen $A'_0O'_1$ und $B'_0O'_1$ sich im augenblicklichen Drehpunkt schneiden. Der elementaren Verschiebung entspricht die Lage O'_1 im Unendlichen.

Fig. 83.



Für jeden dritten Punkt C, der in Fig. 83 in der Lage C'_0 gezeichnet ist, giebt der Kreis mit $O'_1C'_0$ um O'_1 die Bewegungsrichtung an. Ist

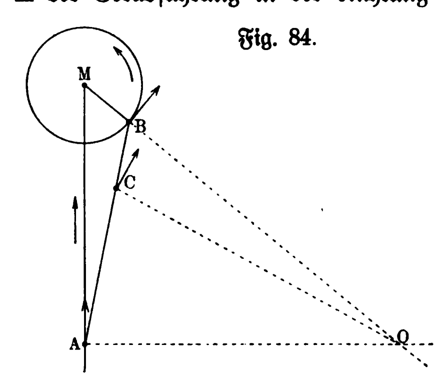
[1]) Es entspricht dies der später zu behandelnden Vereinigung beliebig-vieler Kräfte mit zerstreuten Angriffspunkten.

die Geschwindigkeit v irgend eines Punktes P und dessen Abstand r vom augenblicklichen Drehpunkt O_1' gegeben, so ist $\frac{v}{r} = .\varphi$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung für O_1' und demnach ist auch die Geschwindigkeit jedes anderen in seiner Lage gegen O_1' gegebenen Punktes bekannt, sie ist z. B. für A und B bezw. $O_1'A_0' . \varphi$ und $O_1'B_0' . \varphi$.

Beispiel: Bei der Cykloide ist die Verbindungsgerade des Berührungspunktes von Kreis und Gerade und des erzeugenden Punktes Normale, so daß die zugehörige Tangente leicht gezeichnet werden kann.

Bei der in Fig. 84 angedeuteten Bewegung einer Kurbelstange unterliegt A der Geradführung in der Richtung AM, während sich B auf dem Kreise um M bewegt. Den Bewegungsrichtungen entsprechend, liefern die Normalen von A und B den augenblicklichen Drehpunkt O, so daß damit die Bewegungsrichtung für jeden anderen Punkt C bestimmt ist. Hat B die Geschwindigkeit c, so ist die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit für O gegeben als $\frac{c}{BO}$, so daß C die Geschwindigkeit $v = c\frac{CO}{BO}$ hat.

Fig. 84.



Denkt man senkrecht zu E' und E auf den beiden Polbahnen Cylinderflächen errichtet, so entspricht dem Abrollen der Polbahnen ein Abrollen dieser Cylinderflächen, d. h. die ebene Bewegung eines Körpers besteht stets in dem Abrollen einer im Körper gelegenen Cylinderfläche auf einer im Raume gelegenen Cylinderfläche, deren Normalschnitte die zugehörigen Polbahnen der ebenen Bewegung sind.

Denkt man sich wieder die Betrachtung der Ebene auf eine Kugelfläche übertragen, so gelangt man zu einer Darstellung der sphärischen Bewegung eines starren Körpers, bei welcher eine Kugelfläche K des Körpers stets mit einer (konzentrischen) Kugelfläche K' des Raumes zusammenfällt, so daß sich der Körper um deren gemeinsames Centrum M als festen Punkt dreht. Den beiden ebenen Polbahnen der ebenen Bewegung entsprechen hier sphärische Polbahnen, den Cylindern Kegel mit der Spitze M (deren Seiten je einen Pol mit M verbinden), d. h. die sphärische Bewegung eines Körpers besteht in dem Abrollen einer im Körper gelegenen Kegelfläche auf einer im Raume gelegenen Kegelfläche von gemeinsamer Spitze M, deren Durchdringungen mit einer Kugel aus M die zugehörigen Polbahnen der sphärischen Bewegung sind.

Rückt M ins Unendliche, so geht die sphärische Bewegung in die ebene Bewegung über.

37. Die allgemeine Bewegung eines starren Körpers. Sind die Lagen eines Bewegungsdreiecks ABC zur Zeit $0, \tau, 2\tau, \ldots$ gegeben, so kann man unter Auszeichnung des Punktes C (vergl. § 32), dessen Lagen $C'_0, C'_1, C'_2, \ldots$ im Raume durch einen Streckenzug verbinden und diesen Streckenzug als Leitlinie für aufeinander folgende Verschiebungen des Körpers, entsprechend $[C'_0 C'_1]$, $[C'_1 C'_2]$, ... benutzen. Schaltet man zwischen je zwei solche Verschiebungen je eine Drehung bezw. um eine Achse durch $C'_1, C'_2, \ldots$ ein, so daß das Bewegungsdreieck ABC durch die Verschiebung längs $[C'_0 C'_1]$ und durch die Drehung um die Achse durch C'_1 in die Lage $A'_1 B'_1 C'_1$, durch die Verschiebung längs $[C'_1 C'_2]$ und durch die Drehung um die Achse durch C'_2 in die Lage $A'_2 B'_2 C'_2$ kommt, so erhält man eine um so genauere Darstellung der wirklichen Bewegung, je kleiner man τ macht. Die Achse, welche durch C'_p geht, ist sowohl eine Achse im Raume (c'_p), als auch eine Achse (c_p) im Körper. Die Achsen im Körper $(c_1, c_2, \ldots)$ gehen alle durch den Punkt C und bilden demnach für $\lim \tau = 0$ einen Kegel mit der Spitze C im Körper. Zieht man durch jeden Raumpunkt C'_p zu allen Achsen $c'_1, c'_2, \ldots$ außer c'_p, Parallelen, so bildet sich in jedem Punkte C'_p ein System von Achsen, das für $\lim \tau = 0$ in einen Kegel im Raume übergeht. Da alle diese Kegel in den Punkten $C'_1, C'_2, \ldots$ unter sich kongruent und parallel gelagert sind, so kann man sie als Lagen eines und desselben, sich im Raume, längs der $C'_0 C'_1 C'_2, \ldots$ für $\lim \tau = 0$ entsprechenden Linie verschiebenden Kegels ansehen. Die Spitze dieses beweglichen Kegels muß stets mit dem Punkte C des Körpers zusammenfallen, in welchem auch die Spitze des Körperkegels liegt, während die Stellung der beiden Kegel zu einander dadurch bestimmt ist, daß stets die Achse c'_p mit der Achse c_p zusammenfällt, sobald der Raumpunkt C'_p von den Kegelspitzen erreicht wird. Da demnach der Reihe nach aufeinander folgende Seiten der beiden Kegel als Achsen für die Drehungen aufeinander fallen, so rollt der eine Kegel auf dem anderen ab.

Demnach läßt sich jede Bewegung eines starren Körpers, unter Auszeichnung eines Punktes C, darstellen als das Abrollen eines im Körper festen Kegels mit der Spitze C auf einen im Raume sich verschiebenden Kegel mit der Spitze C, für dessen Verschiebung die Bahn von C Leitlinie ist.

Beispiel: Bei der Bewegung der Erde ist die Verbindungslinie der Pole nicht Drehungsachse, es rollt vielmehr ein Kegel von 0,″0087 Öffnung, dessen Achse die Erdachse und dessen Spitze der Erdmittelpunkt ist, in einem Kegel von $23^1/_2$ Grad Öffnung, dessen Achse Normale der Erdbahn ist und dessen Spitze wiederum der Erdmittelpunkt ist. Die Verschiebung des zweiten Kegels auf der Erdbahn wird durch die Bewegung des Erdmittelpunktes bestimmt, während der erste Kegel in ihm im Sinne dieser Verschiebung abrollt und zwar so, daß in einem Tage ein voller Umgang erfolgt. Infolgedessen ändert sich die Lage der Erdachse und des Äquators fortwährend, so daß die Schnittpunkte der Erdbahn und einer dem Äquator stets parallel laufenden Ebene durch den Mittelpunkt der Erdbahn auf dieser 50″ im Jahre fortrücken, der Bewegung der Erde entgegen. Das Fortrücken dieser Äquinoktialpunkte heißt „Präcession der Tag- und Nachtgleichen“.

Wird der Punkt C festgehalten, so geht die allgemeine Bewegung wieder in die sphärische Bewegung über.

Sind die den Zeitpunkten $0, \tau, 2\tau, \ldots$ entsprechenden Lagen des Bewegungsdreiecks ABC als $A_0 B_0 C_0$, $A_1 B_1 C_1$, ... gegeben, so kann man auch durch eine Schraubung gemäß § 33 die Überführung aus jeder Lage in die Nachbarlage bewirkt denken. Dabei schneidet jede Centralachse, welche zugleich als Richtung der Verschiebung und als Drehungsachse dient, die folgende nicht mehr, so daß ihr System im Körper eine Regelfläche und im Raume eine andere Regelfläche bildet, von denen je eine Erzeugende für eine Verschiebung und eine Drehung des Körpers zusammenfällt.

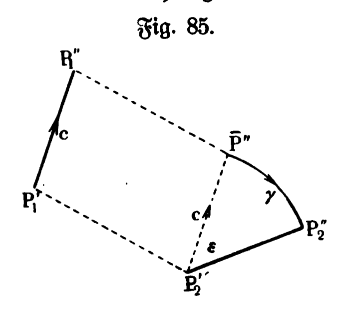
Demnach läßt sich die Bewegung eines starren Körpers auch darstellen als Gleiten und Rollen einer Regelfläche des Körpers auf einer Regelfläche des Raumes.

Diese Darstellung ist eindeutig, während die vorher gegebene für jeden Punkt C des Körpers durchgeführt werden kann, also unendlich-vieldeutig ist.

38. Allgemeine Behandlung der Mittelbewegung eines Punktes; Satz von Coriolis. Die Betrachtungen der vorigen Paragraphen gestatten nun auch, eine Lücke (vergl. § 21 und § 25) auszufüllen, welche in der Phoronomie des Punktes offen geblieben war. Solange die Seitenbewegungen eines Punktes ein Verschiebungssystem (vergl. § 21) bilden, erwächst die Mittelbewegung aus den Seitenbewegungen ohne weiteres nach dem Parallelogrammprincipe. Dies ist nicht mehr der Fall, wenn die Seitenbewegungen nicht als Verschiebungssystem auftreten.

Denkt man sich bei zwei Seitenbewegungen eines Punktes W die Bahn der einen durch irgend eine Linie bestimmt (z. B. auf einem starren Körper) und die Bahn der anderen dadurch gegeben, daß diese Linie im Raume irgend eine bestimmte Bewegung (z. B. mit dem starren Körper) vollführt, so ist den früheren Entwickelungen gegenüber eine Ergänzung notwendig, für welche im wesentlichen die Betrachtungen der Polarmethode auf S. 108 maßgebend sind.

Fig. 85.



Wir geben diese Ergänzung zunächst gemäß Fig. 85 für die Ebene. Während W in der Zeit τ auf der gegebenen Linie von P_1' nach P_1'' fortrückt, mag das entsprechende Bahnstück selbst aus der Lage $P_1' P_1''$ in die Lage $P_2' P_2''$ übergehen und zwar so, daß keine Verschiebung vorliegt. Man kann dann zunächst, einer Verschiebung entsprechend, die Zwischenlage $P_2' \bar{P}''$ einschalten, so daß der Unterschied gegen die früheren Betrachtungen darin besteht, daß nun noch außerdem eine Drehung $[\varepsilon]$ um P_2' zu berücksichtigen ist, bei der W aus der Lage $\bar{P}''$ in die Lage P_2'' rückt.

Wird die Durchschnittsgeschwindigkeit für das Durchlaufen von $P_1' P_1'$

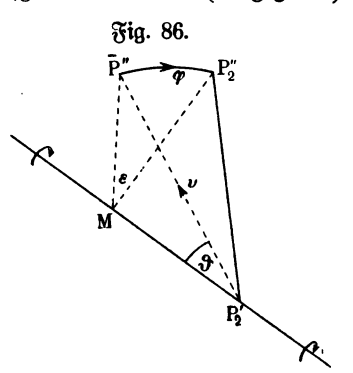
mit c bezeichnet, so ist $P_1' P_1'' = P_2' \overline{P}'' = c\tau$ und demgemäß Bogen $\widehat{\overline{P}'' P_2''} = c\tau \, arc\, \varepsilon$. Da die Drehung um den Winkel ε in der Zeit τ vor sich geht, so bezeichnet $\frac{arc\, \varepsilon}{\tau} = \gamma$ die durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit für die Erzeugung des Bogens $\widehat{\overline{P}'' P_2''}$, der sich demnach als $c\gamma \,.\, \tau^2$ darstellt. Für $\lim \tau = 0$ ist c durch v und γ durch φ zu ersetzen, so daß der Bogen $\widehat{\overline{P}'' P_2''}$ für eine elementare Teilung die Länge $v\varphi\tau^2$ hat und also in Bezug auf τ von der zweiten Ordnung ist. Bei einer ersten Annäherung verschwindet also der Einfluß der zuzusetzenden Drehung vollständig, so daß die **Bestimmung der Geschwindigkeit** gegen früher keiner Änderung unterliegt, wie bereits in § 21 von einem anderen Gesichtspunkte aus gezeigt wurde.

Dagegen weist der Ausdruck $v\varphi\tau^2 = \frac{1}{2}(2v\varphi)\tau^2$ auf eine neu hinzutretende Beschleunigung vom Wert $2v\varphi$ hin, welche tangential zu $\widehat{\overline{P}'' P_2''}$ gerichtet ist. Eine entsprechende normale Komponente wäre nach einer der Formeln Nr. 28 zu bilden, z. B. gemäß $r\gamma^2$, wobei in diesem Falle r durch $P_2' \overline{P}'' = v\tau$ und γ durch φ zu ersetzen ist, so daß sich $v\tau\varphi^2$ ergäbe, d. h. die Normalbeschleunigung ist hier Null für $\lim \tau = 0$.

Der Einfluß der Drehung besteht also in dem Hinzutritte einer Beschleunigung $[2v\varphi]$, deren Richtung im Sinne der Drehung senkrecht zu dem sich drehenden Bahnteilchen steht.

Um diese Betrachtung auf den Raum zu übertragen, hat man nur auf die Drehungsachse von P_2', welche für die Aufgabe der Ebene (in Fig. 85) in P_2' senkrecht auf der Ebene der Zeichnung steht, aus $\overline{P}''$ ein Lot $\overline{P}'' M$ zu fällen; dieses tritt für die Erzeugung des Bogens $\widehat{\overline{P}'' P_2''}$ an die Stelle von $P_2' \overline{P}''$, wie es Fig. 86 zeigt. Man hat hier $\widehat{\overline{P}'' P_2''} = M\overline{P}'' \,.\, arc\, \varepsilon = P_2' P_2'' \,.\, \sin\vartheta \,.\, arc\, \varepsilon = v\varphi \sin\vartheta \,.\, \tau^2 = \frac{1}{2}(2v\varphi\sin\vartheta)\tau^2$, so daß sich nun die Beschleunigung $[2v\varphi]$ für die Ebene als Sonderfall ($\vartheta = 90^0$) der Beschleunigung $[2v\varphi\sin\vartheta]$ für den Raum darstellt.

Fig. 86.



Abschließend kann man also sagen: Bewegt sich ein Punkt W auf einer Linie, die selbst in Bewegung ist, so erwächst für die damit bestimmte Mittelbewegung von W die **Geschwindigkeit** stets aus den **beiden Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen** nach dem Parallelogrammprincipe. Nach diesem Principe bildet sich auch die **Beschleunigung** von W, aber aus **drei Komponenten**, von denen die ersten beiden die Beschleunigungen der Seitenbewegungen sind, während die dritte durch $[2\varphi v \sin\vartheta]$ dargestellt wird. Dabei bedeutet v den Wert der Geschwindigkeit von W auf der sich bewegenden Linie zur Zeit t, φ die Winkelgeschwindigkeit für die augenblickliche Drehung dieser Linie (um P_1') und ϑ den Winkel zwischen $[v]$ und der

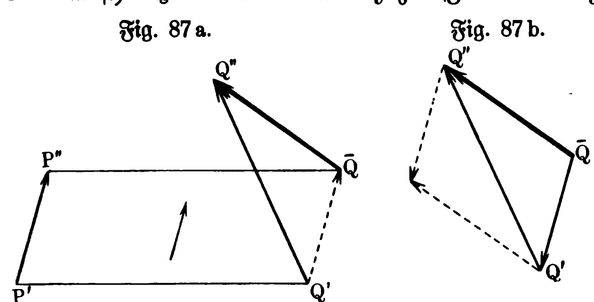
augenblicklichen Achse; die Richtung dieser dritten Komponente stimmt mit der augenblicklichen Drehung überein, d. h. sie ist senkrecht zu einer Ebene durch $[v]$ und die augenblickliche Drehungsachse und entspricht dem Sinne der Drehung.

Diese Bestimmung der Beschleunigung aus drei Komponenten ist auch als „Satz von Coriolis" bekannt. 40)

Beispiel: Die Bewegung, die S. 109 behandelt wurde.

39. Relativbewegung starrer Körper. Wenn sich zwei Punkte P und Q voneinander unabhängig bewegen, so kann man die veränderlichen Vektoren $[PQ]$ und $[QP]$ jederzeit bezw. als die Verlegungen von Q gegen P und von P gegen Q (vergl. S. 83) auffassen, indem man sich vorstellt, P bezw. Q solle auf kürzestem Wege nach Q bezw. P bewegt werden. Da die Bewegung von P und Q gegen irgend einen als unbeweglich geltenden Körper bezw. gegen den als unbeweglich gedachten unendlichen Raum bestimmt werden muß, so kann man die Lage von P und Q in dieser Hinsicht als absolute Lage bezeichnen, und davon die relative Lage von Q gegen P, bestimmt durch die Verlegung $[PQ]$, und die relative Lage von P gegen Q, bestimmt durch die Verlegung $[QP]$, unterscheiden. (Vergl. S. 3 u. f.) Haben nun P und Q zur Zeit t die Lagen P' und Q' und zur Zeit $t + \tau$ die Lagen P'' und Q'', so kann man auch von einer relativen Lagenänderung von Q gegen P und von P gegen Q während der Zeit τ sprechen. Denkt man sich, wie Fig. 87a zeigt, Q in der Lage Q' mit P in der Lage P' fest verbunden (durch einen Vektor) und außerdem ohne eigene Bewegung, so würde Punkt P den Punkt Q bei seiner Bewegung mit sich führen und nach $\bar{Q}$ bringen, so daß nun $\bar{Q}$ zu P'' dieselbe relative Lage hat, wie vorher Q' zu P'. Die relative Lagenänderung von Q gegen P wird also durch $[\bar{Q}\,Q'']$ dargestellt, so daß

Fig. 87a. Fig. 87b.



$$[Q'\bar{Q}] \overset{\times}{+} [\bar{Q}\,Q''] \overset{\times}{=} [Q'\,Q'']$$

oder auch

$$[\bar{Q}\,Q''] \overset{\times}{=} [Q'\,Q''] \overset{\times}{-} [Q'\bar{Q}]$$

ist. Da

$$[Q'\bar{Q}] \overset{\times}{=} -[\bar{Q}\,Q'] \overset{\times}{=} -[P''\,P']$$

ist, so gilt auch

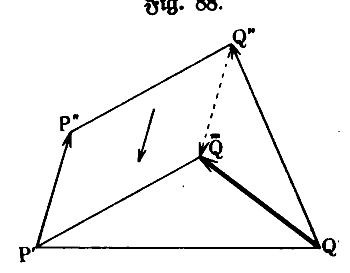
$$[\bar{Q}\,Q''] \overset{\times}{=} [Q'\,Q''] \overset{\times}{+} [\bar{Q}\,Q'] \overset{\times}{=} [Q'\,Q''] \overset{\times}{+} [P''\,P'].$$

Demnach gilt: Die relative Lagenänderung $[\bar{Q}\,Q'']$ von Q gegen P läßt sich darstellen als Resultante aus der [absoluten] Lagenänderung $[Q'\,Q'']$ von Q und der umgekehrten (absoluten) Lagenänderung $[P''\,P']$ von P. 41)

Diesen Satz veranschaulicht Fig. 87a nach Umkehrung des Pfeiles von $Q'\overline{Q}$, oder noch deutlicher Fig. 87b.

Die Umkehrung der Lagenänderung $[P''P']$ von P läßt sich auch unmittelbar zur Anschauung bringen, wenn man sich Q in der Lage Q'' mit P in der Lage P'' fest verbunden (durch einen Vektor) und außerdem ohne eigene Bewegung denkt und sich dann vorstellt, daß die Bewegung von P mit den fest verbundenen Punkten P und Q rückläufig vorgenommen würde, so daß P auf seiner Bahn in die alte Lage P' gelangt. Kommt dabei, wie es Fig. 88 zeigt, Q in die Lage $\overline{\overline{Q}}$, so stellt $[Q'\overline{\overline{Q}}]$ wiederum die relative Lagenänderung von Q gegen P dar. Die entsprechenden Vektorendreiecke der Figuren 87 und 88 bilden zusammen ein Parallelogramm, so daß der Unterschied von $[\overline{Q}\,Q'']$ und $[Q'\overline{\overline{Q}}]$ nur darin besteht, daß der eine Vektor an der Endlage Q'' von Q, der zweite an der Anfangslage Q' von Q haftet.

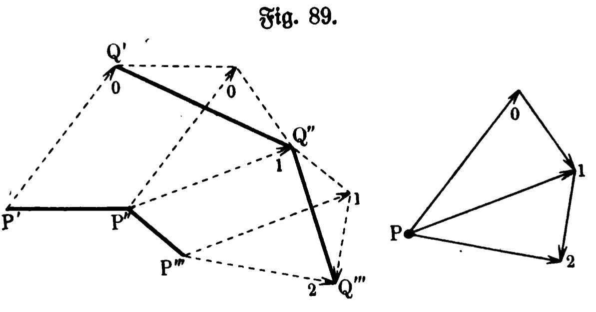
Fig. 88.



Denkt man sich in P einen Beobachter, der, an der Bewegung von P teilnehmend, diese selbst nicht bemerkt, so nimmt er nur die Relativbewegung von Q gegen P wahr, welche für ihn eine **scheinbare** Bewegung ist; darum nennt man die relative Bewegung auch **scheinbare Bewegung**.

Um die Bahn der relativen Bewegung von Q gegen P zu bestimmen, hat man die relativen Lagenänderungen für entsprechende Elemente der (absoluten) Bahnen von P und Q als Vektoren aneinander zu tragen. Nehmen P und Q bezw. zur Zeit $0, \tau, 2\tau, \ldots$ die Lagen $P', P'', P''', \ldots$ und $Q', Q'', Q''', \ldots$ ein, so macht man dazu, wie Fig. 89 zeigt, in einer Nebenskizze (wie beim Hodographen) P zum Ausgangspunkt der Vektoren $[P'Q']$, $[P''Q'']$, $[P'''Q''']$, ..., welche die relativen Lagen von Q gegen P zur Zeit 0, τ, $2\tau, \ldots$ bestimmen; der Streckenzug $0\,1\,2\ldots$ ist dann eine angenäherte Darstellung der relativen Bahn von Q gegen P, welche durch einen Grenzübergang zu einer genauen Darstellung führt.

Fig. 89.



Sind auch $[P'P'']$ und $[Q'Q'']$ in Fig. 87 und 88 nicht bloß Verlegungen für irgend welche Bahnen $P' \ldots P''$ und $Q' \ldots Q''$, sondern die Bahnen für P und Q selbst, so stellen

$$\left[\frac{P'P''}{\tau}\right], \left[\frac{Q'Q''}{\tau}\right] \text{ und } \left[\frac{\overline{Q}\,Q''}{\tau}\right] \text{ oder } \left[\frac{Q'\overline{\overline{Q}}}{\tau}\right]$$

bezw. die Durchschnittsgeschwindigkeiten der drei betrachteten Bewegungen dar. Durch den Grenzübergang für $lim\,\tau = 0$ gelangt man also zu dem Satze:

Die relative Geschwindigkeit von Q gegen P ist die Resultante aus der (absoluten) Geschwindigkeit von Q und der umgekehrten (absoluten) Geschwindigkeit von P. 42)

Die Betrachtung läßt sich auch ohne weiteres auf die relative Beschleunigung ausdehnen, für welche der entsprechende Satz gilt. 43)

Ein besonders einfacher Fall von Relativbewegungen für Q gegen P tritt ein, wenn der Punkt Q in Ruhe ist.

Die bekanntesten Beispiele für Relativbewegungen von Punkten liegen wohl in den Beobachtungen vor, die fast jeder als Reisender in Eisenbahnzügen macht. Beim Durchfahren einer Landschaft erwächst oft der Schein, als wenn man selbst sich in Ruhe befände, während die ruhenden Gegenstände sich zu bewegen scheinen. Eine genaue Darstellung dieser Verhältnisse wird dadurch schwierig, daß die Relativbewegung der Gegenstände gegen den als ruhend erscheinenden Zug von dem Auge nicht ungestört aufgenommen wird, sondern beeinflußt durch die Beziehungen zwischen dem Gesichtswinkel und der scheinbaren Größe der Gegenstände (Krümmung paralleler Ackerfurchen u. s. w.). Sieht man von dieser Beziehung ab, so ist es leicht, nach Fig. 89 die relative Bahn für einen ruhenden Punkt Q, der z. B. auf einem bestimmten Kreise oder auf einer bestimmten anderen Kurve umfahren wird, gegen einen beweglichen Punkt P diese Linie darzustellen.

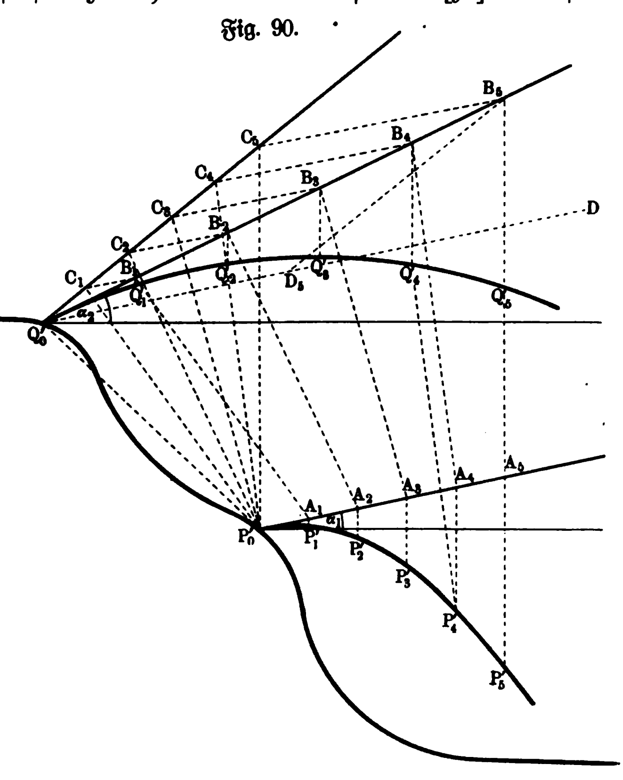
Beobachtungen aus einem in Bewegung befindlichen Eisenbahnzuge an einem gleichfalls sich bewegenden zweiten solchen Zuge vervollständigen obige Betrachtung. Für Parallelgeleise beider Züge findet bei gleicher Fahrrichtung und gleicher Fahrgeschwindigkeit überhaupt keine relative Bewegung beider Züge statt. Eilt der eine Zug dem anderen voraus, so werden sofort relative Lagenänderungen beobachtet. Bei beliebiger Lage der beiden Geleise treten für den Beobachter alle Erscheinungen der Relativbewegung auf, wie sie oben betrachtet wurden.

Als erstes ausführliches Beispiel für die weitere Veranschaulichung dieser Verhältnisse mag die Bestimmung der relativen Beziehungen zweier Punkte P und Q dienen, welche die Mittelpunkte zweier bezw. mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 unter den Winkeln α_1 und α_2 zu gleicher Zeit in derselben Vertikalebene geworfenen oder abgeschossenen Kugeln sind, wobei aber wieder der Einfluß der Luft unberücksichtigt bleiben soll. Da die Senkung, wie Fig. 90 veranschaulicht, für die Punkte P und Q zu derselben Zeit stets dieselbe ist, so stellt z. B. $[A_4 B_4]$ ebensowohl die relative Lage von Q zu P zur Zeit $4\,\tau$ dar, wie $[P'_4\, Q'_4]$. Überträgt man die Vektoren $[P'_1\, Q'_1] = [A_1 B_1]$, $[P'_2\, Q'_2] = [A_2 B_2]$, ... auf Punkt P, wenn sich dieser in der Lage P'_0 befindet, so sind deren Endpunkte $C_1, C_2, \ldots$ Punkte der relativen Bahn von Q gegen P. Da z. B. $[P'_0\, C_4]$ der übertragene Vektor $[A_4 B_4]$ ist, so ist $C_4 B_4 \# P'_0 A_4$ und demgemäß stehen die Parallelstrecken $C_1 B_1$, $C_2 B_2$, $C_3 B_3$, ... im Verhältnis $1 : 2 : 3 \ldots$, d. h. die Punkte $Q'_0, C_1, C_2, C_3, \ldots$ liegen auf einer Geraden und zwar gleichmäßig verteilt.

Demgemäß ist die Gerade $Q_0' C_5$ die relative Bahn von Q gegen P und zwar wird sie gleichförmig durchlaufen. Dasselbe zeigt die Bildung des Geschwindigkeitsdreiecks aus $[c_2]$ für Q und $-[c_1]$ für P, welches z. B. ähnlich ist zu $\triangle\, Q_0' B_1 C_1$, wobei $[Q_0' C_1] \stackrel{\times}{=} [Q_0' B_1] \stackrel{\times}{+} [B_1 C_1]$ ist, so daß $[Q_0' C_1]$ die Geschwindigkeit der relativen Bewegung von Q gegen P nach demselben Modul abbildet, nach dem die Geschwindigkeiten von P und Q bezw. durch $[P_0' A_1] \stackrel{\times}{=} [C_1 B_1]$ und $[Q_0' B_1]$ abgebildet sind.

Bei der Bildung des Geschwindigkeitsdreiecks müßten, den Senkungen entsprechend, zunächst für Q noch eine Vertikalkomponente $[g t]$ und für P eine Vertikalkomponente $-[g t]$ berücksichtigt werden, doch heben sich diese Komponenten zu jeder Zeit auf.

Fig. 90.



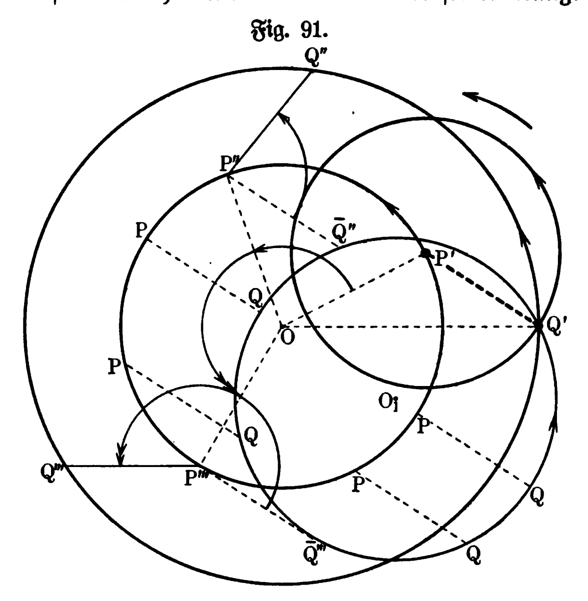
Das Beschleunigungsdreieck ist aus $[g]$ und $[-g]$ zu bilden, so daß es als Doppelstrecke erscheint und für die relative Bahn von Q gegen P wiederum eine konstante Geschwindigkeit anzeigt.

Zu bemerken ist noch, daß sich die (absolute) Bewegung von Q aus der Relativbewegung von Q gegen P und aus der (absoluten) Bewegung von P wieder herstellen läßt, nachdem letztere Bewegung auf Q übertragen worden ist. Diese Übertragung besteht darin, daß man sich P und Q in den Anfangslagen P_0' und Q_0' durch einen Vektor $[P_0' Q_0']$ fest verbunden denkt, welcher durch die Bewegung von P translatorisch bewegt wird, so daß sein Endpunkt eine von Q_0' ausgehende Linie beschreibt. Sieht man zunächst von den Senkungen des Punktes P ab, so kann man $[P_0' Q_0']$ auf der Geraden $P_0' A_1 A_2 \ldots$ gleiten lassen; dabei beschreibt Q die Gerade $Q_0' D$, auf welcher z. B. der Lage A_5 die Lage D_5 entspricht, so daß B_5 als vierter Eckpunkt des Parallelogramms aus $[Q_0' C_5]$ und $[Q_0' D_5]$ erwächst, wobei man unter nachträglicher Berücksichtigung der Senkung $[A_5 P_5'] = [B_5 Q_5']$ zu Q_5' gelangt.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Relativbewegung zweier Punkte

P und Q, die mit gleicher konstanter Winkelgeschwindigkeit γ denselben Mittelpunkt O in gleichem Sinne umkreisen, wie es Fig. 91 zeigt. Liegen P und Q zunächst in P' und Q', so stellt $[P'Q']$ die relative Lage von Q gegen P dar. Würden P und Q mit O fest verbunden und würde dann das Dreieck POQ mit der Winkelgeschwindigkeit γ um O im Sinne der gegebenen Bewegungen gedreht, so erhielten P und Q stets dieselben Lagen, die sie thatsächlich einnehmen. Demgemäß wird die relative Lage von Q gegen P stets durch einen Vektor von derselben Länge wie $[P'Q']$ dargestellt, während die Lagenänderung von $[PQ]$ bei einem vollen Umgange von P und Q gleichfalls einem vollen Umgange entspricht. Die relative Bahn von Q gegen P ist also ein Kreis mit dem Radius $P'Q'$, dessen Mittelpunkt P ist; er wird im Sinne der gegebenen Bewegungen mit der Winkelgeschwindigkeit γ durchlaufen. Zu demselben Ergebnisse führt auch die Betrachtung der Dreiecke der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen $\left(\frac{c^2}{r}\right)$.

Fig. 91.



Um die (absolute) Bewegung von Q herzustellen, hat man die relative Bewegung von Q gegen P mit der (absoluten) Bewegung von P zu verbinden, nachdem letztere durch eine feste Verbindung auf Q übertragen worden ist. Denkt man sich P und Q durch einen Vektor $[PQ]$ fest verbunden, so wird dieser durch die Bewegung von P translatorisch bewegt, und zwar so, daß Q auf einem Kreise vom Mittelpunkt O_1 läuft. Verbindet man diese Bewegung von Q mit der Relativbewegung von Q gegen P, so gelangt man wieder, wie es die Konstruktion in Fig. 89 für die Punkte Q'' und Q''' zeigt, zur (absoluten) Bewegung von Q zurück ($\measuredangle\ P'OP'' = \measuredangle\ \bar{Q}''P''Q''$, $\measuredangle\ P'OP''' = \measuredangle\ \bar{Q}'''P'''Q'''$).

Endlich mag noch eine Aufgabe aus dem Gebiete der Relativbewegungen zweier Punkte behandelt werden, die in sehr verschiedenen Einkleidungen wiederkehrt. Ein Punkt P, der sich mit der Geschwindigkeit c_1 in Urbewegung befindet, soll mit dem Punkte Q zusammentreffen, der sich an einer bestimmten Stelle Q_1' des Raumes befindet und mit einer bestimmten Geschwindigkeit c_2 in eine Urbewegung von beliebiger Richtung versetzt werden kann. Unter Q kann man sich z. B. einen bestimmten Punkt eines Geschosses denken, das ein beliebig zu richtendes Geschütz gegen einen Gegenstand treibt, auf dem

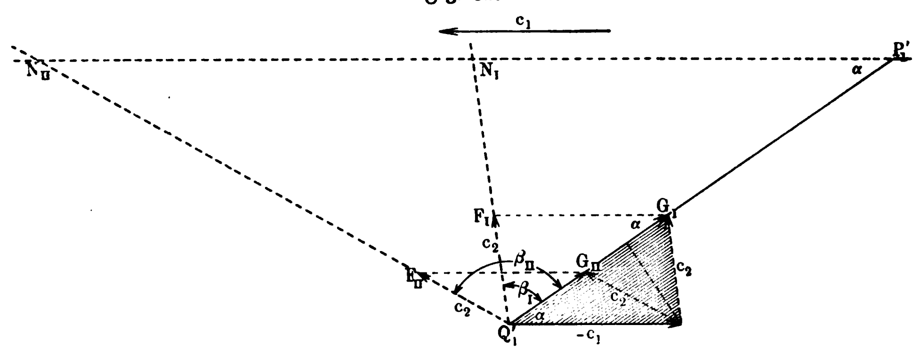
sich P befindet, falls man dabei wieder von dem Einflusse der Luft absieht und falls man lediglich die Horizontalprojektion des ganzen Vorganges betrachtet. Befindet sich P augenblicklich in der Lage P'_1, während Q in Q'_1 ruht, wie es Fig. 92 zeigt, so muß die relative Bahn von Q eine nach P gerichtete Gerade sein, welche demnach durch $Q'_1 P'_1$ dargestellt wird. Die Geschwindigkeit $[c]$ für diese relative Bahn ist aus $[c_2]$ und $-[c_1]$ zu bestimmen, so daß von dem schraffierten Dreiecke neben α gegeben ist c_1 und c_2.

Mit der Bestimmung dieses Dreiecks ist die Richtung $Q'_1 N$ gegeben, in welcher Q sich bewegen muß, um in N mit P zusammenzutreffen ($\triangle Q'_1 N P'_1 \sim \triangle Q'_1 F G$).

Für die rechnerische Bestimmung dieser Richtung hat man $\sin\beta = \frac{c_1}{c_2} \cdot \sin\alpha$. Die Lösung ist **eindeutig** für $\alpha > \beta$, d. h. für $c_2 > c_1$; sie ist **doppeldeutig** für $c_1 > c_2 > c_1 \sin\alpha$. In Fig. 92 ist eine doppeldeutige Lösung dargestellt, und zwar sind die beiden Ergebnisse durch die Zeiger I und II unterschieden.

Auch für dieses Beispiel zeigt eine weitere Durchführung, daß die (absolute) Bewegung von Q aus der relativen Bewegung von Q gegen P und

Fig. 92.



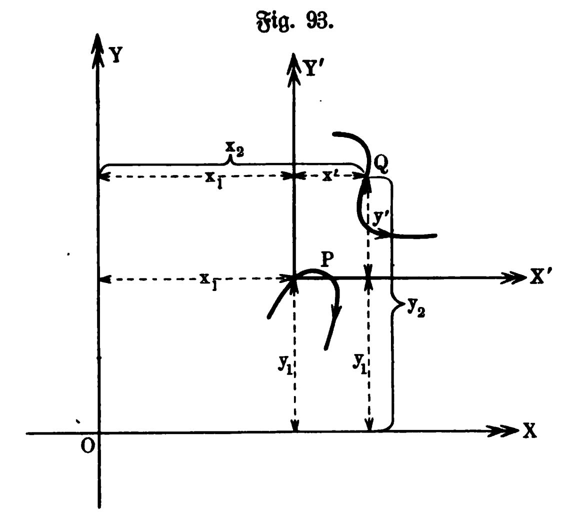
der (absoluten) Bewegung von P zusammengesetzt werden kann, nachdem letztere durch eine feste Verbindung auf Q übertragen worden ist.

Daß diese Beziehung allgemein gültig ist, lehrt schon die Betrachtung von $\triangle Q' Q'' \overline{Q}$ in Fig. 87a, da ja $[Q' Q''] \stackrel{\times}{=} [Q' \overline{Q}] \stackrel{\times}{+} [\overline{Q} Q'']$ ist. Infolgedessen kann man überhaupt von zwei Bewegungen **eines** Punktes W, welche eine dritte zusammensetzen, die **eine** als **absolute** Bewegung und die **andere** als **relative** Bewegung gegen diese auffassen. Dies zeigt z. B. deutlich das Beispiel der Fig. 32 auf Seite 79, bei der die Bewegung auf BC aus den Bewegungen auf BC' und BB' erwächst, von denen die Bewegung des Schiffes (BC') als absolut, die andere (BB') als relative Bewegung gegen die Bewegung des Schiffes betrachtet werden kann. Würde man das Schiff gemäß BB' gleichförmig verschieben, während auf dem Schiffe eine entsprechende Bewegung gemäß BC' vor sich ginge, so würde dieselbe Bewegung (BC) erwachsen, aber man hätte jetzt die Bewegung auf BB' als absolute und die Bewegung auf BC' als relative Bewegung aufzufassen.

Ebenso läßt sich z. B. in § 38 die Bewegung auf der Linie $P'_1 P''_1$ als Relativbewegung auffassen.

Oft ist es zweckmäßig, die Relativbewegung eines Punktes Q gegen einen Punkt P auf Koordinaten zu beziehen. Dazu denkt man sich (Fig. 93) durch Punkt P zu einem gegebenen festen Achsensystem OXY ein zweites bewegliches System $PX'Y'$ gelegt, gegen welches Q seine Relativbewegung ausführt, während dieses System selbst durch die Bewegung von P gegen das erste feste System OXY verschoben wird. Man kann sich OXY als Blatt des Zeichenbrettes und $PX'Y'$ als ein Blatt Pauspapier denken, welches darüber liegt. Die Bewegung von Q auf dem Pauspapier ist die Relativbewegung von Q gegen P, die Bewegung von P auf dem Blatte des Zeichenbrettes ist die (absolute) Bewegung von P; überträgt man die Bewegung von Q von dem Pauspapier auf das Blatt des Zeichenbrettes, so erhält man die (absolute) Bewegung von Q.

Fig. 93.



Bestimmen die Stellungsgleichungen $x_1 = f_1(t)$ und $y_1 = F_1(t)$ die (absolute) Bewegung von P, während für die (absolute) Bewegung von Q bezw. $x_2 = f_2(t)$ und $y_2 = F_2(t)$ gelten, so sind die Stellungsgleichungen für die Relativbewegung von Q gegen P gegeben als:

$$x' = x_2 - x_1 = f_2(t) - f_1(t)$$
$$y' = y_2 - y_1 = F_2(t) - F_1(t).$$

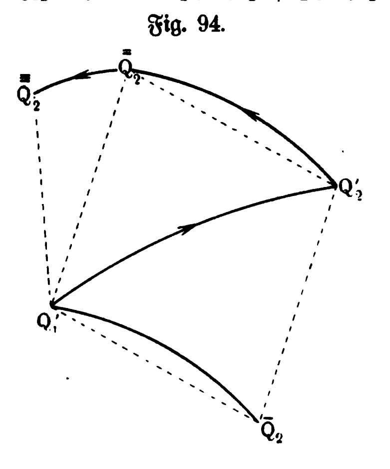
Die Ableitung dieser Gleichungen führt sofort zu den entsprechenden Beziehungen der Geschwindigkeiten, eine weitere Ableitung zu den entsprechenden Beziehungen der Beschleunigungen.

Diese Betrachtung läßt sich ohne weiteres auf den Raum (x, y, z) ausdehnen.

Um alle diese Betrachtungen von Punkten auf Körper zu übertragen, untersuchen wir zunächst die Relativbewegung eines Punktes Q gegen einen Körper P. Wenn Q in der Zeit τ von Q'_1 nach Q'_2 geht (vergl. Fig. 94), während sein zum Körper P gehöriger Weg (bei fester Verbindung mit P) für diese Zeit $Q'_1 \bar{Q}_2$ ist, so ist die relative Lagenänderung des frei beweglichen Punktes Q gegen den mit dem Körper fest verbundenen Punkt Q natürlich wiederum $\bar{Q}_2 Q'_2$. Diese Lagenänderung ist aber im allgemeinen nur eine Komponente der relativen Lagenänderung gegen den Körper,

da dieser in der Zeit τ im allgemeinen eine Verschiebung und eine Drehung vollführt hat. Zeichnet man für die Darstellung der Bewegungen des Körpers P den Punkt Q aus (§ 32), so stellt $Q'_1 \overline{Q}_2$ lediglich die Verschiebung des Körpers dar, während die Drehung um Q noch berücksichtigt werden muß. Man sieht das am besten ein, wenn man jetzt Q'_2 mit dem Körper P fest verbunden denkt und diesen den Weg $\overline{Q}_2 Q'_1$ translatorisch zurückmachen läßt, wobei Q'_2 nach $\overline{\overline{Q}}_2$ gelangt, während Q wiederum die Lage Q'_1 einnimmt. Um den Körper in seine erste Lage zu bringen, ist noch erforderlich, die in der Zeit τ erfolgte Drehung um Q wieder rückgängig zu machen, wobei $\overline{\overline{Q}}_2$ etwa in die Lage $\overline{\overline{\overline{Q}}}_2$ kommen mag. Würde man also die relative Lagenänderung des Punktes Q gegen den Körper P als $[\overline{Q}_2 Q'_2]$ oder als $[Q'_1 \overline{\overline{Q}}_2]$ berechnen, wie bisher, so würde man Q eine falsche Stellung zu P geben, deren Korrektur durch die Berücksichtigung der Drehung um Q geschieht. Man hat also die relative Lagenänderung als $[Q'_1 \overline{\overline{\overline{Q}}}_2] \overset{\times}{=} [Q'_1 \overline{\overline{Q}}_2] \overset{\times}{+} [\overline{\overline{Q}}_2 \overline{\overline{\overline{Q}}}_2]$ gegeben, wobei $[Q'_1 \overline{\overline{Q}}_2]$ wie früher als $[Q'_1 Q'_2] \overset{\times}{+} [Q'_2 \overline{\overline{Q}}_2]$ bezw. als $[\overline{Q}_2 Q'_1] \overset{\times}{+} [Q'_1 Q'_2]$ erscheint. Demnach setzt sich die relative Lagenänderung des Punktes Q gegen den Körper P während der Zeit τ aus drei Komponenten zusammen, aus der (absoluten) Lagenänderung $[Q'_1 Q'_2]$ von Q während der Zeit τ, aus der umgekehrten Verschiebung $[\overline{Q}_2 Q'_1]$ oder $[Q'_2 \overline{\overline{Q}}_2]$ von Q, welche erfolgen würde, wenn Q mit dem Körper P während der Zeit τ fest verbunden wäre, und einer Komponente $[\overline{\overline{Q}}_2 \overline{\overline{\overline{Q}}}_2]$, welche der umgekehrten, in der Zeit τ erfolgenden Drehung des mit Q bei Beginn der Zeit τ fest verbunden gedachten Körpers um die Achse durch Q entsprechen würde.

Fig. 94.



Für $lim\ \tau = 0$ ist die dritte Komponente $[\overline{\overline{Q}}_2 \overline{\overline{\overline{Q}}}_2]$ genau so zu berechnen, wie $[\overline{P}'' P''_2]$ in § 38, so daß sie in erster Annäherung verschwindet und demgemäß auch keinen Einfluß auf die Geschwindigkeit der Relativbewegung hat. Dagegen bestimmt sie deren Beschleunigung mit, indem sie deren beiden $[Q'_1 Q'_2]$ und $[\overline{Q}_2 Q'_1]$ oder $[Q'_2 \overline{\overline{Q}}_2]$ entsprechenden Komponenten eine dritte Komponente $[2\, v\, \varphi\, sin\, \vartheta]$ hinzufügt. Hierbei ist v der augenblickliche Wert der Geschwindigkeit der Relativbewegung, φ die Winkelgeschwindigkeit der augenblicklichen Drehung des Körpers um die Achse durch Q und ϑ der Winkel zwischen dieser Achse und $[v]$, während die Richtung dieser Komponente der umgekehrten Drehung entspricht (vergl. den Schluß von § 38).

Wenn der Körper P sich lediglich verschiebt, so kommt die dritte Komponente überhaupt nicht in Frage, so daß die Relativbewegung von Q gegen P in diesem Falle genau so zu bestimmen ist, als wenn P ein Punkt wäre,

d. h. man kann einen beliebigen Punkt des Körpers auswählen (alle Punkte haben ja dieselbe Verschiebung!) und auf ihn die Relativbewegung von Q beziehen.

Beispiel: Stellt P in Fig. 92 einen bestimmten Punkt eines Eisenbahnzuges dar, der in N von dem Geschosse aus Q_1' getroffen wird, so ist die Horizontalprojektion der relativen Bahn der Kugel Q in Bezug auf den Zug durch die Richtung $Q_1' P_1'$ bestimmt; in einer Vertikalebene durch diese Richtung würden z. B. Fahrgäste die Kugel durch das Abteil fliegen sehen. Durch Hinzufügung der entsprechenden Senkungen $\left(s = \frac{g}{2} t^2\right)$ erhält man leicht die relative Bahn selbst.

Bedeutet in dieser Figur c_1 die Geschwindigkeit eines Flusses und soll auf diesem ein Kahn in der Richtung $Q_1' N$ mit der Geschwindigkeit c_2 überfahren, so muß er relativ zur Strömung in der Richtung $Q_1' P_1'$ mit der Geschwindigkeit $Q_1' G$ bewegt werden.

Senkrecht fallende Regentropfen beschreiben für einen Beobachter in einem in Urbewegung befindlichen Eisenbahnzuge scheinbar parabolische Bahnen, bei welchen die Tropfen der Fahrrichtung entgegengetrieben zu sein scheinen. Ein Gegenstand, der aus einem in Urbewegung befindlichen Eisenbahnzuge senkrecht herabfällt, beschreibt relativ zum Zuge eine Gerade, während seine Bewegung gegen die Erde eine Parabel ist, welche sich in der Zugrichtung entwickelt.

Steht man auf einer Brücke, so hat man gelegentlich die Empfindung, als wenn das Wasser still stände und sich die Brücke bewegte; man bemerkt dann die Relativbewegung gegen das Wasser.

In einem beschleunigt (j) fahrenden Zuge hängt ein ruhendes Pendel schief und zwar der Fahrrichtung entgegen (Resultante aus g und $-j$); um diese Lage als Ruhelage erfolgen Pendelschwingungen, falls deren Ebene eine Vertikalebene der Fahrrichtung ist.

Ist die Bewegung des Körpers P keine Verschiebung, so hängt die relative Lagenänderung von Q gegen P stets auch von der dritten Komponente ab, falls diese nicht unter besonderen Umständen verschwindet. 44)

Solche besondere Umstände sind, da diese Komponente bei elementarer Einteilung der Zeit den Wert $\frac{1}{2}\tau^2 [2 v \varphi \sin \vartheta]$ hat, gegeben, wenn $v = 0$ oder $\varphi = 0$ oder $\vartheta = 0$ ist.

Der Fall $\varphi = 0$, welcher der bereits betrachteten Verschiebung entspricht, ist hier ausgeschlossen.

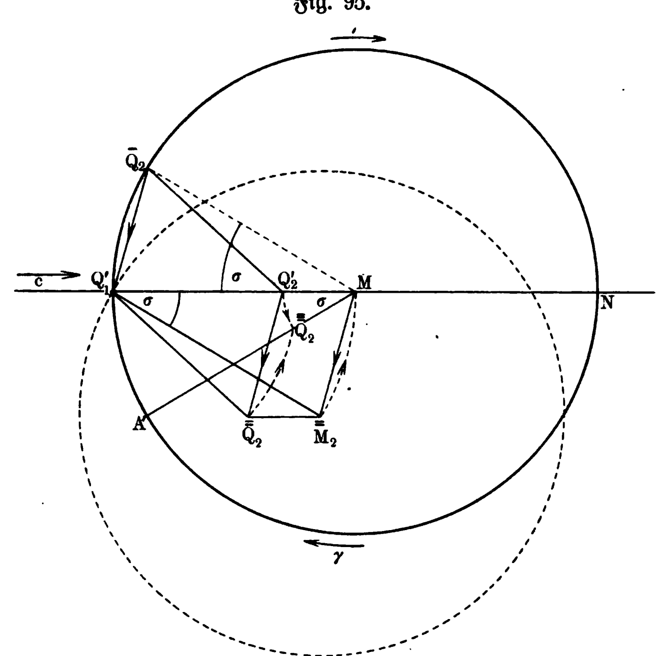
Der Fall $\vartheta = 0$ bedeutet, daß die augenblickliche Drehung um das τ entsprechende Element der relativen Bahn erfolgt.

Der Fall $v = 0$ zeigt an, daß die Relativbewegung keine Geschwindigkeit besitzt, daß sich also Q in relativer Ruhe zum Körper P befindet. In diesem Falle, welcher bei gleichförmig sich drehenden Körpern P von Wichtigkeit wird, kann die (absolute) Bewegung von Q natürlich gerade so behandelt werden, als wenn Q ein Punkt des Körpers P wäre.

Soll z. B. ein Steinblock am Äquator der Erde relativ in Ruhe bleiben, so muß er sich mit der Äquatorialgeschwindigkeit c der Erde auf einem Kreise (R) bewegen und infolgedessen die Normalbeschleunigung $\frac{c^2}{R}$ erhalten. Diese wird durch seine Fallbeschleunigung g geliefert, so daß die experimentelle Messung dieser Fallbeschleunigung nur den Wert $g - \frac{c^2}{R}$ zeigt. Für $c = \sqrt{R\,g}$ würde der Steinblock schweben, für $c > \sqrt{R\,g}$ würde er abgeschleudert werden. Thatsächlich hat $\frac{c^2}{R}$ für $R = 6\,370\,000$ m und eine Umlaufszeit $T = 86\,164''$ den Wert $0{,}034\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$, so daß $g = 9{,}815\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$ nur wenig verringert wird. Würde sich die Erde etwa 17 mal rascher drehen, als sie es thut, so würde ein Schweben des Blockes eintreten, bei weiterer Steigerung der Geschwindigkeit würde ein Abschleudern erfolgen (vergl. S. 152 u. f.).

Als allgemeines Beispiel für die Relativbewegung eines Punktes Q gegen einen Körper P mag folgendes dienen: P dreht sich gleichförmig (γ) um

Fig. 95.



eine Achse, während sich Q gleichförmig (c) auf einer Geraden bewegt, welche die Achse senkrecht schneidet.

Spannt man dicht über einer rotierenden Scheibe (P) in diametraler Richtung einen Draht aus, so zeichnet eine an dem Drahte gleichförmig gleitende Bleistiftspitze (Q) auf der Scheibe die gesuchte relative Bahn auf.

Wir behandeln dieses Beispiel zunächst genau nach dem allgemeinen Verfahren, welches Fig. 94 entspricht, um dieses dabei zu veranschaulichen. Ist Q zunächst (vergl. Fig. 95 a. v. S.) in der Lage Q_1' und nach Ablauf der Zeit τ in der Lage Q_2', so würde Q in fester Verbindung mit der Scheibe während der Zeit τ nach $\overline{Q}_2$ gelangt sein. Wir machen jetzt die (absolute) Bewegung des Körpers P dadurch rückläufig, daß wir zuerst $\overline{Q}_2$ durch eine Verschiebung wieder in die Lage Q_1' bringen, wobei Q_2', in fester Verbindung mit dem Körper gedacht, nach $\overline{\overline{Q}}_2$ gelangt, während der Mittelpunkt M der Scheibe nach $\overline{\overline{M}}_2$ rückt. Um die Scheibe nun noch aus der neuen, dem Mittelpunkte $\overline{\overline{M}}_2$ entsprechenden (punktierten) Lage in die alte, dem Mittelpunkte M entsprechende Lage zu bringen, drehen wir sie um Q_1' so, daß $\overline{\overline{M}}_2$ nach M rückt, wobei $\overline{\overline{Q}}_2$ in die Lage $\overline{\overline{\overline{Q}}}_2$ gelangt. Damit ist die relative Lage $\overline{\overline{\overline{Q}}}_2$ von Q zur Scheibe (P) bestimmt.

Nun läßt sich diese Bestimmung in unserem Falle wesentlich abkürzen, da die Scheibe durch eine Drehung um M, bei der $\overline{Q}_2$ in die Lage Q_1' zurückkehrt, ihre alte Lage erhält. Hierbei gelangt Q_2' unmittelbar in die Lage $\overline{\overline{\overline{Q}}}_2$, welche sich als Schnittpunkt des Kreises vom Radius MQ_2' um M und des Strahles MA' ergiebt, falls $\overset{\frown}{Q_1'A'} = \overset{\frown}{Q_1'\overline{Q}_2}$ ist. Demnach entspricht die relative Bahn für die Strecke $Q_1'M$ der Bahn eines Punktes Q, der sich auf dem Radius einer sich umgekehrt wie die gegebene Scheibe gleichförmig ($-\gamma$) drehenden Scheibe gleichförmig (c) nach dem Mittelpunkte zu bewegt. Für die Strecke MN gilt ähnliches, nur ist die Bewegung des Punktes Q vom Mittelpunkte fort gerichtet. In beiden Fällen entstehen (vergl. S. 109) Archimedische Spiralen, so daß die relative Bahn aus zwei, in M vereinigten, solchen Spiralen besteht. Für die Bestimmung von Geschwindigkeit und Beschleunigung gelten ohne weiteres die Betrachtungen, welche Fig. 61 entsprechen.

Daß die ursprüngliche und die abgekürzte Konstruktion von $\overline{\overline{\overline{Q}}}_2$ miteinander übereinstimmen, ist sofort ersichtlich, da die Verschiebung $[\overline{Q}_2\, Q_1']$ in Verein mit der Drehung $[\sigma]$ um Q_1' einer Drehung $[\sigma]$ um M entspricht.

Es hat keine Schwierigkeit, die Betrachtungen auf den Fall auszudehnen, in welchem veränderliche Geschwindigkeiten an die Stelle der konstanten Geschwindigkeiten γ und c treten.

Schneidet die Bahn von Q die Achse unter schiefem Winkel, so veranschaulicht man sich die Beziehungen am besten an einem rotierenden Kegel, längs dessen einer Seite ein Draht für die Führung eines Bleistiftes gespannt ist.

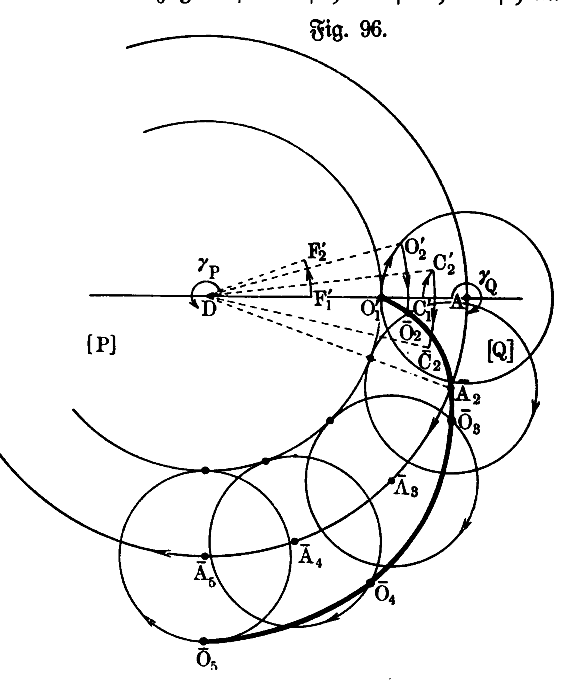
Führt man zwei Koordinatensysteme ein, deren eines beweglich und mit dem Körper P fest verbunden ist, so ist die Bewegung von Q gegen dieses die Relativbewegung von Q gegen P, welche im Verein mit der auf das feste System bezogenen (absoluten) Bewegung von P (Verschiebung und Drehung) die auf das feste System bezogene (absolute) Bewegung von Q giebt.

Es bleibt noch übrig, alle diese Beziehungen auf die Relativbewegung eines Körpers Q gegen einen Körper P zu übertragen.

Gelangt ein Bewegungsdreieck ABC des Körpers Q während der Zeit τ aus der Lage $A'_1 B'_1 C'_1$ in die Lage $A'_2 B'_2 C'_2$, während zugleich ein Bewegungsdreieck DEF des Körpers P aus der Lage $D'_1 E'_1 F'_1$ in die Lage $D'_2 E'_2 F'_2$ übergeht, so erhält man die relative Lagenänderung von Q gegen P, indem man sich $\triangle DEF$ in der Lage $D'_2 E'_2 F'_2$ mit $\triangle ABC$ in der Lage $A'_2 B'_2 C'_2$ fest verbunden denkt und nun $\triangle DEF$, unter Umkehr der Bewegung des Körpers P, aus der Lage $D'_2 E'_2 F'_2$ in die Lage $D'_1 E'_1 F'_1$ zurückführt. Die relative Lagenänderung erwächst also auch hier aus der (absoluten) Bewegung von Q, welche durch eine Schraubung (Verschiebung und Drehung) dargestellt werden kann, und der umgekehrten (absoluten), auf Q übertragenen Bewegung von P, welche gleichfalls als eine Schraubung (Verschiebung und Drehung) dargestellt werden kann. Da hier im allgemeinen *zwei* Drehungen vereinigt werden müssen und da ferner das Ergebnis dieser Vereinigung von der Folge der Drehungen abhängt, so ist es im allgemeinen nicht erlaubt, für jene Vereinigung die Folge der Drehungen zu vertauschen. *Beschränkt man die Betrachtung auf elementare Bewegungen, so ist die gegebene Bestimmung eindeutig, unabhängig von der Folge der Drehungen.*

Als Beispiel mag zunächst angeführt werden, daß die Relativbewegung einer ruhenden Schraubenmutter in Bezug auf die sich in sie hineinschraubende Spindel die umgekehrte Bewegung der Spindel ist, welche also einem Hinaufschrauben der Mutter auf die ruhende Spindel entsprechen würde.

Fig. 96.



Ausführlicher mag die Relativbewegung von Q gegen P betrachtet werden für den Fall, daß beide Körper sich gleichförmig um Parallelachsen drehen und zwar gegensinnig.

Fig. 96 stelle einen Durchschnitt der Körper dar, senkrecht zu den Parallelachsen, welche bezw. für P und Q in D und A durchtreten. Von dem Bewegungsdreieck DEF von P liege E gleichfalls in der Achse und F in der Ebene der Zeichnung auf DA, von dem Bewegungsdreieck ABC von Q liege B gleichfalls in der Achse und C in der Ebene der Zeichnung auf DA.

Da A in Ruhe bleibt, so ist die relative Bahn von A gegen den Körper P ein Kreis $A \overline{A}_2 \overline{A}_3 \ldots$ um D, der im umgekehrten Sinne zu dem Pfeile von D durchlaufen wird. Wenn C in der Zeit τ aus der Lage C_1' in die Lage C_2' rückt, während F zugleich aus der Lage F_1' in die Lage F_2' übergeht, so würde nun die rückläufige Bewegung von F aus der Lage F_2' in die Lage F_1' den Punkt C bei fester Verbindung von P und Q nach $\overline{C}_2$ führen und zugleich A nach $\overline{A}_2$. Die Relativbewegung von C wird also durch eine Drehung um A im Sinne des dort gezeichneten Pfeiles und durch eine Drehung um D im Gegensinne des dort gezeichneten Pfeiles bestimmt. Werden die Werte der entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten bezw. durch γ_Q und γ_P bezeichnet (in Fig. 96 ist $\gamma_Q : \gamma_P = 2 : 1$, so daß $\measuredangle\, C_2' A C_1' : \measuredangle\, D C_2' \overline{C}_2 = 2 : 1$ ist), so ist $\widehat{C_1' C_2'} = A C_1' \,.\, \gamma_Q \,.\, \tau$ und $\widehat{C_2' \overline{C}_2} = D C_2' \,.\, \gamma_P \,.\, \tau$. Unter den auf AD gelegenen Punkten des Körpers Q giebt es einen O, der durch die beiden gleichsinnigen Drehungen um A und D zusammen für ein Zeitelement in relativer Ruhe bleibt (Fig. 79), so daß die relative Bewegung von Q gegen P während dieses Zeitelementes als eine Drehung um ihn (O) erscheint. Seine Lage (O_1' in Fig. 96) wird durch $OD \,.\, \gamma_P = OA \,.\, \gamma_Q$ bestimmt, die Winkelgeschwindigkeit für ihn als Drehpunkt beträgt $\gamma_P + \gamma_Q$. Schlägt man um A mit AO in der Ebene der Zeichnung einen Kreis, so rückt bei der Relativbewegung von Q gegen P der Mittelpunkt dieses Kreises auf $A \overline{A}_2$ fort, während für dieses Fortrücken stets der Punkt des Körpers Q, welcher mit der ursprünglichen Lage O' von O im Raume zusammenfällt, als augenblicklicher Drehpunkt angesehen werden kann. Schlägt man auch noch um D mit DO in der Ebene der Zeichnung einen Kreis, so rollt also auf diesem festen Kreise vom Mittelpunkt D der bewegliche Kreis vom Mittelpunkte A ab und zwar so, daß sein Mittelpunkt A die Bahn $A \overline{A}_2$ beschreibt. Konstruiert man zu diesen Kreisen, den Achsen parallel, die entsprechenden Cylinder, so stellt sich also die Relativbewegung von Q gegen P, welche eine **ebene** Bewegung (vergl. § 36) ist, dar als Abrollen eines beweglichen Cylinders von Q auf einen festen Cylinder von P; dabei beschreibt jeder Punkt von Q, wie z. B. C, eine Epicykloide und im besonderen der O entsprechende Punkt eine gemeine Epicykloide $O_1' \overline{O}_2 \overline{O}_3, \ldots$, von der in Fig. 96 die Hälfte eines vollen Bogens gezeichnet ist.

Giebt man den Körpern selbst die cylindrischen Formen, welche den Kreisen um D und A entsprechen, so gelangt man zu Beziehungen, wie sie z. B. bei Friktionsrollen auftreten. Denkt man diese Cylinder mit Zähnen besetzt, so stellen jene Kreise für Zahnräder die sogenannten Primitivumfänge für **cylindrische Verzahnung** dar.

Wenn sich die Achsen von P und Q schneiden, so führt eine entsprechende Betrachtung zu dem relativen Abrollen eines Kegels Q auf einem anderen P, was einer **sphärischen** Bewegung (vergl. § 36) entspricht. Giebt man den Körpern selbst die Formen entsprechender Kegel, so gelangt man zu der grundlegenden Betrachtung für die Herstellung einer **konischen Verzahnung**.

Schließlich mag noch bemerkt werden, daß man sich statt des Körpers P, gegen welchen die Relativbewegung eines Punktes oder eines Körpers betrachtet wird, auch einen zweiten, durch ein bewegliches Koordinatensystem charakterisierten Raum P in unserem Raume bewegt denken kann, so daß sich Q zunächst in jenem Raum P bewegt. Die Übertragung der Bewegung von P auf Q, welche zur relativen Bewegung von Q in diesem Raume P hinzukommt, um die (absolute) Bewegung von Q in unserem Raume zu bestimmen, geschieht dann dadurch, daß die Bewegung desjenigen Punktes des zweiten Raumes, welcher gerade mit dem Punkte Q oder mit einem bestimmten Punkte des Körpers Q zusammenfällt, nun mit dessen Relativbewegung vereinigt wird, um dessen (absolute) Bewegung zu bilden.

Anwendungen der Phoronomie.

1. Die Beschleunigung des freien Falles. Da alle Körper der Außenwelt in der Nähe der Erdoberfläche mit der Beschleunigung g fallen, so ist eine genauere Kenntnis dieser veränderlichen Größe innerhalb der physikalischen bezw. technischen Mechanik äußerst wichtig. Eine angenäherte Bestimmung von g kann schon durch Versuche an der Atwoodschen Fallmaschine, an v. Babos Fallbrett u. s. w. erreicht werden, während bei Anforderungen größerer Genauigkeit am besten Pendelbeobachtungen (vergl. Anwendung Nr. 10) zu ihrer Bestimmung verwendet werden.

Um die Veränderlichkeit der Größe g für technische Verhältnisse darzustellen, reicht es aus, die Erde als Kugel zu betrachten und als deren Oberfläche das mittlere Meeresniveau anzusehen. Innerhalb dieser Genauigkeit darf dann g, den Beobachtungen gemäß, für alle Punkte eines Parallelkreises als Konstante gelten, während es von Parallelkreis zu Parallelkreis, der geographischen Breite β entsprechend, veränderlich ist. Mit dem Mittelwerte $g_{45^0} = 9{,}806 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$ für $\beta = 45^0$ hängt dann auf Grundlage der Beobachtungen der Wert g_β für eine beliebige Breite β zusammen durch die Formel:

$$g_\beta = g_{45^0}(1 - 0{,}00259 \cos 2\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 45)$$

Für den Äquator gilt $g_{0^0} = 9{,}781$, für den Pol $g_{90^0} = 9{,}832$.

Im allgemeinen reicht es aus, mit dem Mittelwerte $g_{45^0} = 9{,}81 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$ zu rechnen.

Die Werte, welche man für g durch Pendelbeobachtungen erhält, sind insofern *scheinbare* Werte, als sie auf der sich gleichförmig um ihre Achse drehenden Erde bestimmt werden. Da, abgesehen von den Polen, jeder Punkt der Erdoberfläche gleichförmig einen Kreis von endlichem Radius beschreibt, so ist für jeden solchen Punkt eine bestimmte Normalbeschleunigung in Rechnung zu stellen, welche von der Fallbeschleunigung geliefert wird. Man hat also die Fallbeschleunigung $\overline{g}$ für die ruhende Erde von der Fallbeschleunigung g für die sich drehende Erde zu unterscheiden.

So beschreibt z. B. der Mittelpunkt einer Kugel, welche am Erdäquator ruht, gleichförmig einen Kreis vom Erdradius $R = 6\,370\,000\,\mathrm{m}$ und zwar

in derselben Zeit $T = 86164^0$ mittlerer Zeit, in welcher die Erde sich einmal um ihre Achse dreht; hierzu ist (vergl. S. 88 u. f.) die Normalbeschleunigung $\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R$ erforderlich, so daß sich $\overline{g}_{0^0}$ in g_{0^0} und $\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R$ spaltet. Da $\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R = 0{,}03391$ ist (vergl. S. 147), so ist $\overline{g}_{0^0} = g_{0^0} + 0{,}034 = 9{,}815$.

Fig. 97.

Für die Breite β hat der entsprechende Kreis den Radius $R\cos\beta$, so daß hier eine Normalbeschleunigung

$$p_\beta = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R\cos\beta = 0{,}03391\cos\beta$$

auftritt, welche innerhalb der Fläche des Parallelkreises von β senkrecht zur Erdachse gerichtet ist, und also, abgesehen von der Breite $\beta = 0$, von der Richtung der Fallbeschleunigung abweicht. Hier gilt also, wie Fig. 97 für den Erdmittelpunkt M und die Erdachse MN zeigt,

$$[\overline{g}_\beta] \overset{\times}{=} [g_\beta] \overset{\times}{+} [p_\beta]$$

und demgemäß weicht $[g_\beta]$ in seiner Richtung von $[\overline{g}_\beta]$ ab. Man hat

$$g_\beta^2 = \overline{g}_\beta^2 + p_\beta^2 - 2\,\overline{g}_\beta\, p_\beta \cos\beta$$

und

$$g_\beta = \overline{g}_\beta \left[1 - 2\frac{p_\beta}{\overline{g}_\beta}\cos\beta + \frac{p_\beta^2}{\overline{g}_\beta^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \overline{g}_\beta \left(1 - \frac{p_\beta \cos\beta}{\overline{g}_\beta} + \cdots\right),$$

d. h. es ist angenähert:

$$g_\beta = \overline{g}_\beta - 0{,}034\cos^2\beta$$

und

$$\overline{g}_\beta = g_\beta + 0{,}034\cos^2\beta.$$

Die Abweichung δ_β von g_β und $\overline{g}_\beta$ bestimmt die Gleichung:

$$\sin\delta_\beta = \frac{p_\beta}{g_\beta} \cdot \sin\beta = \frac{0{,}034\cos\beta\,.\,\sin\beta}{g_\beta} = \frac{0{,}017\sin 2\beta}{g_\beta}.$$

Ungefähr für 45^0 hat δ_β sein Maximum von etwa $6'$, während für $\beta = 0^0$, d. h. am Äquator und für $\beta = 90^0$, d. h. an den Polen Minima vom Werte 0 auftreten.

Da $\cos^2\beta$ für den Bereich $0^0 \ldots 90^0$ von $1 \ldots 0$ abnimmt, so muß g_β beim Übergange vom Äquator zu den Polen um immer kleinere Werte verbessert werden, um $\overline{g}_\beta$ zu liefern; für $\beta = 90^0$ hat man $\overline{g}_{90^0} = g_{90^0}$.

Für eine homogen geschichtete Kugel müßte $\overline{g}_\beta$ eine Konstante sein, so daß $\overline{g}_\beta$ durch den Wert $\overline{g}_{0^0} = 9{,}815$ ersetzt werden könnte und demnach:

$$g_\beta = 9{,}815 - 0{,}034\cos^2\beta$$
$$= 9{,}781 + 0{,}034\sin^2\beta = 9{,}781\,(1 + {}^1/_{289}\sin^2\beta)$$

wäre.

Vergleicht man diese Formel mit den beobachteten Werten von g_β, so ergiebt sich, daß der Ansatz

$$g_\beta = 9{,}781 + 0{,}051 \sin^2\beta \quad \ldots\ldots \quad 46)$$

den thatsächlichen Verhältnissen entspricht. Demgemäß ist $\bar{g}_\beta$ nicht als Konstante zu betrachten, sondern als eine Veränderliche, deren Veränderung durch $(0{,}051 - 0{,}034) \sin^2\beta = 0{,}017 \sin^2\beta$ bestimmt wird. Man hat also:

$$\bar{g}_\beta = \bar{g}_{0^0} + 0{,}017 \sin^2\beta.$$

Diese Verbesserung entspricht der thatsächlich vorhandenen Abplattung der Erde, der zu Folge die Fallbeschleunigung $\bar{g}_\beta$ von dem Äquator nach den Polen hin zunimmt.

Demgemäß bewegt sich $\bar{g}_\beta$ in den Grenzen $\bar{g}_{0^0} = 9{,}815$ und $\bar{g}_{90} = 9{,}832$ und g_β in den Grenzen $g_{0^0} = 9{,}781$ und $g_{90^0} = 9{,}832$.

Für $\sin^2\beta = \frac{1 - \cos 2\beta}{2}$ erhält man noch:

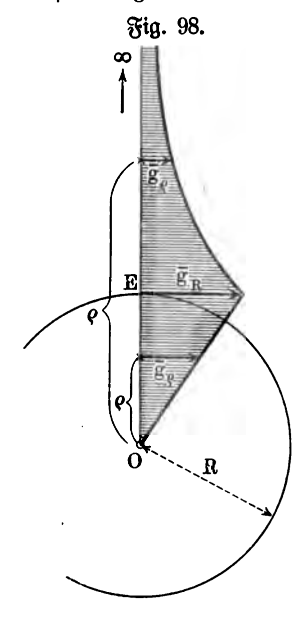
$$g_\beta = 9{,}806 - 0{,}025 \cos 2\beta.$$

Da $\cos 2\beta = 0$ ist für $\beta = 45^0$, so ist $g_{45^0} = 9{,}806$ und man hat auch:

$$g_\beta = g_{45^0} - 0{,}025 \cos 2\beta$$
$$= g_{45^0} (1 - 0{,}00259 \cos 2\beta).$$

Für Punkte außerhalb der Erdoberfläche muß unterschieden werden, ob es sich um das Innere der Erde (Schächte u. s. w.) oder um den sie umgebenden Raum (Bergspitzen, Luftballon u. s. w.) handelt.

Fig. 98.



Bezeichnet man den Radius der Erde wieder mit R und den Abstand eines beliebigen Punktes von dem Mittelpunkte mit ϱ, so ist die Veränderlichkeit von g auf einem Strahle aus dem Mittelpunkte zunächst für $\varrho = 0 \ldots R$ und dann für $\varrho = R \ldots \infty$ festzustellen. Schneidet der Strahl die Oberfläche in einem Punkte von der Breite β, so läßt sich der Wert von $\bar{g}$ im Abstande ϱ für die ruhende Erde durch $\bar{g}_{\varrho,\beta}$ bezeichnen, so daß $\bar{g}_{R,\beta}$ dasselbe bezeichnet wie $\bar{g}_\beta$. Man hat dann für Punkte im Erdinneren (Proportionalität zu ϱ):

$$\bar{g}_{\varrho,\beta} = \frac{\varrho}{R} \cdot \bar{g}_{R,\beta} \quad \ldots \quad 47)$$

und für Punkte im Außenraume $\left(\text{Proportionalität zu } \frac{1}{\varrho^2}\right)$:

$$\bar{g}_{\varrho,\beta} = \frac{R^2}{\varrho^2} \cdot \bar{g}_{R,\beta} \quad \ldots \quad 48)$$

Für Punkte der Erdoberfläche ($\varrho = R$) geben beide Formeln wieder denselben Wert $\bar{g}_{R,\beta}$.

Beide Formeln gelten in aller Strenge nur unter Voraussetzung einer bestimmten Massenverteilung in Bezug auf das Innere der Erde, welche thatsächlich nur angenähert erfüllt ist; infolgedessen liefern auch beide Formeln nur eine angenäherte Darstellung der Verhältnisse, und zwar ist die Abweichung von der Wirklichkeit bei der Formel für Punkte des Erdinneren größer als bei der Formel für Punkte des Außenraumes.

Zur Veranschaulichung der Veränderlichkeit von $\bar{g}$ diene Fig. 98, in welcher die entsprechende Beschleunigung-Weglinie (vergl. S. 71 u. f.) gezeichnet ist.

Für Punkte des Außenraumes, welche eine Erhebung h über der Oberfläche haben, ist $\varrho = R + h$ und $\frac{R^2}{\varrho^2} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$.

Ist h gegen R verhältnismäßig klein, so ist

$$(R + h)^{-2} = R^{-2}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} = R^{-2}\left(1 - \frac{2h}{R} + \cdots\right),$$

und demnach läßt sich $\frac{R^2}{\varrho^2}$ angenähert als $1 - \frac{2h}{R}$ darstellen, so daß

$$\bar{g}_{\varrho,\beta} = \bar{g}_{R,\beta}\left(1 - \frac{2h}{R}\right) = \bar{g}_{R,\beta}\,(1 - 0{,}00000032\,h)$$

ist.

2. Die Beschleunigung des freien Falles in ihrer Beziehung zur Bewegung des Erdmondes. Es hat eine gewisse Bedeutung, festzustellen, unter welchen Umständen für Punkte des Erdäquators die Fallbeschleunigung durch die Normalbeschleunigung der Kreisbewegung völlig aufgezehrt wird. Dies könnte für eine am Erdäquator ruhende Kugel eintreten, wenn die Erde sich, wie es in früheren Perioden der Fall war, mit größerer Äquatorialgeschwindigkeit drehte, als sie es jetzt thut, es könnte aber auch unter den thatsächlichen Verhältnissen eintreten, falls eine Kugel längs des Äquators mit einer bestimmten konstanten Geschwindigkeit bewegt würde. Im ersten Falle folgt aus $\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R = \bar{g}_0$ die Gleichung $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{\bar{g}_0}} = 5064{,}99''$ mittlere Zeit, während T thatsächlich den Wert $86164{,}00''$ mittlere Zeit hat, so daß die Veränderung von T etwa dem Verhältnisse $1 : 17$ entsprechend erfolgen müßte. Würde sich die Erde also etwa 17 mal rascher um ihre Achse drehen, als es thatsächlich der Fall ist, so würde die Kugel am Äquator schweben, ohne eine Fallbeschleunigung zu zeigen; bei weiterer Steigerung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde würde die Kugel gegen die Erde relativ zurückbleiben und zwar würde sie dabei die Erde als Trabant umkreisen mit der Geschwindigkeit, welche ihrem Schweben in relativer Ruhe zur Erde entspricht, d. h. mit der Geschwindigkeit $\frac{2R\pi}{5064{,}99''} = 1{,}0418\,\frac{\text{Geogr. Meile}}{\text{Sekunde}}$. Im zweiten

Falle hätte man einer Kugel längs einer Tangente des Äquators dieselbe Geschwindigkeit 1,0418 $\frac{\text{Geogr. Meile}}{\text{Sekunde}}$ durch irgend welche technische Mittel zu geben, wobei zu bemerken ist, daß unsere Kanonen ihren Geschossen etwa ein Zehntel dieser Geschwindigkeit zu erteilen imstande sind (vergl. S. 147).

Nimmt man an, daß der Erdmond in einer früheren Periode der Erde, als diese noch ein größeres Volumen besaß und noch eine größere Äquatorialgeschwindigkeit hatte, von dieser abgeschleudert worden ist, so ist seine Bewegung ganz ebenso aufzufassen wie die beiden eben betrachteten Bewegungen.

Bezeichnet ϱ den Radius der Mondbahn, so ist die Beschleunigung für den freien Fall des Mondes zur Erde bestimmt durch die Formel (vergl. S. 154) $g \cdot \frac{R^2}{\varrho^2}$.

Für $\varrho = 51694{,}13$ geogr. Meilen ist angenähert $\frac{\varrho}{R} = 60{,}1$, d. h. $g \cdot \frac{R^2}{\varrho^2}$ hat angenähert den Wert $\frac{1}{3600} \cdot g$. Bezeichnet man die Umlaufszeit des Mondes durch $\overline{T}$, so ist die Normalbeschleunigung seiner Kreisbewegung $\frac{4\pi^2}{\overline{T}^2} \cdot \varrho$, sie hat für $\overline{T} = 2360592''$ den Wert $0{,}0027174 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$. Unserem Vergleiche entsprechend müßte demnach angenähert

$$\frac{1}{3600} \cdot g = 0{,}00272$$

sein, woraus sich $g = 9{,}792 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ ergiebt. Dieser Wert von g, der nur aus den Konstanten der Mondbahn und dem Erdradius R berechnet wurde, stimmt so genau mit dem durch Versuche bestimmten Werte von g für die Erdoberfläche überein, daß die Normalbeschleunigung der Mondbewegung thatsächlich als Beschleunigung seines freien Falles zur Erde aufgefaßt werden darf. Die Einsicht in diese Beziehungen verdanken wir Newton, der in Bezug auf den Mond

$$\frac{4\pi^2}{\overline{T}^2} \cdot \varrho = g \left(\frac{R}{\varrho}\right)^x$$

setzte und dabei angenähert $x = 2$ erhielt.

3. Die Normalbeschleunigungen der Planetenbewegungen des Sonnensystems. Überträgt man die Beziehungen von Erde und Mond auf die Beziehungen von Sonne und Erde, so gelangt man zu der Vorstellung, daß die Normalbeschleunigung des Erdmittelpunktes in seiner Bahn als Beschleunigung seines freien Falles zur Sonne aufgefaßt werden kann. Entsprechendes gilt für die anderen Planeten unseres Sonnensystems, deren gegenseitige Beziehungen in dem dritten Kepplerschen Gesetze Ausdruck gefunden haben.

Nach diesem verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten je zweier Planeten wie die Kuben ihrer mittleren Sonnenentfernungen, so daß für je zwei Planeten die Gleichung

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

gilt, falls man deren Umlaufszeiten bezw. mit T_1 und T_2 und die mittleren Abstände ihrer Mittelpunkte von dem Mittelpunkte der Sonne bezw. mit r_1 und r_2 bezeichnet. Sieht man die Bahnen der Planeten in Annäherung als Kreise (vergl. Fig. 99) mit den Radien r_1 und r_2 an, so sind die entsprechenden Normalbeschleunigungen:

$$p_1 = \frac{4\pi^2}{T_1^2} \cdot r_1 \quad \text{und} \quad p_2 = \frac{4\pi^2}{T_2^2} \cdot r_2,$$

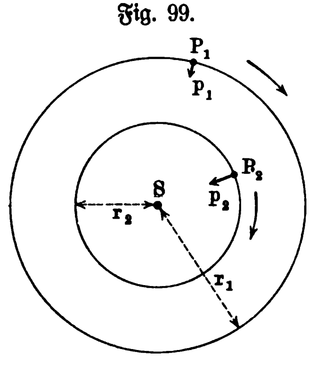
so daß $p_1 : p_2 = \frac{T_2^2}{T_1^2} : \frac{r_2}{r_1}$ ist. Ersetzt man das Verhältnis der Umlaufszeiten gemäß der Formel des dritten Kepplerschen Gesetzes, so erhält man:

$$p_1 : p_2 = r_2^2 : r_1^2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2}.$$

Demgemäß sind die Fallbeschleunigungen zur Sonne für die einzelnen Planeten bezw. den Quadraten ihrer Abstände von der Sonne umgekehrt proportional.

Diese Einsicht, wonach man sich vorstellen kann, daß die Sonne die Planeten mit einer, dem umgekehrten Quadrate der Entfernung entsprechenden Kraft anzieht, wurde von mehreren älteren Zeitgenossen Newtons gewonnen, nachdem Huyghens zum erstenmale die Normalbeschleunigung behandelt hatte. Diese Einsicht gab Newton die Anregung zur Aufstellung seines berühmten Gesetzes, wonach obige Beziehung nicht bloß für die Erde als Ganzes in Bezug auf den Mond und für die Sonne als Ganzes in Bezug auf die einzelnen Planeten, sondern überhaupt für je zwei Teilchen der Materie in Geltung ist[1]).

Fig. 99.



4. **Die Bedeutung der Kepplerschen Gesetze.** Die Betrachtung der vorigen Nummer setzte voraus, daß die Planetenbahnen als Kreise angesehen werden dürfen. Diese Annäherung soll jetzt durch die genauere Grundlage ersetzt werden, welche die Kepplerschen Gesetze bieten.

Die ersten beiden Gesetze (1609) Kepplers lauten:

---

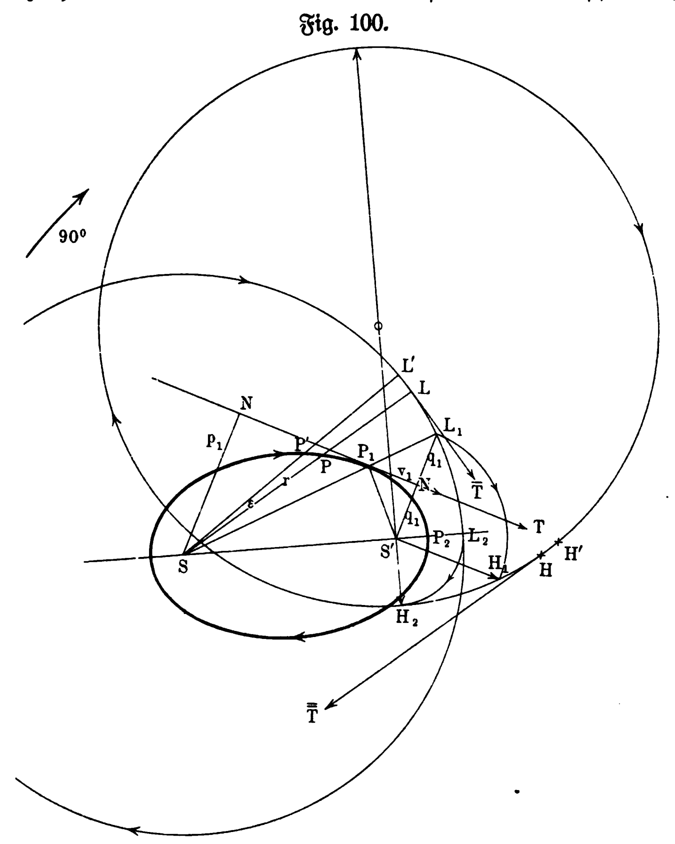
[1]) Vergl. Wernicke, Beiträge zur Theorie der centrodynamischen Körper. Gymnasialprogramm, 1892, Braunschweig.

I. Der Mittelpunkt der Sonne steht in dem einen Brennpunkte der Ellipse, welche von dem Mittelpunkte eines Planeten beschrieben wird.

II. Die Strecke (radius vector), welche den Mittelpunkt der Sonne mit dem Mittelpunkte eines Planeten verbindet, erzeugt in gleichen Zeiten gleiche Flächenstücke.

Durch diese beiden Gesetze wird eine ganz bestimmte Centralbewegung (vergl. S. 111) beschrieben. In Fig. 100 mag S den Mittelpunkt der Sonne bezeichnen und S' den anderen Brennpunkt der Ellipse, auf welcher

Fig. 100.



der Mittelpunkt des Planeten augenblicklich die Stellung P_1 hat. Bildet man für die Geschwindigkeit $[v_1]$ in P_1 das Moment aus S, so gilt nach Formel 36 die Gleichung $\frac{1}{2} p_1 v_1 = V$, wobei V einen konstanten Wert C hat, da es sich um eine Centralbewegung handelt. Bezeichnet man die halbe kleine Achse der Ellipse mit b, so gilt für die beiden Lote p_1 und q_1 aus den beiden Brennpunkten S und S' auf die Tangente in P_1 die Gleichung $p_1 q_1 = b^2$, und demgemäß ist p_1 ersetzbar durch $\frac{b^2}{q_1}$, so daß $\frac{1}{2} \frac{b^2}{q_1} v_1 = C$ und $v_1 = \frac{C \, . \, 2 q_1}{b^2}$

wird. Demnach ist v_1 proportional zu $2\,q_1$. Verlängert man $S'N'$ um sich selbst, so daß $S'L_1 = 2\,q_1$ ist, so liegt L_1 auf dem Leitkreise der Ellipse, der aus S beschrieben werden kann, d. h. die Strecken aus S' nach irgend einem Punkte (L_1) des Leitkreises sind proportional zu den entsprechenden Geschwindigkeiten (P_1 und L_1 entsprechen sich) des Planetenmittelpunktes. Dreht man also die Strecke $S'L_1$ im Sinne der Bewegung des Planeten um 90^0, so daß sie in der Lage $S'H_1$ der Tangente in P_1 parallel wird, so ist $[S'H_1]$ proportional zu $[v_1]$. Denkt man diese Betrachtung für alle Punkte der Ellipse durchgeführt, d. h. dreht man den ganzen Leitkreis um S' und zwar um 90^0 im Sinne der Planetenbewegung, wobei z. B. L_2 in die Lage H_2 kommt, ebenso wie L_1 in die Lage H_1, so kann der Leitkreis in der neuen Lage als Hodograph der Bewegung dienen.

Um die **Beschleunigung der Bewegung durch die Geschwindigkeit für die Erzeugung des Hodographen** (vergl. S. 88) zu bestimmen, betrachten wir die Durchschnittsgeschwindigkeit $\frac{H'H}{\tau}$ für ein Stück $H'H$ des Hodographen, welches bei rückläufiger Bewegung des Leitkreises in die Lage $L'L$ gelangt und den Planetenstellungen P' und P auf der Bahn entspricht. Bezeichnet man für den Übergang von P' nach P die Winkelgeschwindigkeit mit φ, so gilt nach Formel 37 für $SP = r$, unter Berücksichtigung von $V = C$, die Gleichung $C = \frac{1}{2} r^2 \varphi$, d. h. $\varphi = \frac{2\,C}{r^2}$. Da auch der Bogen $L'L$ mit dieser Winkelgeschwindigkeit beschrieben wird, so gilt für $SL = 2\,a$ die Gleichung

$$lim \left[\frac{L'L}{\tau}\right] = lim \left[\frac{H'H}{\tau}\right] = 2\,a \cdot \varphi = 2\,a \cdot \frac{2\,C}{r^2},$$

falls $P'P$ in der Zeit τ durchlaufen wird.

Da der Hodograph entsprechend $2\,q_1$ konstruiert wurde, während die Geschwindigkeit v_1 den Wert $\frac{C \,.\, 2\,q_1}{b^2}$ hat, so ist der eigentliche Hodograph der Bewegung ein Kreis, der zu dem gezeichneten Kreise im Linearverhältnisse $\frac{C}{b^2} : 1$ steht. Demgemäß ist die **Beschleunigung der Bewegung** für P (entsprechend H) gegeben als $2\,a \cdot \frac{2\,C}{r^2} \cdot \frac{C}{b^2} = \frac{4\,a\,C^2}{b^2 r^2}$, d. h. die **Beschleunigung der Bewegung** $[j_G]$, **welche stets durch den Mittelpunkt der Sonne geht** (vergl. S. 111 u. f.), **ist umgekehrt proportional zu dem Quadrate der Entfernung (radius vector) von Sonnenmittelpunkt und Planetenmittelpunkt.**

Daß die Beschleunigung $[j_G]$, deren Richtung durch die Tangente in H bestimmt wird, durch S geht, zeigt übrigens auch Fig. 100, da $H\overline{\overline{T}} \,//\, PS$ ist, weil $[HT'']$ gegen $[L\,\overline{T}]$ um 90^0 gedreht wurde.

Wird die Fläche der Ellipse $(a\,b\,\pi)$ in der Zeit T beschrieben, so ist

$$C = \frac{a\,b\,\pi}{T}$$

und man hat:

$$j_G = \frac{4\,\pi^2}{r^2} \cdot \frac{a^3}{T^2}.$$

Nach dem dritten Gesetze Kepplers (1619) verhalten sich bei verschiedenen Planeten des Sonnensystems die Quadrate der Umlaufszeiten (T^2) wie die Kuben ihrer mittleren Entfernungen (a^3) von der Sonne, so daß $\frac{a^3}{T^2}$ für alle Planeten des Systems eine Konstante ist, welche $\frac{K}{4\,\pi^2}$ heißen mag. Demgemäß gilt:

$$j_G = K \cdot \frac{1}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

Diese Formel stellt wiederum, jetzt aber bei größerer Annäherung, den phoronomischen Teil des berühmten Newtonschen Gesetzes dar, wonach sich überhaupt zwei Massen gegenseitig Beschleunigungen erteilen, welche einerseits von diesen Massen selbst abhängen und anderseits dem Quadrate ihrer Entfernungen umgekehrt proportional sind[1]).

Eine weitere Annäherung, bei welcher das Newtonsche Gesetz selbst erhalten wird, entspricht der Thatsache, daß die Kepplerschen Gesetze nur die Relativbewegungen der Planeten zur Sonne beschreiben, während die Darstellung von deren absoluten Bewegungen noch die Berücksichtigung der Verschiebung des Sonnenmittelpunktes erfordert.

5. **Die Bahn der Newtonschen Centralbewegung.** Man pflegt eine Centralbewegung, welche durch Newtons Gesetz $\left(j_G = \frac{K}{r^2}\right)$ beherrscht wird, von anderen Centralbewegungen als Newtonsche Centralbewegung zu unterscheiden. Es liegt nun nahe, zu fragen, ob eine solche Centralbewegung auch stets wiederum den Kepplerschen Gesetzen entspricht oder ob sie auch andere Arten umfaßt. Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir zunächst den Hodographen einer beliebigen Centralbewegung etwas genauer, gemäß Fig. 101. Wenn P ein Punkt der Bahn für das Centrum S ist, so läßt sich v gemäß der Gleichung $\frac{1}{2}\,p\,v = C$ aus C und p leicht konstruieren, wenn man mit $\sqrt{2\,C}$ einen Kreis um S schlägt und in Bezug auf ihn den konjugierten Pol H zu dem Fußpunkte N der Tangente in P bestimmt. Die grundlegende Gleichung $SH\,.\,SN = (\sqrt{2\,C})^2$ zeigt, daß $SH = v$ ist, und zwar sind die Richtungen von $[v]$ und $[SH]$ wieder um 90^0 gegeneinander gedreht. Faßt man H als einen Punkt des Hodographen auf, so giebt dessen Tangente in H die Richtung der Beschleunigung von P, welche durch $[PS]$ bestimmt ist, und zwar auch mit einer Drehung von 90^0, d. h. diese Tangente ist das Lot HT von H auf SP. Betrachtet man einen Punkt P', der vor P liegt, so entspricht diesem ein Punkt H' des Hodographen und zwar bilden die Tangenten in H' und H denselben Winkel ε, den SP' und

---

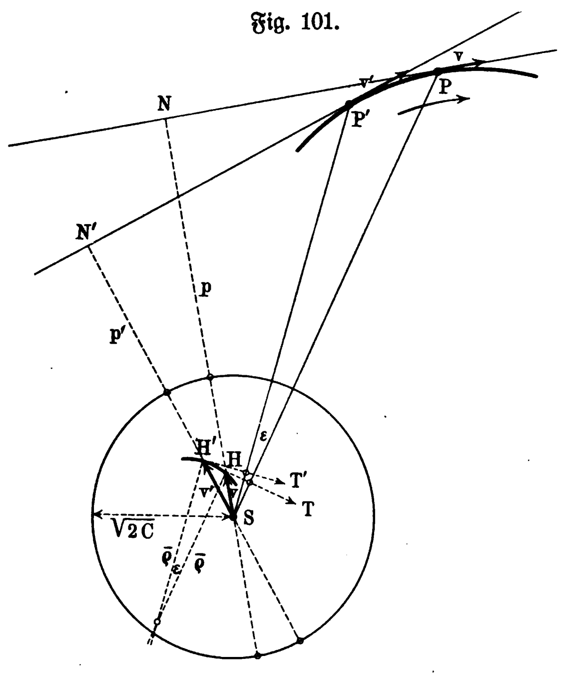
[1]) Vergl. hierzu S. 157, Anmerkung.

SP miteinander bilden, und infolgedessen auch die Normalen in H' und H. Bezeichnet man den Krümmungsradius des Hodographen mit $\bar{\varrho}$, so gilt demnach für $lim\ \varepsilon = 0$ die Gleichung $\bar{\varrho} \,.\, \varepsilon = H'H$ und auch die Gleichung $\bar{\varrho} \cdot \frac{\varepsilon}{\tau} = \frac{H'H}{\tau}$, d. h. man hat $\bar{\varrho} \,.\, \varphi = j_G$. Demgemäß ist der Krümmungsradius des Hodographen $\bar{\varrho} = \frac{j_G}{\varphi}$ und man hat für $\frac{1}{2} r^2 \varphi = C$ auch

$$\bar{\varrho} = \frac{r^2 \,.\, j_G}{2\,C}.$$

Für die Newtonsche Centralbewegung ist $j_G = K \cdot \frac{1}{r^2}$, d. h. man hat hier $\bar{\varrho} = \frac{K}{2\,C}$ und erhält also hier als Hodographen einen Kreis, da $\bar{\varrho}$ eine Konstante ist. Da dieser Kreis durch die zu N konjugierten Pole H beschrieben wird und zwar in Bezug auf den Hülfskreis vom Radius $\sqrt{2\,C}$, so beschreibt auch N einen Kreis, denn die Polarkurve eines Kreises in Bezug auf einen Kreis ist selbst ein Kreis. Demgemäß ist die Bahn eine Linie, bei welcher die Fußpunkte für S als Centrum auf einem Kreise liegen. Sie ist ein Kegelschnitt, für welchen S Brennpunkt ist, so daß die elliptische Bahn der Kepplerschen Gesetze als Sonderfall zu betrachten ist.

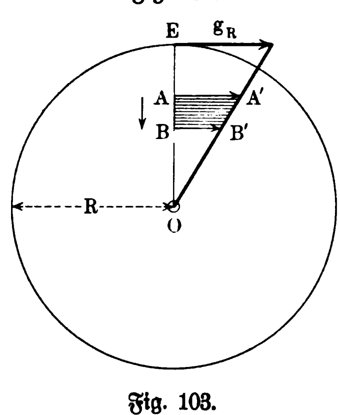
Fig. 101.



6. Der freie Fall und der Vertikalwurf und die entsprechenden Bewegungen auf der schiefen Ebene. Würde ein Planet plötzlich in seiner Bahn angehalten, so würde er in freiem Falle in die Sonne stürzen; dasselbe würde für den Mond in Bezug auf die Erde gelten. Wenn wir den freien Fall von Körpern in der Nähe der Erdoberfläche betrachten, so begnügen wir uns zunächst für die Darstellung des ganzen Vorganges mit einer gewissen Annäherung, wie die Vergleichung mit dem fallenden Monde sofort verdeutlicht. Abgesehen davon, daß wir von dem Widerstande der Luft absehen, vernachlässigen wir auch die Veränderlichkeit der Fallbeschleunigung

und den Einfluß der Achsendrehung der Erde. Innerhalb dieser Annäherung gelten die Formeln $s = \frac{g}{2} t^2$, $v = g t$ und $j = g$, welche man etwa durch Versuche an der Atwoodschen Fallmaschine ableitet. Dasselbe gilt für den Vertikalwurf, mag die Geschwindigkeit c die Fallbewegung verstärken oder abschwächen, d. h. für die Formeln $s = c t \pm \frac{1}{2} g t^2$, $v = c \pm g t$, $j = g$.

Fig. 102.



Um die Veränderlichkeit der Fallbeschleunigung zu berücksichtigen, hat man für Punkte des Erdinnern $j = \frac{\varrho}{R} \cdot g_R$ statt $j = g$ zu setzen, und dann den Übergang von j zu v und v zu s zu bewerkstelligen. Dazu betrachten wir für $\varrho = 0 \ldots R$ die Beschleunigung-Weglinie der Fig. 98 in der weiteren Ausführung, welche Fig. 102 zeigt.

Fig. 103.

Fällt eine Kugel in einem Schachte von A, wo sie die Geschwindigkeit v_0 hat, bis B, wo sie die Geschwindigkeit v hat, so stellt die zu AB gehörige Fläche $AA'B'B$ die Änderung des halben Quadrates der Geschwindigkeit dar, d. h. man hat:

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = \frac{AA' + BB'}{2} \cdot AB.$$

Für $OA = \varrho_0$ und $OB = \varrho$ ist $AB = \varrho_0 - \varrho$ und $AA' = \frac{\varrho_0}{R} \cdot g_R$ und $BB' = \frac{\varrho}{R} \cdot g_R$, d. h. man hat:

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = \tfrac{1}{2} (\varrho_0^2 - \varrho^2) \cdot \frac{g_R}{R}$$

und

$$v = \sqrt{v_0^2 + (\varrho_0^2 - \varrho^2) \cdot \frac{g_R}{R}}.$$

Was die Zeitdauer des freien Falles anlangt, so ergiebt eine weitere Rechnung (vergl. S. 175) für das Durchlaufen von EO bei $v_0 = 0$ die einfache Formel $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g_R}}$.

Für Punkte des Außenraumes hat man $j = \frac{R^2}{\varrho^2} \cdot g_R$ statt $j = g$ zu setzen.

Für den Fall von A, wo die Geschwindigkeit v_0 ist, bis B, wo die Geschwindigkeit v ist, gilt wieder (vergl. Fig. 103):

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = \text{Fläche } A A' B' B.$$

Um Fläche $A A' B' B$ zu berechnen, zerlegen wir $A B$ durch die Teilpunkte $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ in n Stücke $w_1, w_2, \ldots, w_n$ und zwar so, daß $0 A$, $0 T_1$, $0 T_2, \ldots, 0 T_{n-1}$, $0 B$ eine geometrische Reihe vom Quotienten q bilden. Es ist dann $0 B = 0 A \, . \, q^n$ und man hat:

$$q^n = \frac{0 B}{0 A} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \quad \text{und} \quad q = \sqrt[n]{\frac{\varrho}{\varrho_0}}.$$

Berechnet man die Flächenstreifen über $w_1, w_2, \ldots, w_n$ bezw. mit den Höhen $A A'$, $T_1 T_1'$, $\ldots$, $T_{n-1} T_{n-1}'$, so erhält man eine untere Grenze F_u, berechnet man sie bezw. mit den Höhen $T_1 T_1'$, $T_2 T_2', \ldots, B B'$, so erhält man eine obere Grenze F_0 für die gesuchte Fläche $F = A A' B' B$.

Da die Höhen, welche den Punkten $A, T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}, B$ entsprechen, gemäß dem Ansatze $0 A = \varrho_0$, $0 T_1 = \varrho_0 q$, $0 T_2 = \varrho_0 q^2, \ldots$, $0 T_{n-1} = \varrho_0 q^{n-1}$, $0 B = \varrho_0 q^n$ und gemäß der Formel $j = \frac{R^2}{\varrho^2} \cdot g_R$ bezw. proportional sind zu $\frac{1}{\varrho_0^2}, \frac{1}{\varrho_0^2 q^2}, \frac{1}{\varrho_0^2 q^4}, \cdots \frac{1}{\varrho_0^2 q^{2n-2}}, \frac{1}{\varrho_0^2 q^{2n}}$ und da $w_1, w_2, \ldots, w_n$, bezw. die Werte $\varrho_0 (1 - q)$, $\varrho_0 q (1 - q) \ldots$, $\varrho_0 q^{n-1} (1 - q)$ haben, so ist:

$$\begin{aligned}
F_u &= R^2 \, . \, g_R \left[\frac{\varrho_0 (1 - q)}{\varrho_0^2} + \frac{\varrho_0 q (1 - q)}{\varrho_0^2 q^2} + \ldots \frac{\varrho_0 q^{n-1} (1 - q)}{\varrho_0^2 q^{2n-2}}\right] \\
&= \frac{R^2 \, . \, g_R}{\varrho_0} (1 - q) \left(1 + \frac{1}{q} + \cdots \frac{1}{q^{n-1}}\right) = \frac{R^2 \, . \, g_R}{\varrho_0} (1 - q) \cdot \frac{(1 - q^n) q}{q^n (1 - q)} \\
&= \frac{R^2 \, . \, g^R}{\varrho_0} \cdot q \cdot \left(\frac{1}{q^n} - 1\right) = R^2 \, . \, g_R \, . \, q \left(\frac{1}{\varrho_0 q^n} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \\
&= R^2 \, . \, g_R \, . \, q \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)
\end{aligned}$$

und

$$F_0 = R^2 \cdot g_R \cdot \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right).$$

Für $\varrho = \varrho_0 - a$ erhält $q = \sqrt[n]{\frac{\varrho}{\varrho_0}} = \sqrt[n]{\frac{\varrho_0 - a}{\varrho_0}} = \left(1 - \frac{a}{\varrho_0}\right)^{\frac{1}{n}}$ den Wert $1 - \frac{1}{n} \frac{a}{\varrho_0} + \cdots$, so daß $\lim q = 1$ ist für $\lim n = \infty$, solange $\frac{a}{\varrho_0}$ selbst endlich ist, was stets der Fall ist.

Aus der Gleichung $F_u < F < F_0$ folgt also für $\lim n = \infty$:

$$F = R^2 \, . \, g_R \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right).$$

Demgemäß gilt:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 R^2 \, . \, g_R \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)}.$$

Fällt z. B. ein Körper aus der Höhe h über der Erdoberfläche ohne Anfangsgeschwindigkeit auf die Erdoberfläche, so ist $v_0 = 0$, $\varrho = R$ und $\varrho_0 = R + h$ und man hat:

$$v = \sqrt{2 R^2 \cdot g_R \cdot \frac{h}{R(R+h)}} = \sqrt{2 g_R \cdot h \cdot \frac{R}{R+h}}.$$

Ist h gegen R sehr klein, so ist $\frac{R}{R+h}$ angenähert 1 und man erhält die gewöhnliche Formel für v.

Für $lim\, \varrho_0 = \infty$ und $\varrho = R$ erhält man bei $v_0 = 0$ den Wert:

$$v = \sqrt{2 R \,.\, g_R} = 11250 \frac{\text{m}}{\text{sec}},$$

d. h. die Geschwindigkeit einer Kugel, die aus unendlicher Ferne im freien Falle auf die Erdoberfläche gelangt, ist nicht unendlich-groß, sondern genau so groß, als wenn der Erdradius mit der konstanten Beschleunigung g_R durchlaufen worden wäre.

Eine weitere Rechnung ergiebt für die Zeitdauer des freien Falles von A nach B für $v_0 = 0$ die Formel:

$$t = \sqrt{\frac{\varrho_0}{2 g R^2}} \left\{ \sqrt{\varrho(\varrho_0 - \varrho)} + \tfrac{1}{2} \varrho_0 \, arc\cos \frac{2\varrho - \varrho_0}{\varrho_0} \right\}.$$

Sehr verwickelt werden alle diese Rechnungen bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes, welcher dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional (k) zu setzen ist, so daß bei constantem g für Abwärtsbewegungen

$$j = +g(1 - k v^2)$$

und für Aufwärtsbewegungen

$$j = +g(1 + k v^2)$$

statt $j = +g$ einzuführen ist.

Für den Vertikalwurf nach oben mit der Anfangsgeschwindigkeit c hat man z. B. unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes die Dauer des Steigens bei constantem g durch die Formel:

$$t = \frac{1}{g\sqrt{k}} \, arc\, tg\, c\sqrt{k}$$

und die Steighöhe durch die Formel

$$h = \frac{1}{2 g k} \, log.\, nat.\, (1 + c^2 k)$$

gegeben.

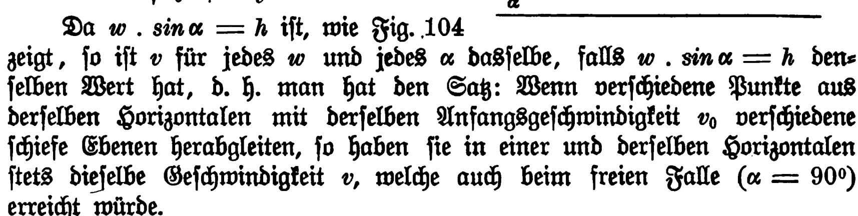
Endlich ist noch zu bemerken, daß die Bahn des freien Falles wegen der Achsendrehung der Erde keine gerade Linie ist und daß infolgedessen der fallende Körper sowohl eine äquatoriale als auch eine östliche Abweichung von der geraden Falllinie zeigt. Erstere Abweichung erklärt sich leicht gemäß Fig. 97, doch ist ihr experimenteller Nachweis schwer, weil die Bleilote, welche die Vertikale bezeichnen, dieselbe Abweichung zeigen.

Die östliche Abweichung, deren Bestimmung zugleich ein Beweis für die Achsendrehung der Erde ist, beruht darauf, daß der fallende Körper in den

oberen Schichten eine größere Geschwindigkeit (von Westen nach Osten) hat als die Punkte der Erdoberfläche und infolgedessen seiner Vertikalprojektion gegenüber nach Osten zu vorauseilt.

Die grundlegenden Gesetze des freien Falles sind ursprünglich an der schiefen Ebene (Galilei 1602) gefunden worden. Hier tritt (vergl. Fig. 104) eine Zerlegung von g in die beiden Komponenten $g \cdot \cos\alpha$ und $g \sin\alpha$ ein, so daß die Bewegung hier mit der geringeren Beschleunigung $j = g \sin\alpha$ vor sich geht, sonst aber dem freien Fall bezw. dem Vertikalwurf genau entspricht.

Fig. 104.



Die Gleichung $\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = j \cdot w$ liefert hier:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\, g \cdot w \cdot \sin\alpha}.$$

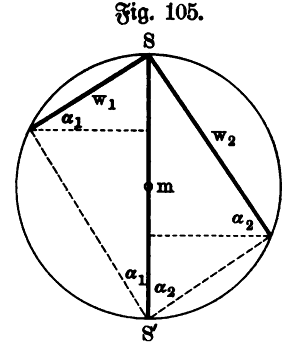
Da $w \cdot \sin\alpha = h$ ist, wie Fig. 104 zeigt, so ist v für jedes w und jedes α dasselbe, falls $w \cdot \sin\alpha = h$ denselben Wert hat, d. h. man hat den Satz: Wenn verschiedene Punkte aus derselben Horizontalen mit derselben Anfangsgeschwindigkeit v_0 verschiedene schiefe Ebenen herabgleiten, so haben sie in einer und derselben Horizontalen stets dieselbe Geschwindigkeit v, welche auch beim freien Falle ($\alpha = 90^0$) erreicht würde.

Dabei wird jede Horizontale von den verschiedenen Punkten im allgemeinen nach Ablauf verschiedener Zeiten erreicht, da $w = v_0 t + \frac{g}{2} \sin\alpha\, t^2$ ist. Für $v_0 = 0$ ist $t = \sqrt{\frac{2\, w}{g \sin\alpha}}$, so daß t denselben Wert erhält, wenn $\frac{w}{\sin\alpha}$ denselben Wert m hat. Da in einem Kreise vom Durchmesser m die zum Peripheriewinkel α gehörige Sehne w den Wert $m \sin\alpha$ hat, so ist für Sehnen (w) eines Kreises (m) die Größe $\frac{w}{\sin\alpha}$ eine Konstante (m). Man gelangt also (vergl. Fig. 105) zu dem Satze: Wenn verschiedene Punkte aus demselben Punkte S mit der Anfangsgeschwindigkeit Null auf verschiedenen schiefen Ebenen (w_1, α_1; w_2, α_2; ...) herabgleiten, so befinden sie sich zu derselben Zeit t auf einer Kugel, deren Durchmesser die Vertikalstrecke

$$S\,S' = m = \frac{w_1}{\sin\alpha_1} = \frac{w_2}{\sin\alpha_2} = \cdots$$

ist, welche in derselben Zeit t im freien Falle durchlaufen wird.

Fig. 105.



Natürlich sind für das Gleiten auf der schiefen Ebene bei weiterer Annäherung entsprechende Korrekturen anzubringen, wie beim freien Falle, außerdem ist dann auch noch die Reibung auf der schiefen Ebene zu berücksichtigen.

7. Die Wurfbewegung. Ein Körper, der in der Nähe der Erdoberfläche so geworfen oder abgeschossen wird, daß die Richtung der ihm erteilten Geschwindigkeit nicht in eine Vertikale fällt, unterliegt einer Bewegung, welche, abgesehen von den nötigen Korrekturen, den ersten beiden Kepplerschen Gesetzen entspricht. Da dieser Bewegung stets durch die Erdoberfläche ein

Fig. 106 a.

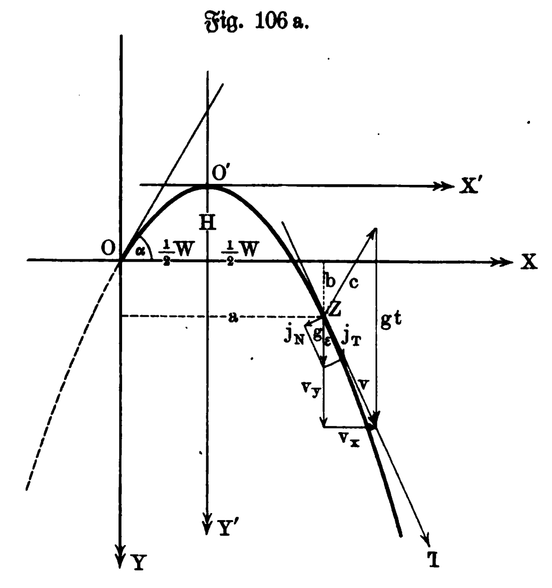


Fig. 106 b.

Ziel gesetzt wird, so kommt nur ein relativ kleiner Teil ihrer Bahn wirklich zustande, und dieser kann mit Rücksicht auf die relativ große Entfernung des Erdmittelpunktes als Stück einer Ellipse angesehen werden, von welcher ein Brennpunkt (Erdmittelpunkt) in das Unendliche gefallen ist, d. h. als Stück einer Parabel. Demgemäß ist die Bahn eines geworfenen Körpers in einer gewissen Annäherung als Stück einer Parabel (vergl. S. 84 u. S. 100) anzusehen, deren Grenzfall die gerade Bahn des Vertikalwurfes darstellt. Die beiden Bewegungen, welche zur parabolischen Bewegung zusammentreten, können durch ihre Stellungsgleichungen, oder durch ihre Geschwindigkeitsgleichungen, oder durch ihre Beschleunigungsgleichungen gegeben sein.

Wir wollen hier den letzten Fall betrachten, gemäß Fig. 106, und zwar auf Grundlage der Projektionsmethode. Da nur eine Beschleunigung, nämlich [g], in der Richtung der Y-Achse auftritt, so ist:

$$j_x = 0 \quad \text{und} \quad j_y = g.$$

Demnach gilt, gemäß dem Übergange von der Ableitung zum Stamme:

$$v_x = C_1 \quad \text{und} \quad v_y = C_2 + g\,t,$$

falls man mit C_1 und C_2 Konstanten bezeichnet.

Für $t = 0$ ergiebt sich $v_x = C_1$ und $v_y = C_2$, d. h. C_1 und C_2 sind die Komponenten der Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$. Beginnt die Bewegung zur Zeit $t = 0$ mit einer konstanten Geschwindigkeit c, welche gegen die Horizontale den Winkel $360^0 - \alpha$ im Sinne des Winkelpfeiles (Fig. 106 b) hat, so sind diese Komponenten bezw. $c\,.\,cos\,\alpha$ und $-\,c\,.\,sin\,\alpha$, d. h. man hat:

$$v_x = c \cos\alpha \quad \text{und} \quad v_y = -c \sin\alpha + g\,t.$$

Demnach gilt, gemäß dem Übergange von der Ableitung zum Stamme:

$$x = s_x = K_1 + c \cos\alpha\, t \quad \text{und} \quad y = s_y = K_2 - c \sin\alpha\, t + \frac{g}{2} t^2,$$

falls man mit K_1 und K_2 Konstanten bezeichnet. Für $t = 0$ erhält man $s_x = K_1$ und $s_y = K_2$, d. h. K_1 und K_2 sind die Stellungen zur Zeit $t = 0$. Beginnt die Bewegung in O, so haben diese Stellungen den Wert Null, d. h. man hat:

$$x = s_x = c \cos\alpha\, t \quad \text{und} \quad y = s_y = -c \sin\alpha\, t + \frac{g}{2} t^2.$$

Entwirft man sowohl für x als auch für y eine Tabelle, entsprechend $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$, so kann man die Stellungen der Projektionen des sich bewegenden Punktes W auf der X-Achse und auf der Y-Achse für die Zeitpunkte 0, 1, 2, 3, . . . und damit auch die Stellungen des Punktes W selbst zu diesem Zeitpunkte leicht bestimmen.

In Fig. 106 sind hierfür die Werte $c = 20$ und $\alpha = 60^0$ benutzt.

Natürlich kann man auch für jeden beliebigen Zeitpunkt t, welcher Interesse darbietet, s_x und s_y berechnen und demgemäß die Lage von W bestimmen.

Faßt man die Bewegungen $s_x = c \cos\alpha\, t$ und $\overline{s}_y = -c \sin\alpha\, t$ in eine zusammen, der dann die Bewegung $\overline{\overline{s}}_y = \frac{g}{2} t^2$ gegenübertritt, so gelangt man zurück zu der Konstruktion auf S. 84.

Um die parabolische Bahn in analytisch-geometrischer Form zu erhalten, hat man t aus einer der Gleichungen für x und y zu bestimmen und in die andere einzutragen. Man hat $t = \frac{x}{c \cos\alpha}$ und demnach:

$$y = -x \,.\, \operatorname{tang}\alpha + \frac{g}{2} \frac{x^2}{c^2 \cos^2\alpha} \quad \cdots\cdots \quad 50)$$

Für $y = 0$ erhält man $x\left(-\operatorname{tang}\alpha + \frac{g}{2}\frac{x}{c^2 \cos^2\alpha}\right) = 0$, d. h. $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2 c^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha$. Der Wert $x_1 = 0$ entspricht dem Punkte O, der Wert x_2 stellt die sogenannte Wurfweite W für die Horizontale $O\,X$ dar, d. h. es ist:

$$W = \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha \quad \cdots\cdots\cdots \quad 51)$$

Diese ist ein Maximum für $\sin 2\alpha = 1$, d. h. für $\alpha = 45^0$, und hat hier den Wert $\frac{c^2}{g}$.

Um die sogenannte Wurfhöhe H für die Horizontale zu bestimmen, kann man von dem Gedanken ausgehen, daß jede Höhe y, welche oberhalb der Horizontalen überhaupt erreicht wird, im allgemeinen zweimal erreicht wird, beim Aufstiege und beim Abstiege, d. h. für ein bestimmtes x_1 und x_2,

während die Wurfhöhe im besonderen nur **einmal** erreicht wird, so daß für sie $x_1 = x_2$ sein muß.

Löst man die Gleichung der Bahn für x auf, so erhält man:

$$x = \frac{c^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \pm \sqrt{\frac{c^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{g^2} + \frac{2c^2 \cos^2\alpha}{g} \cdot y}.$$

Die Bedingung $x_1 = x_2$, für welche die Quadratwurzel verschwindet, giebt:

$$x_1 = x_2 = \frac{c^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}\sin 2\alpha = \frac{1}{2}W,$$

$$y = -\frac{1}{2}\frac{c^2}{g}\sin^2\alpha,$$

d. h. man erreicht über der halben Wurfweite W die Wurfhöhe:

$$H = \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}\sin^2\alpha \quad \cdots\cdots\cdots \quad 52)$$

Legt man in den **Scheitel**, dessen Koordinaten $x = \frac{1}{2}W$ und $y = -H$ sind, ein Koordinatenkreuz $O'X'Y'$, welches dem Kreuze OXY parallel ist, so gilt:

$$x = x' + \tfrac{1}{2}W$$
$$y = y' - H$$

und man hat für die Gleichung der Bahn:

$$x'^2 = \frac{2c^2\cos^2\alpha}{g} \cdot y',$$

d. h. diese ist eine Parabel vom Parameter $\frac{c^2\cos^2\alpha}{g}$.

Für $\alpha = 90^0$ erhält man den Vertikalwurf nach oben, $y = -ct + \frac{g}{2}t^2$, für den $W = 0$ und $H = \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$ ist; man nennt die bei der Geschwindigkeit c im Vertikalwurf nach oben erreichte Wurfhöhe (Steighöhe) auch wohl **Geschwindigkeitshöhe**, sie ist das Maximum für H bei veränderlichem α.

Für $\alpha = 45^0$ erhält man den Wurf der maximalen Wurfweite $W = \frac{c^2}{g}$, dessen H den Wert $\frac{1}{4}\frac{c^2}{g}$ hat; hier ist W die doppelte und H die halbe Geschwindigkeitshöhe.

Für $\alpha = 0^0$ erhält man den Horizontalwurf $x^2 = \frac{2c^2}{g} \cdot y$, für welchen $W = 0$ und $H = 0$ ist.

Soll ein Punkt Z, dessen Koordinaten a und b sind, durch den Wurf oder Schuß getroffen werden, so muß für die Stelle Z zugleich gelten $x = a$ und $y = b$, d. h. man hat:

$$b = -a\,\mathrm{tang}\,\alpha + \frac{g}{2}\frac{a^2}{c^2\cos^2\alpha}.$$

Bei gegebenem α ist durch diese Gleichung **ein** bestimmter Wert von c bestimmt, die erforderliche **Anfangsgeschwindigkeit** des Wurfes oder Schusses.

Bei gegebenem c sind durch diese Gleichung **zwei** bestimmte Werte von α bestimmt, die erforderlichen **Elevationswinkel** des Wurfes oder Schusses.

Um α wirklich zu bestimmen, ersetzt man in obiger Gleichung $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ durch $1 + \tang^2 \alpha$, so daß

$$b = - a \tang \alpha + \frac{g a^2}{2 c^2} (1 + \tang^2 \alpha)$$

ist, und erhält:

$$\tang \alpha = \frac{c^2}{a g} \pm \sqrt{\frac{c^4}{a^2 g^2} - 1 + \frac{2 b c^2}{a^2 g}}.$$

Von den beiden Werten α_1 und α_2, welche hiermit bestimmt sind, entspricht der eine (—) dem Flachschusse (Rasante Flugbahn), der andere dem Bogenschusse (Vertikalfeuer, von oben).

Wird die Quadratwurzel imaginär, so ist unter den gegebenen Verhältnissen ein Treffen des Zieles ausgeschlossen. Die Grenzlagen der erreichbaren Ziele bestimmt der Nullwert der Quadratwurzel, dem die Gleichung entspricht:

$$a^2 = \frac{2 c^2}{g} \left(b + \frac{c^2}{2 g} \right).$$

Diese stellt für a und b als Koordinaten eine, symmetrisch zur Vertikalen verlaufende Parabel dar, deren Scheitel in Fig. 106 in der Entfernung $\frac{c^2}{2 g}$ über dem Punkte O liegen würde; man nennt sie Grenzparabel. Dreht man diese Grenzparabel, welche bei gegebenem c alle möglichen diesem Werte entsprechenden Wurfbahnen umhüllt, um die Y-Achse, so entsteht ein Rotations-Paraboloid. Alle Punkte, welche außerhalb dieses Paraboloids liegen, sind bei einer gegebenen Geschwindigkeit c nicht erreichbar, alle Punkte innerhalb dieses Paraboloids sind mit Flach- und Bogenschuß (α_1 und α_2) zu treffen, die Punkte auf dem Paraboloide selbst nur durch eine Wurfbahn ($\alpha_1 = \alpha_2$).

Für $b = 0$, d. h. innerhalb der Horizontalebene durch O ist $a^2 = \frac{c^4}{g^2}$, d. h. $a = \overset{+}{(-)} \frac{c^2}{g}$ und $\tang \alpha = + 1$, d. h. $\alpha = 45^0$, so daß also für die Horizontale das Maximum der Wurfweite bei $\alpha = 45^0$ eintritt und den Wert $\frac{c^2}{g}$ hat. Für alle Punkte innerhalb des Kreises vom Radius $\frac{c^2}{g}$ in der Horizontalebene durch O gilt:

$$\tang^2 \alpha - \frac{2 c^2}{a g} \tang \alpha + 1 = 0,$$

d. h. man hat hier $tang\,\alpha_1 + tang\,\alpha_2 = \frac{2\,c^2}{a\,g}$ und $tang\,\alpha_1 \,.\, tang\,\alpha_2 = +1$, so daß $tang\,\alpha_2 = cot\,\alpha_1$ und $\alpha_2 = 90^0 - \alpha_1$ ist.

Um die Zeit t zu bestimmen, innerhalb welcher Z erreicht wird, geht man auf die Gleichungen

$$a = c\,cos\,\alpha\,t \quad \text{und} \quad b = -\,c\,sin\,\alpha\,t + \frac{g}{2}t^2$$

zurück, deren erste für eine bestimmte Entfernung a den Wert $t = \frac{a}{c\,cos\,\alpha}$ giebt, während die zweite die beiden Werte t_1 und t_2 liefert, welche einer bestimmten Höhe b entsprechen.

Um die Geschwindigkeit in Z zu bestimmen, hat man, wie Fig. 106 zeigt, die beiden Komponenten $v_x = c\,cos\,\alpha$ und $v_y = -\,c\,sin\,\alpha + g\,t$ für $t = \frac{a}{c\,cos\,\alpha}$ zu vereinigen, d. h. $v_x = c\,cos\,\alpha$ und $v_y = -\,c\,sin\,\alpha + \frac{g\,a}{c\,cos\,\alpha}$. Statt dessen kann man auch $[c]$ mit $[g\,t]$ für $t = \frac{a}{c\,cos\,\alpha}$ vereinigen, wie gleichfalls Fig. 106 zeigt. Man erhält in jedem Falle

$$v^2 = c^2 - 2\,a\,g\,tang\,\alpha + \frac{a^2\,g^2}{c^2\,cos^2\,\alpha},$$

während der Winkel ε von $[v]$ gegen die Vertikale durch $sin\,\varepsilon = \frac{v_x}{v}$ und $cos\,\varepsilon = \frac{v_y}{v}$ gegeben ist.

Da aber $b = -\,a\,tang\,\alpha + \frac{g}{2}\frac{a^2}{c^2\,cos^2\,\alpha}$ ist, so hat man auch kürzer:

$$v^2 = c^2 + 2\,g\,b.$$

Da $[v]$ die Richtung der Tangente in Z hat, so ist die Tangentialbeschleunigung j oder j_T durch $g\,cos\,\varepsilon$ und die Normalbeschleunigung j_N durch $g\,sin\,\varepsilon$ gegeben, so daß die Gleichung

$$j_N = g\,sin\,\varepsilon = \frac{v^2}{\varrho}$$

zu

$$\varrho = \frac{v^2}{g\,sin\,\varepsilon} = \frac{v^3}{g\,v_x} = \frac{\sqrt{c^2 + 2\,g\,b}^{\,3}}{g\,c\,cos\,\alpha}$$

führt.

Dieselben Ergebnisse lassen sich auch (vergl. S. 71) mit Hülfe der Gleichung $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = j_1\,w_1 + j_2\,w_2 + \cdots$ gewinnen. Faßt man die Bahn als Grenzfall eines Streckenzuges auf, dessen einzelne Strecken $w_1, w_2, \ldots$ schiefe Ebenen darstellen, so ist für eine Strecke w_1 zu bilden $j_1\,w_1$. Dabei bedeutet j_1 die tangentiale Komponente der Gesamtbeschleunigung, welche nach Fig. 107 den Wert $g\,cos\,\varepsilon$ hat, so daß $j_1\,w_1 = g\,w_1\,cos\,\varepsilon_1$ ist. Nun kann man aber $w_1\,cos\,\varepsilon_1$ auch als Vertikalprojektion h_1 von w_1 auffassen, so daß $j_1\,w_1 = g\,h_1$ ist. Bezeichnet man die gesamte Senkung für irgend eine

Bewegung, welche nur der Beschleunigung $[g]$ unterliegt, mit h, so ist $j_1 w_1 + j_2 w_2 + \cdots = g(h_1 + h_2 + \cdots) = gh$, d. h. man hat:

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = g h \qquad 53)$$

In unserem Falle ist $v_0 = c$ und $h = b$, so daß sich wieder

$$v^2 = c^2 + 2 g b$$

ergiebt.

Will man die Stellungsgleichung auf der Bahn bestimmen, so kann man (vergl. S. 69 u. f.) in bestimmter Annäherung mit der Geschwindigkeit-Zeit-linie arbeiten, indem man $t = 0, \tau, 2\tau, \ldots$ setzt und die diesem Zeitpunkte entsprechenden Geschwindigkeitswerte $c, v_1, v_2, \ldots$ aus $v_x = c \cos \alpha$ und $v_y = - c \sin \alpha + g t$ berechnet.

Fig. 107.

Zu einem genauen Ergebnisse gelangt man durch einen entsprechenden Grenzübergang. Für den Horizontalwurf ($\alpha = 0$) erhält man dabei, falls man $\frac{c^2}{g}$ durch p abkürzt,

$$s = \frac{1}{2} \frac{c t \sqrt{p^2 + c^2 t^2}}{p} + \tfrac{1}{2} p \log nat \frac{c t + \sqrt{p^2 + c^2 t^2}}{p}.$$

Ihre Ableitung führt zurück zu:

$$v = \sqrt{c^2 + g^2 t^2}$$

und man gewinnt daraus durch eine weitere Ableitung wiederum

$$j = j_T = \frac{g^2 t}{\sqrt{c^2 + g^2 t^2}} = g \cdot \frac{g t}{v} = g \cdot \frac{v_y}{v} = g \,.\, \cos \varepsilon.$$

Die Bahn des Mittelpunktes einer geworfenen oder abgeschossenen Kugel läßt sich nur dann als Parabel auffassen, wenn man vom Luftwiderstande absehen darf. Dies ist bei relativ geringen Geschwindigkeiten der Fall, wenn die Dichtigkeit des geworfenen Körpers gegenüber der Dichtigkeit der Luft relativ groß ist. So zeigen z. B. Wasserstrahlen bei Springbrunnen, beim Ausfluß aus Gefäßen u. s. w. die parabolische Bahn in ziemlicher Annäherung.

Bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes ist wieder (vergl. S. 164) der Bewegungsrichtung entgegen eine Beschleunigung $g \,.\, k \,.\, v^2$ anzusetzen, deren Komponenten nach den Achsen X und Y bezw. $g \,.\, k \,.\, v^2 \sin \varepsilon$ und $g \,.\, k \,.\, v^2 \cos \varepsilon$ sind, so daß $j_x = - g k v^2 \sin \varepsilon$ und $j_y = g \pm g k v^2 \cos \varepsilon$ ist. Eine ziemlich weitläufige Rechnung ergiebt dann für rasante (sehr flache) Flugbahnen:

$$y = - x \left(arc \alpha + \frac{1}{2 k c^2} \right) + \frac{1}{4 k^2 c^2 g} \left(e^{2 g k x} - 1 \right)$$

als Gleichung der Bahn und

$$t = \frac{1}{k c g}(e^{g k x} - 1).$$

Für eine bestimmte Wurfweite W in der Horizontalen ($y = 0$) hat man dann aus der ersten Gleichung $arc\,\alpha$ gegeben.

Die Projektion des Scheitels teilt W in W_1 und W_2, so daß W_1 dem aufsteigenden Aste und W_2 dem absteigenden Aste entspricht. Man hat

$$W_1 = \frac{1}{2 g k} \log nat\,(1 + 2 c^2 k \,.\, arc\,\alpha)$$

und

$$W_2 = W - W_1$$

und findet nun die Wurfhöhe H aus der Gleichung der Bahn (y) für $x = W_1$.

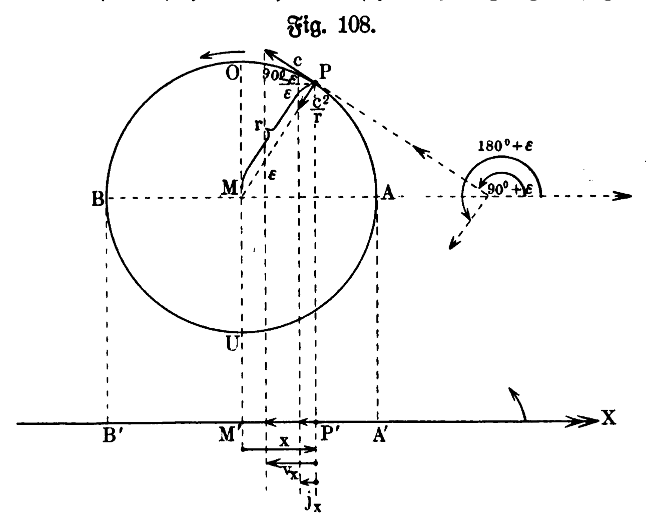
Während bei der Parabel $W_1 = W_2$ ist, hat man in Wirklichkeit stets die Beziehung $W_1 > W_2$.

Entsprechend den Betrachtungen beim freien Falle sind auch hier noch weitere Korrekturen hinzuzufügen, auch im besonderen in Bezug auf die Geschosse unserer Kanonen.

Man nennt die Wurfbahn im allgemeinen „Ballistische Linie“ und ihre Theorie „Ballistik“ [1]).

8. **Die harmonische (gleichmäßige) Schwingung auf gerader Linie.** Projiziert man eine gleichförmige Kreisbewegung auf eine Gerade ihrer Ebene, so entsteht eine harmonische Schwingung auf gerader Linie. Befindet sich W bei Beginn der Bewegung (vergl. Fig. 108) auf dem Kreise in A, so ist der Projektionspunkt W_x bei Beginn der Bewegung in A' und geht dann von A' über M' nach B' und von B' über M' nach A', während W selbst den Kreis von A über O nach B und von B über U nach A durchläuft. Jedem vollen Umlauf von W auf dem Kreise entspricht eine volle Schwingung (Doppelschwingung) von W_x auf der Geraden $M'X$.

Fig. 108.



---

[1]) Vergl. Cranz, Kompendium der Ballistik. Leipzig, 1896.

Der Stellung P von W, für welche $\sphericalangle PMA = \varepsilon$ ist, entspricht die Stellung P' von W_x, für welche $s_x = x = M'P'$ ist.

Man hat demnach: $s_x = x = + r \cos \varepsilon$.

Konstruiert man in P die Geschwindigkeit $[c]$, so giebt deren Projektion v_x die Geschwindigkeit für W_x und man hat:

$$v_x = c \cos (90^0 + \varepsilon) = - c \sin \varepsilon.$$

Konstruiert man in P die Gesamtbeschleunigung $\left[\frac{c^2}{r}\right]$, so giebt deren Projektion j_x die Beschleunigung für W_x und man hat:

$$j_x = \frac{c^2}{r} \cos (180^0 + \varepsilon) = - \frac{c^2}{r} \cos \varepsilon.$$

Demnach gilt auch:

$$j_x = - \frac{c^2}{r^2} \cdot x = - k \cdot x$$

für $k = \sqrt{\frac{c}{r}}$, d. h. die Beschleunigung der Schwingung ist stets proportional (k) zur Entfernung (x) aus der Ruhelage (M').

Um sich von der Kreisbewegung völlig unabhängig zu machen, führt man die Dauer T eines vollen Umganges von W, welche zugleich die Dauer einer vollen Schwingung von W_x ist, ein. Wird $\widehat{AP}$ von W, bezw. $A'P'$ von W_x in der Zeit t durchlaufen, so gilt:

$$\varepsilon : 360^0 = t : T, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon = \frac{t}{T} \cdot 360^0$$

oder für Arcusmaß

$$\varepsilon : 2\pi = t : T, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon = \frac{t}{T} \cdot 2\pi.$$

Die Bewegungsgleichungen für die Schwingung sind demnach:

$$\left.\begin{aligned} x = s_x &= + r \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \\ v_x &= - c \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \\ j_x &= - \frac{c^2}{r} \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) = - \frac{c^2}{r^2} \cdot x = - k \cdot x \end{aligned}\right\} \quad 54)$$

Hier bedeutet r den größten Ausschlag nach der einen oder der anderen Seite (Amplitude), T die Dauer einer Doppelschwingung und c die größte Geschwindigkeit der Schwingung, welche für $\varepsilon = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots$, bezw. für $t = \frac{1}{4} T$, $\frac{3}{4} T, \ldots$ eintritt, d. h. dem Durchgange durch die Ruhelage M' entspricht. Die Größe $2\pi \cdot \frac{t}{T} = \varepsilon$ wird *Phase* oder auch *Phasenwinkel* genannt.

Da für die Kreisbewegung $c = \frac{2 r \pi}{T}$ ist, so sind die Größen c, r, T auch bei der Schwingung nicht voneinander unabhängig, es genügen vielmehr

zwei derselben bezw. eine derselben in Verbindung mit $k = \frac{c^2}{r^2}$ zur Bestimmung der gegebenen Bewegung.

Wählt man r und T, so ergiebt sich:

$$x = s_x = r \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

$$v_x = -\frac{2\pi r}{T} \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

$$j_x = -\frac{4\pi^2 r}{T^2} \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right).$$

In dieser Form ist v_x unmittelbar die Ableitung von s_x und j_x die Ableitung von v_x.

Die Gleichung $c = \frac{2r\pi}{T}$ liefert auch $\frac{c}{r} = \frac{2\pi}{T}$, so daß sich also

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

und

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}} \quad \dots\dots\dots \quad 55)$$

ergiebt.

Kennt man also den Proportionalitätsfaktor k in der Gleichung $j_x = -k \cdot x$, so kennt man auch die Dauer einer vollen Schwingung.

Es gilt auch die Umkehrung unserer Betrachtung: So oft für eine geradlinige Bewegung die Beschleunigung (j_x) dem Abstande (x) von einem bestimmten Punkte (M') der Geraden proportional und diesem zugewandt ($-k \cdot x$) ist, bildet sich eine harmonische Schwingung.

Die harmonische Schwingung ist eine geradlinige Centralbewegung.

Beginnt die Kreisbewegung nicht in A, sondern in O, so beginnt die Schwingung nicht in A', sondern in M', d. h. aus der Ruhelage. Läßt man bei unserer vorigen Betrachtung die Bewegung während der Zeit $t = 0 \dots \frac{1}{4}T$ außer Acht und beginnt erst von $t = \frac{1}{4}T$ an zu beobachten, so ist die Beobachtungszeit t' für $t = 0 \dots \frac{1}{4}T$ als 0 anzusehen, d. h. man hat $t' = t - \frac{1}{4}T$ und

$$x = r \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t' + \frac{1}{4}T}{T}\right)$$

$$= -r \sin\left(2\pi \cdot \frac{t'}{T}\right)$$

für die Bewegung aus der Ruhelage bei dem einmal gewählten Bewegungssinne der Kreisbewegung.

Soll der erste Ausschlag aus der Ruhelage nach rechts erfolgen, so muß man die Zeit $0 \dots \frac{3}{4}T$ außer Acht lassen und $t' = t - \frac{3}{4}T$ setzen, wobei man

$$x = +r \sin\left(\frac{2\pi t'}{T}\right)$$

erhält.

Über die Art dieser Bewegung geben schon die Betrachtungen auf S. 53 und S. 59 nähere Auskunft.

Beispiel: Bewegung der Kurbelschleife. Flutkurven. Schwingungen federnder Körper.

Mit Hülfe der Bewegungsgleichungen für die Schwingung läßt sich auch die Betrachtung für fallende Körper im Erdinnern, welche S. 162 gegeben wurde, noch etwas weiterführen. Da in Schächten $g_\varrho = \frac{\varrho}{R} \cdot g_R$ ist, so läßt sich g_ϱ mit j_x, ϱ mit x und $\frac{g_R}{R}$ mit k in unserer Betrachtung vergleichen. Stellt also $A' B'$ in Fig. 108 einen Schacht in der Erde dar, der vom Nordpol (A') zum Südpol (B') verläuft, so würde eine Kugel vom Mittelpunkte W_x in diesem bei freiem Falle fortgesetzt Schwingungen $A' M' B' M' A'$ vollführen und zwar nach dem Gesetze:

$$j_x = -k \cdot x \quad \text{für} \quad k = \frac{g_R}{R}.$$

Demnach wäre hier nach Formel 55:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_R}} = 84{,}4 \text{ Minuten}$$

und

$$c = \frac{2 R \pi}{T} = 7905 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Die Bewegung ist im übrigen genau bestimmt durch die Gleichungen:

$$x = R \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

$$v_x = -c \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

$$j_x = -\frac{g_R}{R} \cdot x.$$

Schlägt man noch einen Kreis um $A' B'$ als Durchmesser und überträgt man auf diesen die Bewegung des Kreises vom Durchmesser AB, so kann man W als Mittelpunkt einer die Erde mit der Geschwindigkeit c von A' aus umkreisenden Kugel (vergl. S. 155) ansehen und W_x als Mittelpunkt einer zugleich in den Schacht $A' B'$ von A' aus frei fallenden Kugel.

Projiziert man die ursprüngliche Kreisbewegung auf eine Achse (y), senkrecht zu x, so erhält man eine Schwingung, für welche

$$y = s_y = r \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

gilt, so daß umgekehrt die Kreisbewegung aus zwei Schwingungen

$$x = r \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \quad \text{und} \quad y = r \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

zusammengesetzt werden kann, falls man diese auf ein Koordinatensystem (x, y) bezieht, z. B. auf die Durchmesser AB und OU der Figur 108. Man

findet auch demgemäß:

$$x^2 + y^2 = r^2 \left[\cos^2\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) + \sin^2\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)\right]$$
$$= r^2.$$

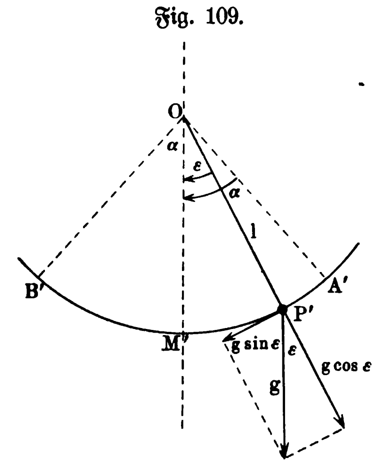
9. Die harmonische (gleichmäßige) Schwingung auf krummer Bahn. Denkt man sich die Bahn $A'B'$ von W_x beliebig verbogen, ohne daß die Bewegung auf $A'B'$ selbst geändert wird, so muß man in jedem Punkte der Bahn der Beschleunigung j_x, welche nun als $[j_T]$ aufzufassen ist, eine entsprechende Komponente $[j_N] = \left[\frac{v^2}{\varrho}\right]$ hinzufügen, und demgemäß $[j_G]$ bilden.

Giebt umgekehrt bei einer krummlinigen Bewegung die Zerlegung von $[j_G]$ in $[j_T]$ und $[j_N]$ für $[j_T]$ den Wert $-k \,.\, s$ für s als Stellung auf der Bahn, so ist die Bewegung eine harmonische Schwingung.

10. Die Bewegungen des (mathematischen) Pendels in einer Vertikalebene und in einer Horizontalebene. Wenn sich ein Punkt W unter dem Einflusse von $[g]$ auf einer Kugelfläche bewegt, so wird die Bewegung eine (mathematische) Pendelbewegung genannt. Eine Bleikugel (Rehposten), die an einem Seidenfaden im luftleeren Raume schwingt, stellt angenähert das Modell für eine solche (mathematische) Pendelbewegung dar (Fadenpendel).

Verläuft die Bewegung von W in einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Vertikalebene, so ist die Bahn von W ein Kreis, und es treten im allgemeinen sogenannte ebene Schwingungen auf einem Bogen dieses Kreises auf. Wie Fig. 109 zeigt, ist für die Lage P' von W die Stellung $\widehat{M'P'} = s = l \, arc \, \varepsilon$, während die entsprechende Tangentialbeschleunigung den Wert $g \sin \varepsilon$ hat und dem Sinne der Stellungsmessung entgegengerichtet ist.

Fig. 109.



Versucht man den Ansatz:

$$j = j_T = -k \,.\, s = -k \,.\, l \,.\, arc\, \varepsilon$$

und vergleicht man diesen mit der thatsächlichen Beziehung

$$j = -g \sin \varepsilon,$$

so ergiebt sich $k = \frac{g}{l} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{arc\, \varepsilon}$.

Demgemäß ist k keine Konstante und infolgedessen ist auch die ebene Schwingung des Pendels keine harmonische Schwingung. Da aber $\lim \left[\frac{\sin \varepsilon}{arc\, \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = 1$ ist, so nähert sich k dem konstanten Werte $\frac{g}{l}$ unbegrenzt mit abnehmendem Winkel ε und demgemäß darf auch die ebene Schwingung

des Pendels für relativ kleine Winkel ε angenähert als harmonische Schwingung betrachtet werden. Ersetzt man demgemäß $sin\,\varepsilon$ durch $arc\,\varepsilon$, so erhält man

$$k = \frac{g}{l}$$

und man hat nach Formel 55:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 56)$$

als Ausdruck für die Dauer T einer vollen Schwingung eines solchen Pendels, welcher also unabhängig ist von dem Ausschlagswinkel $\measuredangle\, M'O\,A' = \measuredangle\, M'O\,B' = \alpha$.

Ist die Ersetzung von $sin\,\varepsilon$ durch $arc\,\varepsilon$ nicht zulässig, so gilt für T die verbesserte Formel:

$$\left.\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,[1 + K] \\ \text{und} \quad K &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 sin^6\frac{\alpha}{2} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad 57)$$

Für K gilt die Tabelle:

$$\begin{array}{ll} \alpha = 1^0 & K = 0{,}000019 \\ \alpha = 5^0 & K = 0{,}000476 \\ \alpha = 10^0 & K = 0{,}001907 \end{array}$$

Die Zulässigkeit des Ersatzes von $sin\,\varepsilon$ durch $arc\,\varepsilon$ ist natürlich von Fall zu Fall im Hinblick auf die Genauigkeit, deren man bedarf, zu entscheiden (vergl. die Tafeln für $sin\,\varepsilon$ und $arc\,\varepsilon$).

Wählt man statt des Kreisbogens als Bahn für W einen Cykloidenbogen, so ist eine Verbesserung der Formel für T nicht nötig (Isochronismus). Um demgemäß ein Pendel zu konstruieren, hängt man eine Kugel an einem Faden zwischen zwei symmetrischen cykloidisch-cylindrischen Backen auf, so daß sich der Faden auf diesen beim Pendeln stetig auf- und abwickelt. Der Mittelpunkt der Kugel beschreibt dabei einen Cykloidenbogen, und es gilt in aller Strenge (vergl. Anwendung 7 des 2. Abschnittes):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Aus der Formel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

folgt

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{T^2}$$

und demgemäß kann g durch Beobachtung von Pendelschwingungen, bei denen l und T festgestellt wird, bestimmt werden.

Thatsächlich verdankt man die genaue Kenntnis von g für die verschiedenen Punkte der Erdoberfläche, sowie in Schächten und im Luftraume der Beobachtung von Pendelschwingungen.

Die Besselsche Methode für die Bestimmung von g benutzt thatsächlich einen Apparat, welcher angenähert als mathematisches Pendel zu bezeichnen ist[1]).

Ein Pendel, das für einen Hingang oder einen Hergang (halbe Schwingung) gerade 1″ braucht, heißt Sekundenpendel. Da hier $T = 2''$ ist, so ist die Länge l_0 des Sekundenpendels gegeben als

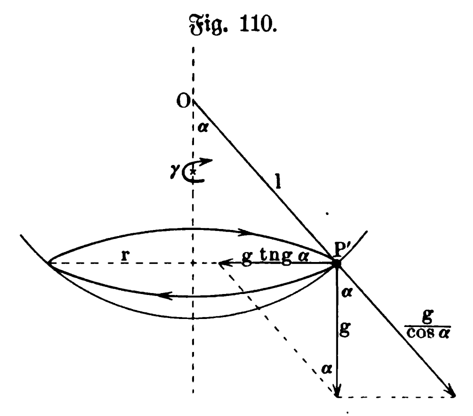
$$l_0 = \frac{g}{\pi^2} \quad \text{. . . . . 58)}$$

Man hat z. B. für Berlin $l_0 = 0{,}994224$ m, für Paris $l_0 = 0{,}993856$ m.

In der ausländischen Litteratur wird oft die halbe Schwingung durch T bezeichnet, so daß dann $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ gilt und die volle Schwingung als Doppelschwingung erscheint.

Unter den Bewegungen eines Punktes W unter dem Einflusse von $[g]$ auf einer Kugelfläche läßt noch ein anderer Fall eine einfache Behandlung zu. Beschreibt ein Fadenpendel gleichförmig den Mantel eines geraden Kreiskegels, dessen Achse die Ruhelage des Pendels ist, so bewegt sich der Mittelpunkt der Pendelkugel in einer Horizontalebene. Bei diesem konischen Pendel (Centrifugalpendel) ist die Bahn von W ein Horizontalkreis, der gleichförmig durchlaufen wird. Zerlegt man (vergl. Fig. 110) die Beschleunigung $[g]$ in der Richtung des Fadens und senkrecht zur Ruhelage des Pendels in die Komponenten $\left[\frac{g}{\cos\alpha}\right]$ und $[g \operatorname{tang} \alpha]$, so liefert $[g \operatorname{tang} \alpha]$ die nötige Normalbeschleunigung der Kreisbewegung. Diese hat für eine Winkelgeschwindigkeit γ und einen Abstand r den Wert $r\gamma^2$, so daß

Fig. 110.



$$g \operatorname{tang} \alpha = r\gamma^2$$

und demnach $(r = l \sin \alpha)$

$$\gamma^2 = \frac{g}{l \cos \alpha} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{g}{l\gamma^2}$$

ist.

Für die Umlaufszeit T hat man:

$$T = \frac{2\pi}{\gamma} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}} \quad \text{. . . . . . . 59)}$$

[1]) Vergl. Wernicke, Grundzüge 2c., S. 397 u. f.

Die Lineargeschwindigkeit c für die Kreisbewegung beträgt:

$$c = r\gamma = \sin\alpha \sqrt{\frac{lg}{\cos\alpha}}.$$

11. Die elliptische Schwingung. Projiziert man die gleichförmige Kreisbewegung nicht, wie es in Nr. 8 geschah, auf eine Gerade ihrer Ebene, sondern auf eine zweite Ebene, so entsteht im allgemeinen eine elliptische Schwingung. Ist α der Neigungswinkel der beiden Ebenen, so ist die große Achse der Ellipse $2a = 2r$, während ihre kleine Achse $2b = 2r\cos\alpha$ ist. Die Betrachtungen der Projektionsmethode (S. 103 u. f.) gelten auch für diese Projektion. Die Beschleunigung ist für die Scheitel der großen Achse

$$\frac{c^2}{r} = \left(\frac{c}{r}\right)^2 . \, r = \gamma^2 . \, a$$

und für die Scheitel der kleinen Achse

$$\frac{c^2}{r}\cos\alpha = \left(\frac{c}{r}\right)^2 . \, r\cos\alpha = \gamma^2 . \, b$$

und beträgt überhaupt für irgend einen Punkt P der Ellipse, der von dem Mittelpunkte den Abstand ϱ hat, $\left(\frac{c}{r}\right)^2 . \, \varrho = \gamma^2 \varrho$. Da die Beschleunigung außerdem stets nach dem Mittelpunkte der Ellipse gerichtet ist, so ist die elliptische Schwingung eine Centralbewegung, für welche die Beschleunigung dem Abstande vom Centrum proportional ist. Der Gleichung

$$[j_G] \stackrel{\times}{=} k \, . \, [\varrho]$$

entspricht auch hier für

$$k = \left(\frac{c}{r}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \gamma^2$$

die Beziehung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k}},$$

da $T = \frac{2\pi a}{c}$ ist.

Die größte Geschwindigkeit c tritt in den Scheiteln der kleinen Achse auf, da hier die Geschwindigkeit der Kreisbewegung unverkürzt projiziert wird; die kleinste Geschwindigkeit $c\cos\alpha = c \cdot \frac{b}{a}$ tritt in den Scheiteln der großen Achse auf.

Führt man die Flächengeschwindigkeit $C = \frac{ab\pi}{T}$ ein, so gilt für einen Scheitel der kleinen Achse

$$\tfrac{1}{2} bc = C, \quad \text{d. h.} \quad c = \frac{2C}{b}.$$

Demgemäß ist:

$$k = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{4C^2}{a^2b^2} \quad \text{und} \quad [j_G] \stackrel{\times}{=} \frac{4C^2}{a^2b^2} \cdot [\varrho].$$

Steht die Ebene der Kreisbewegung senkrecht auf der Ebene, welche die Projektionsbewegung aufnimmt, so geht die elliptische Schwingung in eine harmonische Schwingung auf gerader Linie über ($b = 0$).

Wie die Kreisbewegung aus zwei Schwingungen von den Gleichungen

$$x = r \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \text{ und } y = r \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

erwächst, so entsteht die elliptische Bewegung aus zwei Schwingungen von den Gleichungen

$$x = a \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \text{ und } y = b \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right),$$

denn man hat hier

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) + \sin^2\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)^2 = 1.$$

12. **Die reguläre Wellenbewegung.** Wenn der Reihe nach alle Punkte einer Geraden nacheinander dieselbe geradlinige harmonische Schwingung (von bestimmt gerichteter Bahnstrecke) aus der Ruhelage ausführen und zwar so, daß die Zeit, welche für je zwei Punkte der Geraden zwischen den Anfängen ihrer Bewegungen liegt, deren Entfernung proportional ist, so beschreibt die Gesamtheit der Punkte der Geraden (Punktreihe) eine reguläre Welle. Stellt man sich vor, daß jeder Punkt nach Ablauf seiner ersten Schwingung in eine zweite, dritte u. s. w. von genau derselben Art eintritt, so folgt der ersten Welle eine zweite, dritte u. s. w.; man nennt dann die Gesamtheit dieser Wellen eine reguläre Wellenbewegung.

Fällt die Bahnstrecke der Schwingungen in die Gerade, so heißt die Welle longitudinal; steht sie senkrecht zu ihr, so heißt die Welle transversal.

Beginnt ein Punkt O der Geraden im Nullpunkt der Zeitmessung seine Schwingungen gemäß der Gleichung $s = r \, . \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$, so gilt für einen Punkt P der Geraden, welcher nach Ablauf der Zeit z seine Schwingung beginnt ($z < T$), die Bewegungsgleichung $s = r \sin\left(2\pi \cdot \frac{t'}{T}\right)$, falls $t = z + t'$ gesetzt wird. Für $OP = x$ ist der Voraussetzung gemäß $\frac{x}{z}$ eine Konstante, welche c heißen mag, so daß sich $z = \frac{x}{c}$ und $t = \frac{x}{c} + t'$ ergiebt.

Demnach ist die Bewegungsgleichung für P darstellbar als

$$s = r \, . \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right)\right] \quad \cdots\cdots \quad 60)$$

Dies ist die sogenannte Wellengleichung, in welcher r und T bezw. Amplitude und Dauer der einzelnen Schwingung bezeichnen, während c die Geschwindigkeit des Fortschreitens der Bewegung auf der Geraden darstellt, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung. Geht man von der einzelnen Welle zu einer dauernden Wellen-

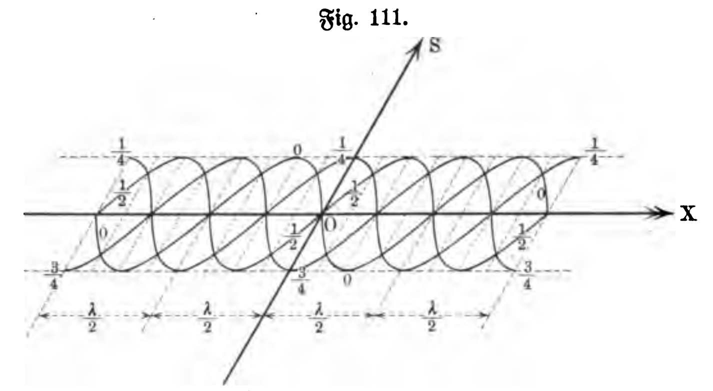
bewegung über, so wird die Betrachtung unabhängig von der Bedingung $z < T$.

Unter dieser Voraussetzung haben alle Punkte P, für welche

$$\frac{x}{c\,T} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ist, zu derselben Zeit t, auf ihren Bahnen dieselbe Stellung s. Trägt man also von O aus nach rechts und nach links die Strecken $c\,T$, $2\,c\,T, \ldots$ auf, so bezeichnen deren Endpunkte solche Punkte der Geraden, die sich stets mit O in demselben Bewegungszustande befinden. Da O aber in letzter Hinsicht

Fig. 111.



ein willkürlich gewählter Punkt der Geraden ist, so gilt überhaupt, daß sich Punkte von dem Abstande $c\,T, 2c\,T, \ldots$ stets in demselben Bewegungszustande befinden.

Man nennt $c\,T = \lambda$ die Wellenlänge und gewinnt so die Vorstellung, daß die Wellenbewegung immer während der Zeitdauer T einer Schwingung mit der Geschwindigkeit c um eine Wellenlänge vorrückt.

Fig. 111 stellt für eine Neigung von 60^0 zwischen der Geraden und der Bahnstrecke der Schwingung eine Welle dar und zwar zu den Zeiten $t = 0$, $t = \frac{1}{4}\,T$, $t = \frac{1}{2}\,T$, $t = \frac{3}{4}\,T$.

Man hat dazu z. B. für $t = 0$ aus

$$s = r\,sin\left(-\,2\,\pi\,\frac{x}{\lambda}\right)$$

eine Tabelle zwischen x und s zu entwickeln, welche nebenstehende Gestalt hat.

x	s
0	0
$\frac{\lambda}{8}$	$-\,0{,}71\,r$
$\frac{\lambda}{4}$	$-\,r$
$\frac{3\,\lambda}{8}$	$-\,0{,}71\,r$
$\frac{\lambda}{2}$	0
$\frac{5\,\lambda}{8}$	$+\,0{,}71\,r$
$\frac{3}{4}\,\lambda$	$+\,r$
$\frac{7}{8}\,\lambda$	$+\,0{,}71\,r$
λ	0

13. Vereinigung zweier regulärer Wellen von verschiedener Amplitude auf einer Geraden. Lagern sich zwei Wellenbewegungen, welche in c und λ und demnach auch in $T = \frac{\lambda}{c}$ übereinstimmen, auf derselben Geraden übereinander, so ist vor allem zu unterscheiden, ob die Bahn=

strecken der Schwingungen für beide Bewegungen gleiche oder verschiedene Richtung haben, außerdem auch, ob die Wellen miteinander oder gegeneinander verlaufen. Bei gleicher Richtung der Bahnstrecken vereinigen sich zwei Wellen von gleichem Verlaufe zu einer neuen Welle, während bei entgegengesetztem Verlaufe Interferenzen (z. B. Knoten und Bäuche der Kundtschen Staubfiguren) auftreten. Die ganze Bewegung geht in der Ebene vor sich, welche durch die Gerade und die Richtung der Bahnstrecke bestimmt wird. Bei verschiedener Richtung der Bahnstrecken bewegt sich ein Punkt der Geraden in der durch seine Ruhelage und durch die Richtungen der beiden Bahnstrecken bestimmten Ebene und vollführt in dieser im allgemeinen elliptische Schwingungen. Die ganze Bewegung geht nicht mehr in einer Ebene vor sich.

Die Grundlage für alle diese Betrachtungen bildet gemäß Fig. 112 folgendes: Beginnt die erste Wellenbewegung zur Zeit $t = 0$ in O_1, so gilt für die Schwingung von O_1 die Gleichung $s = r_1 \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$. Schreitet diese Welle fort bis zum Punkt P, so gilt für die Schwingung dieses Punktes, falls man $O_1 P = x_1$ setzt, zunächst die Gleichung:

Fig. 112.

$$s_1 = r_1 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)\right].$$

Beginnt die zweite Wellenbewegung zur Zeit $t = 0$, in O_2, so gilt für die Schwingung von O_2 die Gleichung $s = r_2 \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$. Schreitet diese Welle fort bis zum Punkte P, so gilt für die Schwingung dieses Punktes, falls man $O_2 P = x_2$ setzt, ferner die Gleichung:

$$s_2 = r_2 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)\right].$$

Liegt nun P außerhalb der Strecke $O_1 O_2 = e$, so wird er von zwei Wellen gleichen Verlaufes getroffen; liegt er innerhalb der Strecke $O_1 O_2$, so wird er von zwei Wellen verschiedenen Verlaufes getroffen. Für den ersten Fall gilt $e = \pm (x_1 - x_2)$, während für den zweiten $e = x_1 + x_2$ ist. Sieht man O_1 als den Anfangspunkt der Koordinaten x an, so ist im ersten Falle bei unserer Zeichnung, wo $x_1 > x_2$ ist, $x_2 = x_1 - e$ und im zweiten Falle $x_2 = e - x_1$ zu setzen. Demnach ist im ersten Falle P zugleich den beiden Verlegungen

$$s_1 = r_1 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)\right] \quad \text{und} \quad s_2 = r_2 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 - e}{\lambda}\right)\right]$$

und im zweiten Falle zugleich den beiden Verlegungen

$$s_1 = r_1 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)\right] \quad \text{und} \quad s_2 = r_2 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e - x_1}{\lambda}\right)\right]$$

unterworfen.

Bei gleicher Richtung der Bahnstrecken ist im ersten Falle die Gesamtverlegung von P darstellbar als

$$s = s_1 + s_2 = R \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} + \frac{d}{\lambda}\right)$$

und zwar sind R und d durch das Fresnelsche Parallelogramm (vergl. Fig. 113) bestimmt, von dem hier r_1, r_2 und $\measuredangle \frac{2\pi e}{\lambda}$ gegeben ist.

Es entsteht also eine neue Welle von der Amplitude R, für welche außerdem unter dem Sinus statt der Werte von s_1 und s_2 der Wert $\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} + \frac{d}{\lambda}$ eingetreten ist (Phasenänderung!).

Bei gleicher Richtung der Bahnstrecken ist im zweiten Falle die Gesamtverlegung von P für den Fall $r_1 = r_2$ darstellbar als

$$s = s_1 + s_2 = R \,.\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e}{2\lambda}\right).$$

Dabei ist $R = 2r\cos\left[\pi \cdot \left(\frac{2x_1 - e}{\lambda}\right)\right]$, d. h. abhängig von x_1, so daß also hier die einzelnen Punkte mit verschiedener Amplitude schwingen. Die Amplitude R hat ihr Minimum „Null" für $\pi\frac{2x_1 - e}{\lambda} = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$ oder für $2x_1 - e = \frac{\pm\lambda}{2}, \frac{\pm 3\lambda}{2}, \ldots$, d. h. für die Stellen:

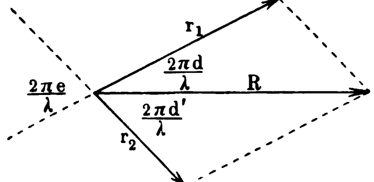
$$x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{e}{2}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Die Amplitude R hat ihr Maximum $2r$ für $\pi\frac{2x_1 - e}{\lambda} = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ oder für $2x_1 - e = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \ldots$, d. h. für die Stellen:

$$x_1 = (2n)\frac{\lambda}{4} + \frac{e}{2}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Sieht man die Mitte $\left(\frac{e}{2}\right)$ von $O_1 O_2$ als Ursprung an, so haben die Minima, welche Knotenpunkte heißen, die Lage $(2n+1)\frac{\lambda}{4}$ und die Maxima, welche Bauchpunkte heißen, die Lage $(2n)\frac{\lambda}{4}$, die Mitte selbst entspricht einem Maximum.

Fig. 113.



Der Sinus, welcher $s = s_1 + s_2$ bestimmt, ist unabhängig von x_1, d. h. alle Punkte der Geraden sind zu derselben Zeit in derselben Phase, wobei aber zu bedenken ist, daß R in der Mitte

positiv ist und es bleibt bis $-\frac{\lambda}{4}$ und $+\frac{\lambda}{4}$, von da aber bei jedem Fortgange um $\frac{\lambda}{2}$ sein Vorzeichen wechselt.

Man spricht hier von stehenden Wellen, weil die ganze Punktreihe in lauter Teile $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ zerfällt, welche durch ruhende Punkte (Knoten) begrenzt werden (Knoten und Bäuche der Kundtschen Staubfiguren!).

Wir behandeln noch die Zusammensetzung zweier Wellen von verschiedener Amplitude bei gleichem Verlaufe, wenn die Bahnstrecken der Schwingungen zu einander und zu der Geraden senkrecht stehen. In diesem Falle sind also s_1 und s_2, welche aufeinander senkrecht stehen, in einer Ebene senkrecht zur Geraden nach dem Parallelogrammprincip zu vereinigen und darum ist es zweckmäßig, s_1 durch y und s_2 durch z zu bezeichnen und die Angaben x, y, z auf ein rechtwinkeliges dreiachsiges Koordinatensystem zu beziehen. Aus

$$s_1 = y = r_1 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)\right]$$

und

$$s_2 = z = r_2 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 - e}{\lambda}\right)\right]$$

folgt nach Entwickelung des Sinus von z:

$$\left(\frac{y}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_2}\right)^2 - 2\,\frac{y}{r_1} \cdot \frac{z}{r_2} \cos\frac{2\pi e}{\lambda} = \sin^2\frac{2\pi e}{\lambda}$$

als Gleichung für y und z, d. h. die Bahn ist ein Kegelschnitt und zwar wegen der Begrenzung der Bewegung eine Ellipse.

Wenn e eine ungerade Anzahl von Viertelwellenlängen beträgt, so geht obige Gleichung über in:

$$\left(\frac{y}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_2}\right)^2 = 1,$$

d. h. in diesem Falle stimmen die Achsen der Ellipse mit den Richtungen $s_1 = y$ und $s_2 = z$ überein.

Für

$$e = \cdots - \frac{7\lambda}{4}, -\frac{3\lambda}{4}, +\frac{\lambda}{4}, +\frac{5\lambda}{4}, \cdots$$

ist

$$z = s_2 = + r_2 \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)\right].$$

Für

$$e = \cdots - \frac{5\lambda}{4}, \frac{-\lambda}{4}, +\frac{3\lambda}{4} + \frac{7\lambda}{4}, \cdots$$

ist

$$z = s_2 = - r_2 \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)\right].$$

Im ersten Falle geht die elliptische Schwingung von ($y = 0$, $z = + r_2$) nach ($y = + r_1$, $z = 0$), d. h. von der positiven Halbachse OZ nach der positiven Halbachse OY, im zweiten Falle aber von ($y = 0$, $z = - r_2$) nach ($y = + r_1$, $z = 0$), d. h. von der negativen Halbachse OZ nach der positiven Halbachse OY; beide Ellipsen werden also gegensinnig durchlaufen.

Wenn e eine gerade Anzahl von Viertelwellen (= ganze Anzahl von Halbwellen) beträgt, so geht obige Gleichung über in:

$$\left(\frac{y}{r_1} \pm \frac{z}{r_2}\right)^2 = 0$$

und zwar gilt das Zeichen +, falls e eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen beträgt, und das Zeichen —, falls e eine gerade Anzahl halber Wellenlängen beträgt. In beiden Fällen sind die elliptischen Schwingungen geradlinig geworden (kleine Achse der Ellipse = 0); im ersten Falle geht die Gerade durch das zweite und vierte Feld, im zweiten Falle durch das erste und dritte Feld des Koordinatenkreuzes YOZ.

Für $r_1 = r_2$ werden die elliptischen Schwingungen zu Kreisschwingungen, während die Richtungen der geradlinigen Schwingungen die Felder halbieren.

Um von den elliptischen Schwingungen eine Anschauung zu gewinnen, geht man davon aus, daß alle Bahnen einen geraden elliptischen Cylinder bilden, dessen Achse die ursprünglichen Ruhelagen der schwingenden Punkte enthält. Die Lage der einzelnen Punkte auf diesem Cylinder zu einer bestimmten Zeit t ist zunächst dadurch bestimmt, daß zu dieser $\frac{x_1}{\lambda}$ und $\frac{x_1 + n\lambda}{\lambda}$ für n als ganze Zahl dieselben Werte y und z liefern, d. h. Punkte, welche in der Ruhelage um eine ganze Wellenlänge voneinander abstehen, haben auf ihren Ellipsen zur Zeit t dieselbe Stellung.

Geht man nun im Falle $e = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$ von der Stelle $x_1 = \lambda\frac{t}{T}$ aus, für welche $y = 0$ und $z = \pm r_2$ ist, und verfolgt man von dieser aus eine Strecke bis zur Stelle $x_1 = \lambda\frac{t}{T} - \lambda$, für welche wieder $y = 0$ und $z = \pm r_2$ ist, so erhält man auf den verschiedenen Ellipsen der Strecke $-\lambda$ der Reihe nach Lagen der verschiedenen Punkte, welche auf einer Ellipse einem vollen Umgang entsprechen würden, d. h. die Punkte bilden auf dem elliptischen Cylinder einen vollen Schraubengang.

Demgemäß bilden alle Punkte zur Zeit t eine Schraubenlinie des elliptischen Cylinders und zwar so, daß jeder Wellenlänge der Ruhelage ein voller Schraubengang entspricht.

Da nun ein Punkt während der Zeit T seine Ellipse einmal durchläuft, so dreht sich die elliptische Schraubenlinie unter Veränderung ihrer Form in dieser Zeit einmal um ihre Achse. Für $r_1 = r_2$ geht der elliptische Cylinder mit seiner Schraubenlinie in einen Kreiscylinder mit einer gemeinen Schraubenlinie über.

14. Die gleichförmige Bewegung auf der (gewöhnlichen) Schraubenlinie. Die Bewegung, welche S. 119 betrachtet wurde, soll hier im Hinblick auf die Projektionsmethode genauer untersucht werden. Die Schraubenlinie mag einen senkrecht stehenden Cylinder vom Radius r mit der Steigung $tang\, \alpha$ umlaufen. Wir legen durch den Mittelpunkt O der unteren Grundfläche des Cylinders, welche von der Schraubenlinie im Punkte A geschnitten werden mag, ein rechtwinkeliges Koordinatenkreuz XOY und zwar so, daß die positive X-Achse durch A geht und daß man, von A aus auf der Schraubenlinie fortschreitend, zunächst die positive Y-Achse, dann die negative X-Achse, dann die negative Y-Achse u. s. f. überschreitet.

Geht die Bewegung von A aus mit der Geschwindigkeit $[c]$, so ist $[c \cos \alpha]$ deren Horizontalkomponente, d. h. die Projektion der Schraubenlinie auf die Horizontalebene, welche ein Kreis vom Radius r ist, wird mit der Geschwindigkeit $c \cos \alpha$ gleichförmig durchlaufen.

Löst man diese Kreisbewegung in zwei harmonische Schwingungen auf, bezogen auf OX und OY, so erhält man für diese als Stellungsgleichungen:

$$x = r \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \text{ und } y = r \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right),$$

falls man die Umlaufszeit für den Kreis wiederum mit T bezeichnet.

Da nun $T = \frac{2 r \pi}{c \cos \alpha}$ ist, so ist $2\pi \cdot \frac{t}{T} = \frac{c \cos \alpha}{r} \cdot t$ und man erhält:

$$x = r \cos\left(\frac{c \cos \alpha}{r} \cdot t\right) \text{ und } y = r \sin\left(\frac{c \cos \alpha}{r} \cdot t\right).$$

Sieht man die Cylinderachse, dem Laufe der Bewegung entsprechend, als dritte Achse OZ an, so ist auf ihr eine gleichförmige Bewegung mit der Vertikalkomponente von $[c]$, d. h. mit $[c \sin \alpha]$ vorhanden, welcher die Gleichung entspricht:

$$z = c \sin \alpha\, t.$$

Man hat ferner:

$$v_x = -(c \cos \alpha) \sin\left(\frac{c \cos \alpha}{r} \cdot t\right)$$

$$v_y = +(c \cos \alpha) . \cos\left(\frac{c \cos \alpha}{r} \cdot t\right)$$

$$v_z = + c \sin \alpha.$$

Natürlich führt $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ wieder zurück zu c^2 und zu der Richtung α von $[c]$.

Außerdem ist:

$$j_x = -\frac{(c \cos \alpha)^2}{r} \cos\left(\frac{c \cos \alpha}{r} \cdot t\right)$$

$$j_y = -\frac{(c \cos \alpha)^2}{r} \sin\left(\frac{c \cos \alpha}{r} \cdot t\right)$$

$$j_z = 0.$$

Man hat also: $j_G = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2} = \frac{(c \cos \alpha)^2}{r}$ und zwar ist $[j_G]$

parallel zur Horizontalen ($j_z = 0$) und hat die Richtung nach der Achse (Kreisbewegung). Da die Bewegung auf der Schraubenlinie gleichförmig ist, so ist für sie $j_T = 0$ und $[j_G]$ ist demnach lediglich Normalbeschleunigung. Aus der Gleichung $j_N = \frac{v^2}{\varrho}$ folgt hier für $j_N = \frac{(c \cos\alpha)^2}{r}$ und $v = c$ die Gleichung

$$\varrho = r \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

d. h. der Radius ϱ der (ersten) Krümmung ist konstant. Fällt man von einem Punkte P der Schraubenlinie ein Lot auf die Achse und giebt man diesem die Länge $PM = \varrho$, so ist M der Krümmungsmittelpunkt für P. Macht man diese Konstruktion für alle Punkte P der Schraubenlinie, so geben die Endpunkte M eine zweite Schraubenlinie, die einem Cylinder vom Radius $\varrho - r = r \tang^2 \alpha$ angehört. Da diese dieselbe Ganghöhe $h = 2 r \pi \tang \alpha$ hat wie die erste, so ist ihre Steigung $\tang \alpha'$ bestimmt durch die Gleichung $h = 2 (r \tang^2 \alpha) \pi \tang \alpha'$, d. h. man hat $\tang \alpha \,.\, \tang \alpha' = 1$.

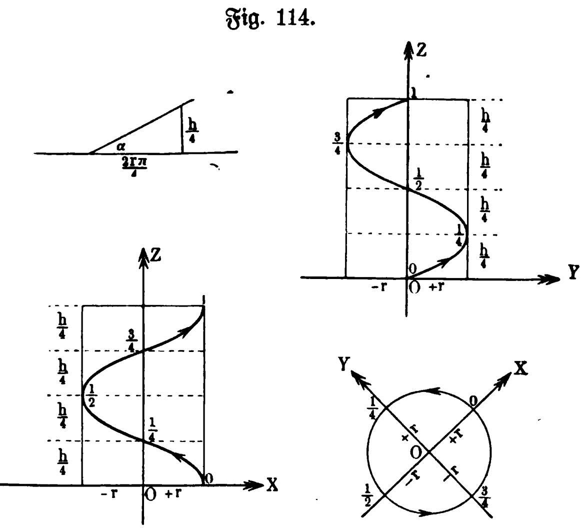
Auf der Bahn gelten natürlich die einfachen Bewegungsgleichungen:

$$s = ct$$
$$v = c$$
$$j = 0.$$

Um die Bewegung bildlich darzustellen, stellt man für $t = mT$ die Tabelle für x, y, z her, wobei zu beachten ist, daß für z die Größe $c \sin\alpha \,.\, T = h$ wird.

t	x	y	z
0	$+r$	0	0
$\frac{1}{4}T$	0	$+r$	$\frac{h}{4}$
$\frac{1}{2}T$	$-r$	0	$\frac{h}{2}$
$\frac{3}{4}T$	0	$-r$	$\frac{3h}{4}$
T	$+r$	0	h

Fig. 114.

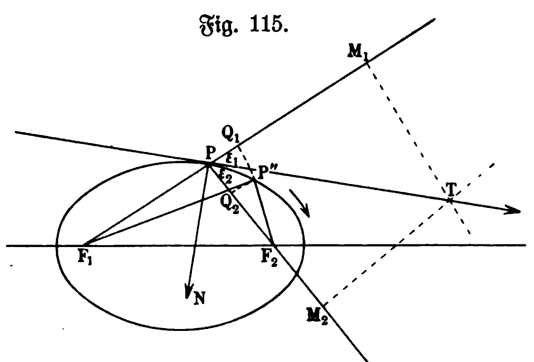


Gemäß einer solchen Tabelle, welche vorstehend angedeutet ist, entwirft man den Grundriß (x, y) und die beiden Aufrisse (x, z) und (y, z) der Bewegung, wie es Fig. 114 für $\alpha = 26^0 30'$ darstellt. Dehnt man die Tabelle aus auf v_x, v_y, v_z und j_x, j_y, j_z, so lassen sich auch Geschwindigkeit und Beschleunigung für die drei Projektionsbewegungen zu jeder Zeit leicht darstellen.

15. **Phoronomische Betrachtung von Kurven.** Da jede Linie durch Bewegung eines Punktes entstanden gedacht werden kann, so läßt sich die Phoronomie gelegentlich (vergl. S. 108 oben) auch mit Vorteil für die Untersuchung von Kurven verwenden. Wir geben dafür einige Beispiele.

I. Denkt man die Ellipse der Fig. 115 durch die bekannte Fadenkonstruktion entstanden und zwar im Sinne des gezeichneten Pfeiles, so läßt sich die Tangente in P, welche Grenzlage der Sekante PP'' ist, folgendermaßen konstruieren. Verlängert man $F_1 P$ bis Q_1, so daß $F_1 Q_1 = F_1 P''$ ist und verkürzt man $F_2 P$ bis Q_2, so daß $F_2 Q_2 = F_2 P''$ ist, so ist $PQ_1 = PQ_2$, weil $F_1 P + PF_2 = F_1 P'' + P'' F_2$ ist. Je näher P'' an P liegt, um so geringer ist die Abweichung der Strecken $Q_1 P''$ und $Q_2 P''$ bezw. von den Loten in Q_1 und Q_2 auf $F_1 Q_1$ und $F_2 Q_2$, während stets

Fig. 115.



$$PQ_1 = PQ_2$$

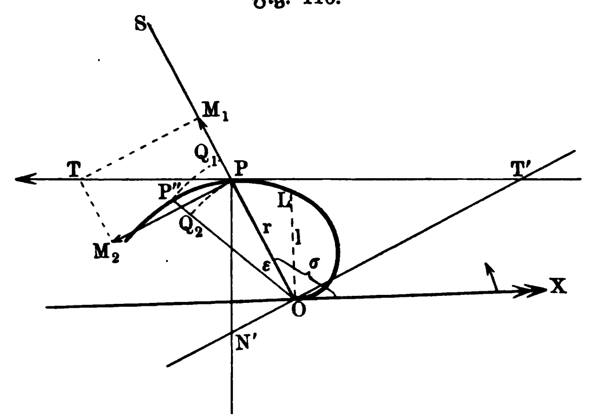
bleibt. Trägt man also von P über PQ_1 und PQ_2 dieselbe Strecke m auf, so daß man zu den Punkten M_1 und M_2 gelangt, und errichtet man ferner in M_1 und M_2 Lote bezw. zu PM_1 und PM_2, welche sich in T schneiden, so ist das Viereck $PM_1 TM_2$ eine ähnliche Abbildung des Viereckes $PQ_1 P'' Q_2$ für $\lim PP'' = 0$. Demnach ist T ein Punkt der Tangente aus P. Da $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ist, so halbieren PT und PN die Winkel der Strahlen $F_1 P$ und $F_2 P$ und es bilden PF_1, PN, PF_2, PT ein harmonisches Büschel besonderer Art (Rechtwinkeligkeit eines zugeordneten Strahlenpaares). Diese Betrachtung läßt sich ohne weiteres auf die Hyperbel und auf die Parabel übertragen.

Sie beruht darauf, daß statt der Verlegung $[PP'']$ einmal deren Komponenten $[PQ_2]$ und $[Q_2 P'']$ und dann deren Komponenten $[PQ_1]$ und $[Q_1 P'']$ betrachtet werden.

II. Die Spirale des Archimedes (vergl. S. 106) entsteht gemäß Fig. 116, wenn ein Punkt W auf einem Strahle OS von O aus mit konstanter Geschwindigkeit c vorrückt, während der Strahl selbst sich von OX aus mit konstanter Winkelgeschwindigkeit γ dreht. Ist P die Lage von W zur Zeit t, so ist $OP = r = ct$ und $\measuredangle XOP = \sigma = \gamma t$. Das Bahnstück PP'' der Spirale entsteht in der Zeit τ, indem W um $OP'' - OP = PQ_1 = c\tau$ auf dem Strahle OS fortrückt, während sich zugleich der Strahl selbst um ε dreht. Gelangt P bei der Drehung um ε nach Q_2, so ist $\widehat{PQ_2} = r\varepsilon = r\gamma\tau$. Da das Verhältnis von $PQ_1 : \widehat{PQ_2}$ stets den Wert $c : r\gamma$ oder $\dfrac{c}{\gamma} : r$ hat, und da die Strecke PQ_2 um so weniger von dem Lote

in P auf OP abweicht, je kleiner τ bezw. PP'' ist, so wird das Viereck $PQ_1P''Q_2$ für $\lim \tau = 0$ durch das Viereck PM_1TM_2 ähnlich abgebildet, wenn man $PM_1 = \frac{c}{\gamma}$ macht, dem Lote PM_2 in P auf OP die Länge r giebt und demgemäß das Parallelogramm PM_1TM_2 vervollständigt. Demnach ist T ein Punkt der Tangente aus P.

Fig. 116.



Zieht man noch $N'T'$ durch O senkrecht zu OP, so ist $\triangle PN'O \sim \triangle PTM_2$ im Verhältnisse $1:1$ und demnach

$$N'O : OP = \frac{c}{\gamma} : r$$

und

$$N'O = \frac{c}{\gamma},$$

d. h. die Polarsubnormale ist hier konstant.

Um $\frac{c}{\gamma}$ aus der Figur abzuleiten, geht man von einer bestimmten Stellung von r aus, z. B. von $r = OL = l$ für $\sigma = \frac{\pi}{2}$. Man hat dann $\frac{\pi}{2} = \gamma t$ und $l = ct$ und also $\frac{c}{\gamma} = \frac{2l}{\pi}$. In Bezug auf die Konstruktion von $\frac{2l}{\pi}$ vergl. IV. in diesem Paragraphen.

Die Betrachtung beruht darauf, daß aus dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten für die Bewegungen auf OS und um O das Parallelogramm PM_1TM_2 dargestellt wurde.

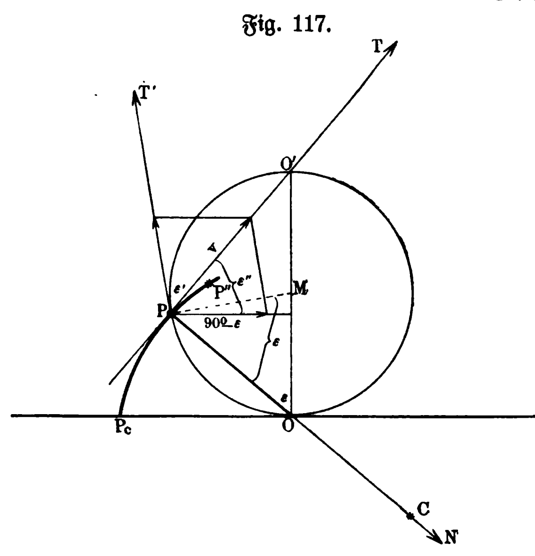
Diese Betrachtung gilt für jede Kurve, nachdem sie in Polarkoordinaten dargestellt worden ist.

III. Die Cykloide entsteht, wenn ein Kreis M auf einer Geraden P_0O rollt (vergl. Fig. 117 a. f. S.). Dabei läßt sich die Gerade P_0O als feste, der Kreis M als bewegliche Polbahn auffassen (vergl. S. 133). Der Berührungspunkt O beider Bahnen ist augenblicklicher Drehpunkt, so daß $\lim PP''$ ein Kreisbogen aus O ist, für dessen Grenzgestaltung $\measuredangle OPP'' = 90^0$ gilt. Verbindet man also P mit den beiden Endpunkten des Durchmessers OO', so ist PT Tangente und PN Normale für den Punkt P der Cykloide.

Zerlegt man die Geschwindigkeit $[v] = \lim\left[\frac{PP''}{\tau}\right]$ in P in zwei Komponenten, deren eine in die Tangente PT' des beweglichen Kreises fällt, während die andere der Geraden P_0O parallel ist, so bilden diese Komponenten mit v gleiche Winkel, da ε' als Sehnentangentenwinkel dem Peri-

pherienwinkel ε gleich ist und da ε'' mit $90^0 - \varepsilon$ einen rechten bildet. Infolgedessen sind die beiden Komponenten von $[v]$ einander gleich und haben den Wert $\frac{v}{2\cos\varepsilon}$. Geht die Drehung um O mit der Winkelgeschwindigkeit γ vor sich, so ist $v = lim\frac{PP''}{\tau} = OP.\gamma$. Da $OP = 2r\cos\varepsilon$ ist, so ist $v = 2r\gamma\cos\varepsilon$ und die Komponenten erhalten den Wert $r\gamma$, d. h. das Abrollen des Kreises auf der Geraden mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit γ läßt sich auflösen in eine zu P_0O parallele Verschiebung mit der konstanten Geschwindigkeit $c = r\gamma$ und in eine Drehung um M mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{c}{r} = \gamma$. Dieser Zerlegung entsprechend erwächst die Beschleunigung der Bewegung aus drei Komponenten (vergl. S. 136); die Beschleunigung der Drehung um M hat die Richtung PM und den Wert $r\gamma^2$, die Beschleunigung der Verschiebung ist Null,

Fig. 117.



und die Zusatzbeschleunigung $[2vr\varphi]$ ist gleichfalls Null. Demgemäß ist die Gesamtbeschleunigung der Bewegung von P nach M gerichtet und hat den Wert $r\gamma^2$. Zerlegt man sie nach den Richtungen PT und PN, so erhält $[j_N]$ den Wert $r\gamma^2\cos\varepsilon$ und $[j_T]$ den Wert $r\gamma^2\sin\varepsilon$. Die Formel $\frac{v^2}{\varrho} = j_N$ liefert

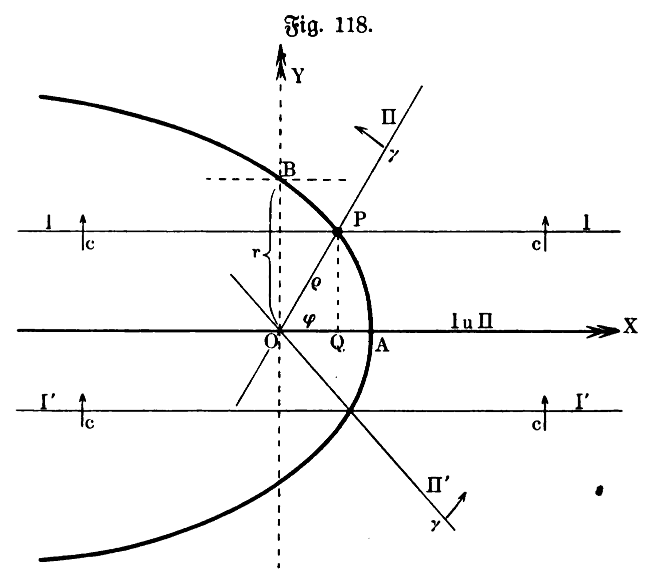
$$\varrho = \frac{4\,r^2\gamma^2\cos^2\varepsilon}{r\gamma^2\cos\varepsilon} = 4\,r\cos\varepsilon = 2\,PO,$$

so daß für $CP = 2\,OP$ der Punkt C den Mittelpunkt des Krümmungskreises für P bezeichnet.

IV. Die Kurve des Hippias entsteht als Ort der Schnittpunkte zweier sich bewegenden Geraden I und II, von denen sich die eine (I) in gleichförmiger Verschiebung (c) und die andere (II) in gleichförmiger Drehung (γ) um einen festen Punkt O befindet, falls I und II für den Durchgang der Geraden I durch den Drehpunkt O von II zusammenfallen. Geht man (vergl. Fig. 118) von der Lage OX aus, in der beide Geraden zusammenfallen, so ist I nach Ablauf der Zeit t um die Strecke ct fortgeschritten,

während sich zugleich II um den Winkel $\varphi = \gamma t$ gedreht hat. Man hat demnach für $OP = \varrho$ die Gleichung $PQ = ct = \varrho \sin \varphi = \varrho \sin(\gamma t)$.

Fig. 118.



Da $\varphi = \gamma t$ ist, so ist $t = \frac{\varphi}{\gamma}$ und $PQ = \frac{c\varphi}{\gamma}$, d. h. man hat auch:

$$\varphi \cdot \frac{c}{\gamma} = \varrho \sin \varphi \text{ und } \varrho = \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cdot \frac{c}{\gamma}.$$

Für $\lim \varphi = 0$ wird $\varrho = \frac{c}{\gamma}$, d. h. die Kurve schneidet die X-Achse im Abstande $OA = \frac{c}{\gamma}$.

Für eine Vierteldrehung $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ ist $\varrho = \frac{\pi c}{2\gamma}$; bezeichnet man diesen Wert von ϱ, welcher in Fig. 118 durch OB dargestellt ist, durch r, so ist:

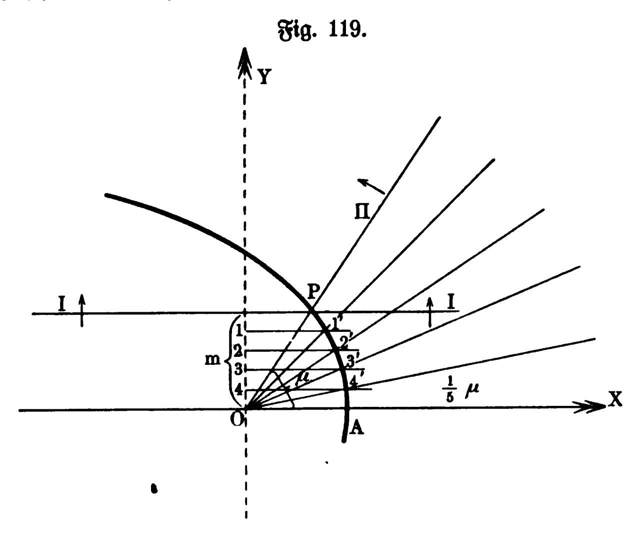
$$OA = \frac{c}{\gamma} = \frac{2r}{\pi}.$$

Demnach kann man die Strecke $OA = \frac{c}{\gamma}$ benutzen, um einen Kreis vom Radius r durch eine vierte Proportionale zu rektifizieren, man erhält nämlich für $x : 2r = 2r : \frac{2r}{\pi}$ den Wert $x = 2r\pi$. Bildet man ferner ein Dreieck mit der Grundlinie x und der Höhe r, so ist dessen Fläche $r^2\pi$, d. h. der Kreis ist damit auch quadriert. Infolgedessen heißt die Kurve des Hippias auch Quadratrix.

Sie ermöglicht außerdem die Zerlegung eines gegebenen Winkels μ in n gleiche Teile. Trägt man nämlich Winkel μ so, wie Fig. 119 (a. f. S.)

zeigt, in Fig. 118 ein, so bestimmt sein freier Schenkel auf der Kurve des Hippias den Punkt P, welchem eine bestimmte Stellung der Geraden I und II entspricht, so daß Strecke m und Winkel μ zusammengehören. Teilt man m in n gleiche Teile (z. B. $n = 5$), so geben die diesen Teilpunkten 1, 2, ... entsprechenden Lagen von I auf der Kurve die entsprechenden Teilpunkte 1′, 2′, ..., durch welche die zugehörigen Lagen von II bestimmt sind.

Fig. 119.



Für $O4 = \frac{1}{5} m$ ist $\measuredangle XO4' = \frac{1}{5}\mu$ rc.

In Parallelkoordinaten hat unsere Kurve, welche aus unendlich-vielen Zweigen besteht, die Gleichung:

$$x = y \cot\left(\frac{y}{r} \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

da $\frac{OQ}{QP} = \frac{x}{y} = \cot\varphi$ und $\varphi = \gamma t = \frac{\gamma PQ}{c} = \frac{\pi}{2r} \cdot y$ ist.

Die Tangentenkonstruktion erledigt sich leicht nach II dieses Paragraphen.

16. Cardanos geradlinige Führung einer ebenen Figur. Die Bewegung einer Figur der Ebene in dieser selbst ist durch die Bewegung einer Bewegungsstrecke $AB = l$ (vergl. S. 115) bestimmt. Weist man den Endpunkten A und B der Bewegungsstrecke zwei gerade Linien als Bahnen an, so ist damit eine bestimmte Bewegung der Figur gegeben. Sind die Geraden parallel, so ist keine weitere Untersuchung nötig; wir behandeln daher im folgenden (vergl. Fig. 120) die Bewegung für zwei sich in O unter dem Winkel λ schneidende Geraden I und II.

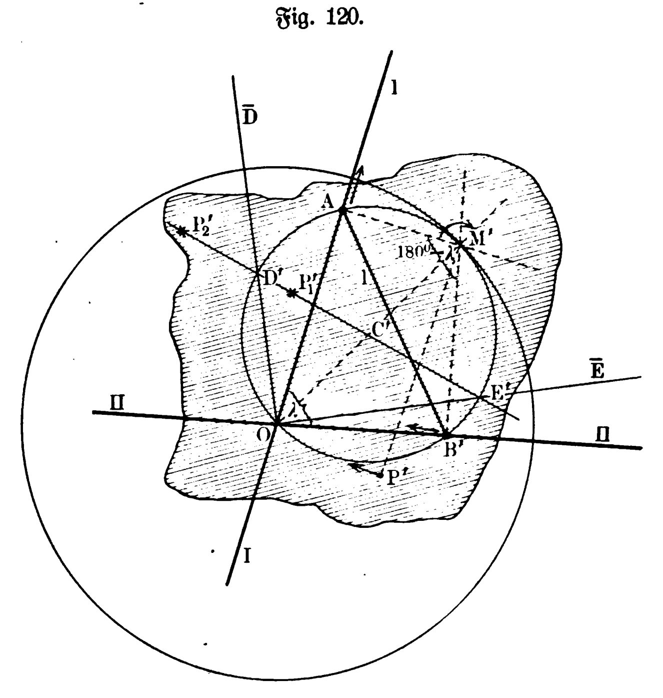
Betrachten wir nun die Bewegungsstrecke AB in einer Lage $A'B'$, so geben bezw. die Lote auf OA' und OB' in A' und B' in ihrem Schnitte M oder M' den augenblicklichen Drehpunkt für die Weiterbewegung von AB, und zwar mag dieser Punkt zunächst als Punkt der beweglichen Figur M' und als Punkt der Ebene M heißen. Da $\measuredangle A'M'B' = 180^0 - \lambda$ und da $A'B' = l$ ist, so ist von $\triangle A'M'B'$ eine Seite (l) und deren Gegenwinkel ($180^0 - \lambda$) gegeben, so daß der Scheitel M' dieses Winkels auf

dem entsprechenden Kreise vom Durchmesser $\frac{l}{\sin\lambda}$ liegen muß. Dieser Kreis geht durch O, da $A'M'B'O$ für ihn ein Sehnenviereck ist, und zwar wird $M'O$ ein Durchmesser, weil $\sphericalangle M'A'O = \sphericalangle M'B'O = 90^0$ ist.

Da nun $OM' = \frac{l}{\sin\lambda}$ ist und der Punkt M' der Figur den Punkt M der Ebene deckt, so hat M von O den Abstand $\frac{l}{\sin\lambda}$, d. h. M liegt auf einem Kreise aus O vom Radius $\frac{l}{\sin\lambda}$.

Demnach besteht die Bewegung in dem Abrollen eines Kreises vom Durchmesser $\frac{l}{\sin\lambda}$, welcher der beweglichen Figur angehört, innerhalb eines Kreises vom Radius $\frac{l}{\sin\lambda}$, welcher der festen Ebene angehört. Jeder Punkt der Figur beschreibt also eine Hypocykloide. Für das Verhältnis 1 : 2 der Radien der erzeugenden Kreise, das hier zu Grunde liegt, gehen diese Hypocykloiden in Ellipsen über, zum Teil sogar in Strecken. Betrachtet man nämlich einen Durchmesser DE des rollenden Kreises innerhalb der beweglichen Figur, so bleiben D und E während der Bewegung auf den sich schneidenden Geraden $O\bar{D}$ und $O\bar{E}$ der festen Ebene, weil $\sphericalangle D'OA'$ und $\sphericalangle B'OE'$ für jede Lage von C' bezw. über denselben Bogen $D'A'$ und $E'B'$ des rollenden Kreises stehen und darum unveränderlich sind.

Fig. 120.



Da jeder Punkt P der Figur als Punkt eines bestimmten Durchmessers des Kreises um C' aufgefaßt werden kann, so ist die Bahn jedes Punktes P bestimmt, wenn man weiß, welche Linien die Punkte einer Strecke DE bezw. die Punkte deren Verlängerung beschreiben, wenn diese auf den

Schenkeln eines rechten Winkels gleitet. Betrachtet man (vergl. Fig. 121) zunächst einen Punkt P_1 auf der Strecke DE, welche sich in der Lage $D'E'$ befindet, so gilt $\cos\delta = \frac{x}{b_1}$ und $\sin\delta = \frac{y}{a_1}$ und man hat nach Quadrieren und Addieren beider Gleichungen die Bezeichnung:

$$\frac{x^2}{b_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2} = 1.$$

Für einen Punkt P_2 auf der Verlängerung der Strecke DE gilt ebenso:

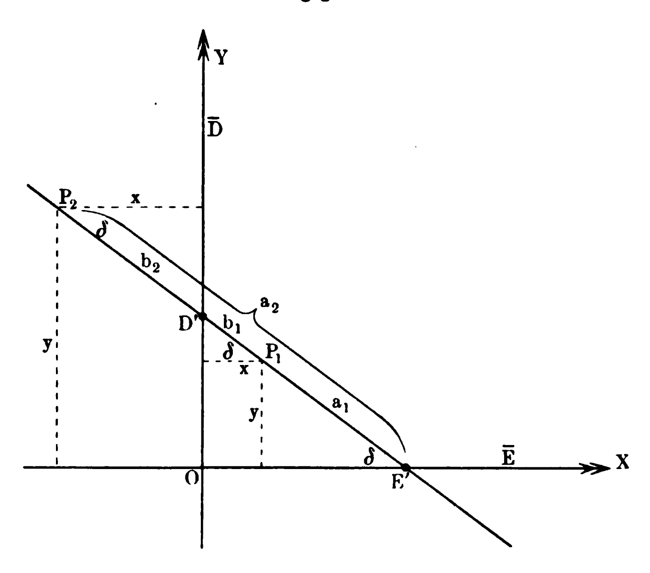
$$\cos\delta = \frac{-x}{b_2} \quad \text{und} \quad \sin\delta = \frac{y}{a_2},$$

d. h. man hat:

$$\frac{x^2}{b_2^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1.$$

Demnach beschreiben die Punkte der Strecke Ellipsen, für welche die Summe der Halbachsen den Wert $DE = \frac{l}{\sin\lambda}$ hat, während die Punkte auf der Verlängerung der Strecke Ellipsen beschreiben, für welche die Differenz der Halbachsen den Wert $DE = \frac{l}{\sin\lambda}$ hat. Der Unterschied zwischen beiden Ellipsenarten verschwindet für $b_1 = b_2 = 0$, d. h. für D, und Entsprechendes gilt auch für E, so daß die Strecken, welche D und E beschreiben, als Ellipsen mit verschwindender kleiner Achse anzusehen sind.

Fig. 121.



Um die Geschwindigkeit für einen Punkt P der Figur zu bestimmen, bezeichnen wir die Geschwindigkeit von A auf I mit v_A, so daß A während der Zeit τ den Weg $v_A\tau$ beschreibt, der für $\lim\tau = 0$ als Kreisbogen aus M' erscheint. Geschieht die Drehung um M' mit der Winkelgeschwindigkeit φ, so ist dieser Bogen zugleich $M'A'.\varphi\tau$, d. h. man hat $\varphi = \frac{v_A}{M'A'}$. Für einen Punkt P erhält demnach, der Drehung um M' entsprechend, die Ge-

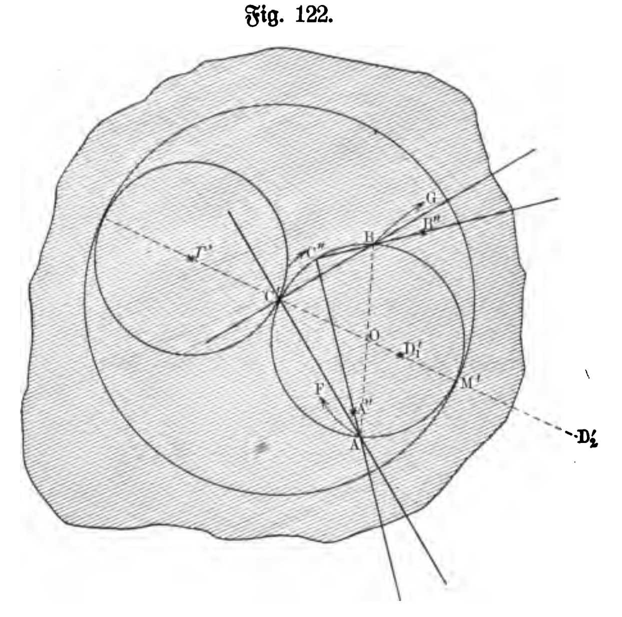
schwindigkeit $M'P.\varphi$ den Wert $\frac{M'P}{M'A'} \cdot v_A$, während deren Richtung durch ein Lot in P zu $M'P$ im Sinne der Drehung von A um M' bestimmt ist (vergl. in der Figur 120 unten den Pfeil von P', entsprechend den Pfeilen bei A' und B' und M').

Auf Grundlage vorstehender Betrachtung läßt sich eine Geradführung konstruieren. Läßt man ein cylindrisches Zahnrad (C') innerhalb eines anderen (O) vom doppelten Radius mit Eingriff laufen (Kurbelbewegung des kleineren Rades bei Verbindung der Centren durch eine drehbare Schiene), so schwingt jeder Umfangspunkt des kleineren Rades auf einer Strecke, welche so lang ist, wie der Durchmesser des größeren Rades. Diese Geradführung wurde von Cardano (1501 bis 1576) gefunden.

Anderseits kann man gemäß Fig. 121 einen Apparat zur zeichnerischen Erzeugung von Ellipsen konstruieren. Errichtet man in D' und E' bezw. Lote auf OY und OX, so schneiden sich diese wieder in einem augenblicklichen Drehpunkt M, so daß MP_1 eine Normale der Ellipse und das Lot in P_1 auf MP_1 eine Tangente der Ellipse ist.

17. Leonardos Bewegung einer ebenen Figur. Statt die Bewegung einer Figur in ihrer Ebene durch die Bewegung einer Bewegungsstrecke zu bestimmen, kann man auch anders verfahren. Ein Beispiel dafür ist die Bestimmung, daß die beiden Schenkel eines rechten Winkels (C) der Figur durch zwei feste Punkte A und B gehen. Da der Scheitel C des rechten Winkels mit A und B ein rechtwinkeliges Dreieck bildet, dessen Hypotenuse AB ist, so bewegt er sich auf einem Kreise vom Durchmesser AB. Sind (vergl. Fig. 122) nun C' und C'' zwei Lagen von C, so ist der Punkt A' des rechten Winkels, der in der Lage C' mit A zusammenfiel, in der Lage C'' nach A'' gelangt ($C'A = C''A''$) und ebenso ist der Punkt B' des rechten Winkels, der in der Lage C' mit B zusammenfiel, in der Lage C'' nach B'' gelangt ($C'B = C''B''$). Natürlich kann man unter anderem sowohl $C''A''$ als auch $C''B''$ als Bewegungsstrecke der Figur ansehen. Für $lim\, C'C'' = 0$ liegt der augenblickliche Dreh-

Fig. 122.



punkt der Überführung von C' nach C'' auf dem Durchmesser $C'M'$. Läge dieser Drehpunkt innerhalb des Durchmessers $C'M'$, wie z. B. D_1', so würde die Drehung um D_1' den Punkt A' aus A nicht nach A'', sondern auf den Bogen AF führen. Läge der Drehpunkt außerhalb des Durchmessers $C'M'$, wie z. B. D_2', so würde die Drehung um D_2' den Punkt B' aus B nicht nach B'', sondern auf den Bogen BG führen. Der Fehler der Überführungen wird um so kleiner, je näher D_1' und D_2' an M' rücken, d. h. M' ist augenblicklicher Drehpunkt.

Innerhalb der beweglichen Figur hat M von C stets den Durchmesser des Kreises um $AB = l$ als Abstand, so daß also innerhalb der Figur M auf einem Kreise vom Radius l liegt, dessen Mittelpunkt C ist.

In der festen Ebene bildet M mit den festen Punkten A und B stets einen rechten Winkel, so daß also der Kreis mit dem Durchmesser l innerhalb der festen Ebene den Ort von M bezeichnet.

Demnach besteht die Bewegung in dem Abrollen eines Kreises (C) vom Radius l, welcher der beweglichen Figur angehört, auf einem Kreise (O) vom Durchmesser l, welcher der festen Ebene angehört, und zwar bei umschließender Berührung beider Kreise.

Schlägt man innerhalb der Figur noch den Kreis mit dem Centrum Γ', welcher den festen Kreis um O in C berührt, so rollt dieser bei dem Abrollen des Kreises vom Centrum C auf dem Kreise vom Centrum O selbst auf dem Kreise O ab. Man darf also den beweglichen Kreis vom Centrum C durch einen beweglichen Kreis vom Centrum Γ ersetzen, d. h. die Bewegung läßt sich auch auffassen als das Abrollen eines Kreises (Γ) vom Durchmesser l, welcher der beweglichen Figur angehört, außerhalb eines Kreises (O) vom Durchmesser l, welcher der festen Ebene angehört. Demgemäß sind die Linien, welche ein Punkt P der Figur beschreibt, Epicykloiden, und zwar von besonderer Art, da das Verhältnis der Radien der erzeugenden Kreise $1 : 1$ ist.

Die vorliegende Betrachtung, welche auf Leonardo da Vinci (1452 bis 1519) zurückzuführen ist, hat für die Konstruktion der Ovalwerke (Ellipsendrehbank) Bedeutung, da die Relativbewegung des festen Kreises (O) gegen den beweglichen Kreis (C) zu den Ellipsen der vorigen Nr. 16 zurückführt.

18. **Foucaults Pendelversuch.** Wenn man ein Fadenpendel über dem Pole der Erde aufhängen könnte, so müßte sich dessen Ebene für Schwingungen aus der Ruhelage[1]) gegen jede bestimmte Vertikalebene des Poles in relativer Drehung befinden, falls die Erde, der gebräuchlichen Annahme entsprechend, sich um ihre Achse dreht. Für einen Beobachter auf der Erde würde die Ebene des Pendels während einer vollen Umdrehung der Erde selbst eine volle Umdrehung machen. Wenn man über einem Punkt des Äquators ein Fadenpendel aufhängt, so ist für ebene Schwingungen inner-

[1]) Andernfalls tritt, streng genommen, überhaupt keine ebene Schwingung ein, da dann durch die Drehung der Erde stets seitliche Geschwindigkeitskomponenten hinzugefügt werden.

halb der Äquatorialebene[1]) keine Drehung der Pendelebene zu beobachten, mag nun die Erde in Ruhe sein oder sich um ihre Achse drehen.

Wenn man, wie Fig. 123 andeutet, über einem Punkt P irgend eines Breitenkreises (φ) ein Fadenpendel aufhängt, so lassen sich zwar, streng genommen, unter Voraussetzung der Erddrehung überhaupt keine ebene Schwingungen herstellen, doch können Schwingungen, welche innerhalb des Meridians von P eingeleitet werden, in großer Annäherung als ebene Schwingungen gelten.

Legt man durch den Mittelpunkt M der Erde eine Achse HH', welche dem Schnitte des Meridians von P mit der Horizontalebene von P parallel

Fig. 123 a.

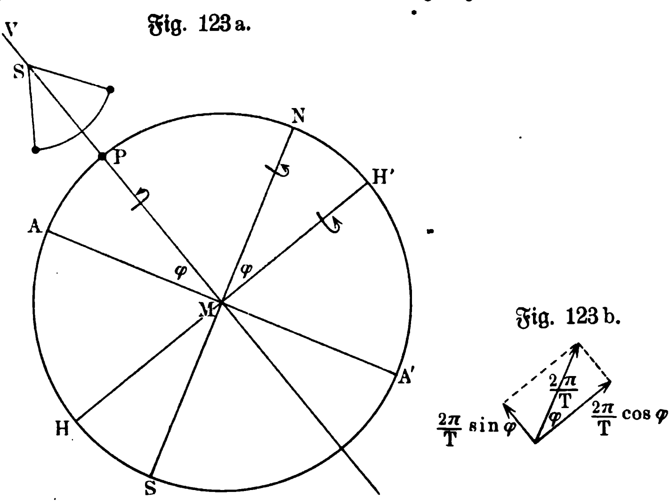


Fig. 123 b.

ist, so kann diese Achse HH' in Verbindung mit der Vertikalen MV von P für eine Zerlegung der Erddrehung um ihre Achse NS verwendet werden.

Bezeichnet man die Umlaufszeit der Erde mit T, so hat deren Winkelgeschwindigkeit für die Achse NS den Wert $\frac{2\pi}{T}$, so daß eine Zerlegung dieser Winkelgeschwindigkeit (vergl. S. 131), wie sie Fig. 123 b zeigt, für die Achsen HH' und MV bezw. die Werte $\frac{2\pi}{T} \cos \varphi$ und $\frac{2\pi}{T} \sin \varphi$ liefert.

Die Drehung um HH' dreht die Ebene des Pendels zugleich mit der Vertikalebene des Meridans von P, so daß durch sie überhaupt keine relative Lagenänderung der Pendelebene gegen irgend eine Vertikalebene von P bewirkt werden kann.

Die Drehung um MV dreht, ähnlich wie am Pole, die Horizontalebene von P gegen die Ebene des Pendels, und zwar mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi}{T} \sin \varphi$, so daß die Zeit eines vollen Umlaufes T_φ der Horizontalebene

[1]) Siehe vorstehende Anmerkung.

von P, welcher einem Beobachter in P als voller Umlauf der Pendelebene erscheint, den Wert $\frac{T}{\sin \varphi}$ hat. Aus dem Ansatze, daß an einem Orte von der Breite φ der volle Umlauf von 360^0 in der Zeit $T_\varphi = \frac{T}{\sin \varphi}$ vor sich geht, folgt die scheinbare Drehung für eine Sekunde, eine Minute u. s. w.

Für Berlin ($\varphi = 52^0\ 30'$) ist $T_\varphi = 30^h\ 10'\ 1''$ mittlerer Zeit, so daß hier auf den Tag etwa $285^0\ 36'$ und auf die Stunde etwa $15^0\ 1'$ scheinbare Drehung kommen.

Die Beobachtung dieser scheinbaren Drehung, welche zuerst (1851) von Foucault ausgeführt wurde, giebt den Beweis für die Annahme der Achsendrehung der Erde. Da die scheinbare Drehung, welche man hier beobachtet, der wirklichen Drehung der Erde entgegengesetzt ist, so dreht sich die Pendelebene auf der nördlichen Halbkugel scheinbar von Osten durch Süden nach Westen, auf der südlichen Halbkugel scheinbar von Westen durch Süden nach Osten.

Für einen auf dem Nordpole stehenden Beobachter dreht sich die Erde umgekehrt wie der Zeiger seiner Taschenuhr (Zifferblatt oben!), während deren Sinn der Drehung der Pendelebene entspricht. Geht der Beobachter, die Uhr in der Hand, auf einem Meridian nach dem Südpole, so tritt beim Überschreiten des Äquators für beide Bewegungen in Vergleich zu dem Sinne der Uhrzeigerbewegung (Zifferblatt oben!) eine scheinbare Umkehr des Sinnes ein.

Übungen zur Phoronomie.

1. Bei der Verschiebung eines starren Körpers legt ein bestimmter Punkt desselben einen Weg von 5 m zurück. Welchen Weg legt dabei irgend ein anderer Punkt des Körpers zurück?

5 m.

2. Für $\varepsilon = 3^0$ oder 10^0 oder $25^0\,17'\,3''$ oder $275^0\,20'\,47''$ ist $arc\,\varepsilon$ zu berechnen, einmal unmittelbar und einmal mit Hülfe der Tafeln für ε und $arc\,\varepsilon$, so daß eine Vergleichung beider Rechnungen und ihrer Ergebnisse stattfinden kann:

$$arc\,\varepsilon = \frac{\varepsilon}{360^0} \cdot 2\,\pi.$$

3. Für $arc\,\varepsilon = 5{,}317$ oder $2{,}681$ oder $1{,}234$ oder $0{,}012$ ist ε zu berechnen, einmal unmittelbar u. s. w. (vergl. Nr. 2.):

$$\varepsilon^0 = \frac{arc\,\varepsilon}{2\,\pi} \cdot 360^0.$$

4. Bei der Drehung eines starren Körpers legt ein Punkt des Einheitskreises einen Weg von 10 m zurück. a. Welchen Weg legt dabei ein Punkt zurück, der 5 m Abstand von der Achse hat? b. Welchem Drehungswinkel entsprechen obige Angaben?

a. 50 m. b. $572{,}96^0$.

5. Bei der Drehung eines starren Körpers legt ein Punkt, der 3 m Abstand von der Achse hat, einen Weg von 15 m zurück. a. Welchen Weg durchläuft dabei ein Punkt des Einheitskreises? b. Welchem Drehungswinkel entsprechen obige Angaben?

a. 5 m. b. $286{,}48^0$.

6. Für einen beliebigen Querschnitt ist gemäß Fig. 16a und 16b die Verschiebung und die Drehung des entsprechenden Körpers darzustellen, dabei sind die Bahnen einzelner Punkte des Querschnittes in beiden Skizzen zu vergleichen.

Für einen beliebigen Querschnitt ist ferner die Verschiebung längs einer Parabel oder Ellipse oder Hyperbel zu zeichnen.

Für die Aufgaben 7 bis 35 gelten die Gleichung $w = c\,.\,z$ und die anderen Beziehungen a. S. 46 u. 47, vergl. auch S. 66.

7. a. Welche Entfernung legt das Licht in acht Minuten zurück, wenn die Lichtbewegung als gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $300\,000 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{sec}}$ angesehen wird? b. Welche Zeit gebraucht es, um von der Sonne zur Erde zu gelangen, wenn deren durchschnittliche Entfernung zu 153 Mill. km angenommen wird?

a. 144 Mill. km. b. $8' \, 30''$.

8. Welche Entfernung hat eine Gewitterwolke, wenn zwischen dem beobachteten Blitze und Donner $9''$ vergehen, falls die Schallbewegung als gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $330 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ angesehen wird?

2970 m.

9. Für ein Geschütz, das ein Ziel in der Entfernung von 2000 m beschießt, findet man, daß der Aufschlag des Geschosses zu derselben Zeit gesehen wird, zu welcher man den Knall des Geschützes hört, wenn man 1700 m von dem Geschütze absteht? Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeit des Geschosses für $340 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ Schallgeschwindigkeit?

$400 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$.

10. In welcher Zeit durchläuft der Schall eine eiserne Röhrenleitung von 1200 m, wenn die Schallgeschwindigkeit im Eisen zu $5127 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ angesetzt wird?

Ungefähr in $0{,}23''$.

11. Welchen Zeitgewinn hat man bei Nr. 10 gegenüber der Leitung durch die Luft, wenn für diese die Schallgeschwindigkeit $340 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ beträgt?

Ungefähr $3{,}30'' = 3{,}53'' - 0{,}23''$.

12. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Punktes der Erdoberfläche:

a. am Äquator,
b. in der Breite von 60°,

für $2\,R = 12\,755$ km und $T = 86\,164''$?

a. $465 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$. b. $232{,}5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$.

13. Welcher Breite (vergl. Nr. 12) entspricht die Geschwindigkeit $150 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$?

$71^\circ \, 11'$.

14. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Luftteilchen in einer Höhe von 2 Meilen (= 7500 m) über der Erdoberfläche für eine Breite von 45°?

$$329{,}2 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

15. Wie groß würde die Geschwindigkeit eines Sohlenpunktes für einen senkrechten Schacht von 2 Meilen Senkung unter der Erdoberfläche für eine Breite von 45° sein?

$$328{,}5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

16. Ein Dampfwagen rollt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$; welchen Weg wird er nach einer halben Stunde zurückgelegt haben?

$$18000 \mathrm{~m} = 18 \mathrm{~km}.$$

17. Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Pferdes, das während 4 Stunden einen Weg von 24 000 m zurücklegt?

$$1{,}667 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

18. Ein Bote, der sich mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $1{,}5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ bewegt, soll einen Weg von 3000 m zurücklegen. In welcher Zeit kann er das ausführen?

In $33^1/_3$ Minuten.

19. Ein Kourier mache in a Stunden durchschnittlich b Meilen. n Stunden nach seiner Abreise werde ihm ein zweiter nachgeschickt, der in c Stunden durchschnittlich d Meilen macht. Der Ort, aus welchem der zweite Kourier abgeht, liege um q Meilen gegen den ersten Ort zurück oder vor. In welcher Zeit x erreicht der zweite Kourier den ersten?

$$x = \frac{nb \pm aq}{ad - cb} c \text{ Stunden.}$$

Wenn $a = 8$, $c = 10$, $b = 5^1/_3$, $d = 8$, $n = 6$, und $q = 12$

gesetzt wird und der zweite Ort gegen den ersten zurück liegt, so ergiebt sich

$$x = 120 \text{ Stunden.}$$

20. Ein auf der Oberfläche eines Flusses schwimmender Körper legt während drei Minuten einen Weg von 150 m zurück. Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeit des Körpers oder des fließenden Wassers an der Oberfläche?

$$0{,}833 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

21. Ein Mensch bewege sich auf dem Verdecke eines Schiffes mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $1{,}5\,\frac{m}{sec}$ in Richtung der Bewegung, während das Schiff selbst eine durchschnittliche Geschwindigkeit von $7\,\frac{m}{sec}$ hat. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Menschen für die als fest angenommene Erdoberfläche?

$$8{,}5\,\frac{m}{sec}.$$

22. Ein Körper bewege sich in t Sekunden von A nach B. Die beiden Punkte liegen in einer Ebene und sind durch ihre Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gegeben. Es ist hieraus die durchschnittliche Geschwindigkeit des Körpers sowie die Richtung von AB gegen die X-Achse zu finden:

$$c = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{t}$$

$$tang\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

23. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit eines horizontalen Sägegatters, das 200 Touren hat, d. h. 200 Doppelschnitte (= 400 Schnitte) in der Minute macht, wenn jeder Zug 0,75 m lang ist?

$$5\,\frac{m}{sec}.$$

24. Wie groß ist die Winkel- und die Umfangsgeschwindigkeit eines Körpers, der einen Kreis von 4 m Halbmesser in 10 Sekunden durchläuft?

$$\gamma = 0{,}628$$
$$c = 2{,}513\,\frac{m}{sec}.$$

25. Ein Mühlstein von 1,3 m Durchmesser macht 120 Umdrehungen in der Minute. Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt seines Mantels? Welche Winkelgeschwindigkeit ist vorhanden?

$$c = 8{,}168\,\frac{m}{sec},$$
$$\gamma = 4\,\pi.$$

26. An einem Göpel arbeiten zwei Pferde, an einem Zugarme von 5 m, mit einer Geschwindigkeit von $0{,}8\,\frac{m}{sec}$.

a. Welche Winkelgeschwindigkeit hat die stehende Welle des Göpels?
b. Wie viel Umdrehungen werden in einer Minute gemacht?

a. 0,16. b. 1,53 Umdrehungen in einer Minute.

27. Eine Lokomotive hat eine Geschwindigkeit von $11\,\frac{m}{sec}$ und die Trieb-

räder machen 130 Umdrehungen in einer Minute. Welchen Durchmesser hat ein Triebrad?

1,6 m.

28. a. Welche Lineargeschwindigkeit hat die Spitze eines 10 cm langen Minutenzeigers? b. Wie groß ist die entsprechende Winkelgeschwindigkeit?

a. $0{,}0175 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 0{,}000175 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

b. 0,00175.

29. Ein Mühlstein vom Radius 0,5 m hat augenblicklich die Tourenzahl $n = 200$, d. h. er macht 200 Umdrehungen in der Minute. Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit c? Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit γ?

Angenähert: $\gamma = 0{,}1 \,.\, n = 20$ und $c = r \,.\, \gamma = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Genauer: $\gamma = 20{,}933$ und $c = 10{,}467 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

30. Welchem Radius entspricht die Umfangsgeschwindigkeit $7{,}5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ bei der Tourenzahl $n = 110$?

Angenähert: $\gamma = 11$ und $r = 0{,}68$ m.
Genauer: $r = 0{,}651$ m.

31. Welcher Tourenzahl und welcher Winkelgeschwindigkeit entspricht eine Geschwindigkeit von $10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ im Abstande 2 m von der Achse?

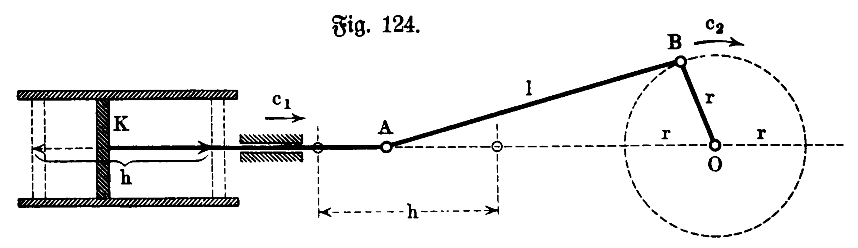
Angenähert: $\gamma = 5$ und $n = 50$.
Genauer: $\gamma = 5$ und $n = 47{,}75$.

32. Wie groß ist die durchschnittliche Kolbengeschwindigkeit, wenn der Hub, d. h. die Entfernung der beiden äußersten Kolbenstellungen, 0,45 m beträgt und der Doppelhub (d. h. ein Hingang und ein Hergang) die Zeit 3″ erfordert?

$0{,}3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

33. In Fig. 124 ist die gewöhnliche Überführung einer schwingenden Kolbenbewegung in eine Drehung skizziert, wobei der Kolbenhub h stets mit dem Durchmesser $2r$ übereinstimmt. Die durchschnittliche Kolbengeschwindigkeit c_1,

Fig. 124.



welche auch Punkt A zeigt, und die durchschnittliche Geschwindigkeit von B hängen folgendermaßen zusammen. Für eine volle Umdrehung macht A den Weg $2h$ und B den Weg $2r\pi$, so daß $c_1 : c_2 = h : r\pi = 2 : \pi$ gilt. Der Tourenzahl n entsprechen $2n$ einfache oder n Doppelhube, so daß $c_1 = \frac{n \cdot 2h}{60} = \frac{nh}{30}$ und $c_2 = \frac{n \cdot 2r\pi}{60} = nr \cdot \frac{\pi}{30} = nh \cdot \frac{\pi}{60}$ ist.

Wie groß ist c_1 und c_2 für $n = 35$ und $r = 0{,}6$ m? Wie groß ist die entsprechende durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit γ? Wie groß die Zeit T eines vollen Umlaufes (Umlaufszeit)?

$$c_1 = 1{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{sec}};\quad c_2 = 2{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{sec}};\quad \gamma = 3{,}67;\quad T = 1{,}714''.$$

34. Wie groß ist (vergl. Nr. 33) die Tourenzahl n für $h = 0{,}9$ m und $c_1 = 1{,}50\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$? Wie groß ist T? Wie groß ist c_2? Wie groß ist γ?

$$n = 50;\quad T = 1{,}2'';\quad c_2 = 2{,}35\,\frac{\text{m}}{\text{sec}};\quad \gamma = 5{,}22.$$

35. Zahnräder oder Riemscheiben, welche sich auf derselben Welle befinden, machen, wenn diese in drehende Bewegung versetzt wird, in derselben Zeit eine gleiche Anzahl von Umdrehungen, sie haben also gleiche Winkelgeschwindigkeiten. Zahnräder, die miteinander im Eingriffe, oder Scheiben, die durch Riemen verbunden sind, haben bei gehöriger Übertragung gleiche Peripheriegeschwindigkeiten. Bei einem solchen Betriebe heißt die Welle, auf welche die mechanische Kraft zunächst wirkt, die Kraftwelle, die dagegen, welche mit der zu leistenden Arbeit unmittelbar in Verbindung steht, die Lastwelle. Die dazwischen liegenden Wellen, welche zur Übertragung der Bewegung notwendig sind, heißen Vorlegewellen; diese tragen zwei Zahnräder (zwei Riemscheiben), ein getriebenes und ein treibendes, während sich auf der Kraftwelle nur ein treibendes, auf der Lastwelle ein getriebenes Rad befindet. Unter dem Umsetzungsverhältnis u zweier miteinander arbeitender Zahnräder oder Riemscheiben versteht man die Winkelgeschwindigkeit γ' des getriebenen Rades, dividiert durch die Winkelgeschwindigkeit γ des treibenden Rades. Es ist also:

$$u = \frac{\gamma'}{\gamma}.$$

Wie drückt sich u aus, wenn die entsprechenden Halbmesser r und r' oder die entsprechenden Tourenzahlen (Anzahl der Umdrehungen in der Minute) n und n' eingeführt werden?

$$u = \frac{r}{r'} = \frac{n'}{n}.$$

Wird hierin $n = 1$ gesetzt, so ist $u = n'$, d. h. das Umsetzungsverhältnis drückt die Anzahl Umdrehungen des getriebenen Rades aus, für die Zeit, in welcher sich das treibende einmal umgedreht hat.

36. Bei Zahnrädern, die miteinander arbeiten, ist die Länge des

Bogens zwischen den Mitten zweier aufeinander folgender Zähne, die Teilung genannt, gleich groß. Bezeichnen wir die Zähnezahlen in beiden Rädern mit Z' und Z, so ist diese Teilung gleich $\frac{2\pi r'}{Z'}$ und $\frac{2\pi r}{Z}$, daher

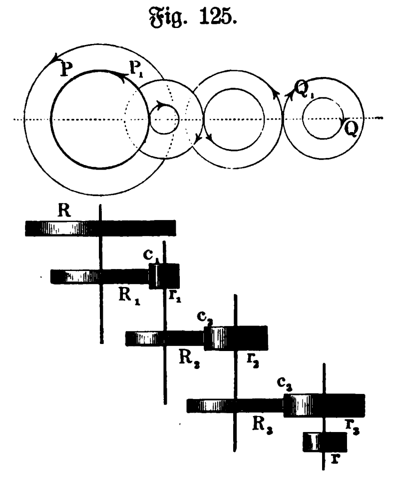
$$u = \frac{Z}{Z'}.$$

Wieviel Touren macht ein Rad von 24 Zähnen, das durch ein Rad von 108 Zähnen mit der Tourenzahl 22 getrieben wird?

$$n = 99.$$

37. Ein Zahnräder- oder Riemscheibenbetrieb (Fig. 125) bestehe aus m Wellen, die Halbmesser der treibenden Räder seien $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_{m-1}$; die der getriebenen $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{m-1}$; die in einer Minute von den Wellen gemachten Umdrehungen seien $n_1, n_2, \ldots, n_m$, und die Zähnezahlen mögen mit $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_{m-1}$ bezw. mit $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{m-1}$ bezeichnet werden. Dann ist das Umsetzungsverhältnis des ersten Scheibenpaares

Fig. 125.



$$u_1 = \frac{R_1}{r_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{Z_1}{z_1}.$$

Stellt man noch die Umsetzungsverhältnisse für die übrigen Scheibenpaare auf und multipliziert diese Gleichungen, so ist das Umsetzungsverhältnis u zwischen der ersten und letzten Welle:

$$u = u_1 \,.\, u_2 \,.\, u_3 \ldots u_{m-1} = \frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{R_2}{r_2} \cdot \frac{R_3}{r_3} \cdots \frac{R_{m-1}}{r_{m-1}}$$

$$= \frac{n_m}{n_1}$$

$$= \frac{Z_1}{z_1} \cdot \frac{Z_2}{z_2} \cdot \frac{Z_3}{z_3} \cdots \frac{Z_{m-1}}{z_{m-1}}.$$

Benutzen wir noch die erste und letzte Peripheriegeschwindigkeit der miteinander arbeitenden Zahnräder (verbundenen Riemscheiben), d. i. c_1 und c_{m-1}, so ist $c_1 = \frac{2\pi R_1 n_1}{60}$ und $c_{m-1} = \frac{2\pi r_{m-1} n_m}{60}$, daher

$$u = \frac{n_m}{n_1} = \frac{c_{m-1} \,.\, R_1}{c_1 \,.\, r_{m-1}} = \frac{c_{m-1} : r_{m-1}}{c_1 : R_1},$$

d. h.:

$$u = \frac{\text{Winkelgeschwindigkeit der Lastwelle}}{\text{Winkelgeschwindigkeit der Kraftwelle}}.$$

Ein Wasserrad, das 6 Umdrehungen in einer Minute macht, treibt einen Mahlgang, dessen Läufer 140 Umdrehungen in der Minute machen soll. Es soll eine Vorlegewelle eingeschaltet werden, so daß das Umsetzungsverhältnis vom Rade gegen diese Welle ebenso groß ist, wie von dieser gegen das Rad auf dem Mühleisen.

Das Umsetzungsverhältnis u ist hier $\frac{140}{6}$. Es ist:

$$u = \frac{140}{6} = \frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{R_2}{r_2},$$

wenn R_1 den Radhalbmesser auf der Wasserradwelle, r_2 den des Rades auf dem Mühleisen, r_1 und R_2 dagegen die Halbmesser der Räder auf der Vorlegewelle bezeichnen. Da $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$ sein soll, so ist:

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2} = \sqrt{\frac{140}{6}} = 4{,}83,$$

daher $R_1 = 4{,}83\, r_1$ und ebenso $R_2 = 4{,}83\, r_2$.

Nimmt man dagegen $R_1 = 5\, r_1$, so ergiebt sich $R_2 = \frac{14}{3} r_2$.

38. Ein Rad von 560 cm Durchmesser und der Tourenzahl 60 treibt drei Räder (Transmission) bezw. von den Tourenzahlen 140, 160, 240. Welche Durchmesser müssen diese erhalten?

240 cm; 210 cm; 140 cm.

39. Die Riemscheibe einer Drehbank soll 140 Touren machen. Welchen Durchmesser muß sie erhalten, wenn sie durch eine Riemscheibe von 42 cm Durchmesser auf einer Vorlegewelle getrieben wird, welche selbst durch eine zweite Riemscheibe von 35 cm Durchmesser mit einer Riemscheibe von 45 cm Durchmesser auf der mit 70 Touren laufenden Hauptwelle in Verbindung steht?

27 cm.

40. Gemäß Fig. 19 und 20 ist die Bewegung für die Stellungsgleichungen $s = 5 + 7t$ und $s = -5 - 7t$ darzustellen.

41. Desgl. für $s = 5 + 4t - 3t^2$.

Der Umkehrpunkt liegt für $t = \frac{2}{3}$ in $s = 6,\overline{3}\ldots$

42. Desgl. für $s = 24 - 14t - t^2 + t^3$.

Die Umkehrpunkte, in denen die Geschwindigkeit den Wert Null hat, liegen für $t_1 = 2{,}519$ in $s_1 = -1{,}63$ und für $t_2 = -1{,}853$ in $s = 40{,}13$.

43. Desgl. für $s = r \,.\, \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$, und zwar a. für $r = 2$ cm und $T = 20''$ und b. für $r = -2$ cm und $T = 20''$.

44. Desgl. für $s = r\, e^{\alpha t}$, und zwar a. bei $r = 2$ cm und $\alpha = +0{,}5$ und b. bei $r = 2$ cm und $\alpha = -0{,}5$.

45. Desgl. für $s = r e^{\alpha t} sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$, und zwar a. bei $r = 2$ cm und $\alpha = +0{,}5$ und $T = 20''$ und b. bei $r = 2$ cm und $\alpha = -0{,}5$ und $T = 20''$.

46 bis 51. Für die Beispiele 40 bis 45 ist die Durchschnittsgeschwindigkeit für die Zeitdauer von $t_1 = 3''$ bis $t_1 = 7''$ herzustellen (vergl. S. 53 und 54).

52 bis 57. Für die Beispiele 40 bis 45 ist die Geschwindigkeitsgleichung (vergl. § 7) herzustellen.

58 bis 63. Für die Beispiele 40 bis 45 ist die Durchschnittsbeschleunigung für die Zeitdauer von $t_1 = 3''$ bis $t_1 = 7''$ herzustellen (vergl. § 8).

64 bis 69. Für die Beispiele 40 bis 45 ist die Beschleunigungsgleichung (vergl. § 10) herzustellen.

Für die Aufgaben Nr. 70 bis 86 gelten die Formeln des § 9, vergl. auch S. 66.

70. Ein Körper befinde sich 10 Sekunden lang in gleichmäßig beschleunigter Bewegung mit der Beschleunigung $8\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$. Wie groß ist die Endgeschwindigkeit des Körpers nach dieser Zeit und wie groß ist der durchlaufene Weg?

$$v = jt \text{ und } s = \tfrac{1}{2} j t^2$$

$$v = 80\,\frac{\text{m}}{\text{sec}};\ s = 400\,\text{m}.$$

71. Ein Körper besitzt eine Geschwindigkeit von $7{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und wird in eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung versetzt, deren Acceleration $5{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ ist. Nach welcher Zeit hat der Körper einen Weg von 2200 m zurückgelegt?

$$s = ct + \tfrac{1}{2} j t^2$$

$$t = 26{,}9 \text{ Sekunden.}$$

72. Ein Körper, der sich in gleichmäßig geänderter Bewegung befunden, habe bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $7\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ eine Endgeschwindigkeit von $125\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erlangt und dabei einen Weg von 3250 m zurückgelegt. Wie groß war die für die Bewegung vorhandene Beschleunigung?

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2j},\ j = 2{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

73. Ein Körper bewege sich bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $100\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und einer Acceleration von $1\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ gleichmäßig verzögert und erlange eine End=

geschwindigkeit von $7\frac{m}{sec}$. Wieviel Zeit ist dazu erforderlich und welchen Weg hat der Körper zurückgelegt?

$$v = c - jt$$
$$s = ct - \tfrac{1}{2}jt^2.$$

93 Sekunden; 4975,5 m.

74. Eine Lokomotive habe in einem bestimmten Augenblicke eine Geschwindigkeit von $13\frac{m}{sec}$. Sie werde so gebremst, daß sie in jeder Sekunde $2\frac{m}{sec}$ an Geschwindigkeit verliert.

a. Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 6 Sekunden, wie groß ist der zurückgelegte Weg?

b. Nach welcher Zeit steht die Lokomotive still?

c. Wie groß muß die Geschwindigkeitsabnahme sein, damit die Lokomotive nach 30 Sekunden in Ruhe kommt?

a. $1\frac{m}{sec}$; 42 m; b. 6,5 Sekunden; c. $0{,}43\frac{m}{sec^2}$.

75. Ein Körper ist im luftleeren Raume 4 Sekunden frei gefallen. Wie groß ist die erlangte Endgeschwindigkeit, wie groß der durchfallene Weg?

$39{,}24\frac{m}{sec}$; 78,48 m.

76. Ein im luftleeren Raume frei fallender Körper hat eine Endgeschwindigkeit von $250\frac{m}{sec}$ erhalten. Wie lange ist der Körper gefallen, welchen Weg hat er zurückgelegt?

25,48 Sekunden; 3185 m.

77. Ein Körper hat im luftleeren Raume einen Weg von 85 m frei fallend zurückgelegt. Wie lange ist der Körper gefallen, welche Endgeschwindigkeit hat er erlangt?

4,1 Sekunden; $40{,}22\frac{m}{sec}$.

78. Wie hoch steigt ein Körper, der mit einer Geschwindigkeit von $40\frac{m}{sec}$ senkrecht im luftleeren Raume in die Höhe geworfen wird, und welche Zeit gebraucht er dazu?

4,07 Sekunden; 81,55 m.

79. Ein Körper, der im luftleeren Raume senkrecht in die Höhe geworfen wurde, kam nach $18^1/_2$ Sekunden zur Erde zurück. Wie groß war die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers, wie hoch war er gestiegen?

$90{,}74\frac{m}{sec}$; 419,67 m.

80. Welchen Raum durchfällt ein, in einen Brunnen senkrecht hinabgeworfener Stein, den man nach t Sekunden aufschlagen hört, wenn man den Luftwiderstand nicht berücksichtigt und die Geschwindigkeit des Schalles gleich a setzt?

$$a\,\frac{gt + a - \sqrt{2\,a\,g\,t + a^2}}{g}.$$

In Schweden giebt es Höhlen, für die $t = 25$ zu setzen ist. Wie tief sind dieselben, wenn die Geschwindigkeit des Schalles zu 340 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ gerechnet wird?

1870 m.

81. Ein Körper, der im luftleeren Raume frei fällt, hat an einem gewissen Punkte seiner Bahn eine Geschwindigkeit von 17 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, an einem tiefer gelegenen dagegen eine Geschwindigkeit von 90 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Wie groß ist die Entfernung der beiden Punkte; welche Zeit gebraucht der Körper, um dieselbe zurückzulegen?

398,11 m; 7,44 Sekunden.

82. Aus einer Höhe h fallen nacheinander zwei Wassertropfen. Der erste ist bereits d mm gefallen, ehe der zweite von demselben Orte aus zu fallen beginnt. Welche Entfernung x haben beide Wassertropfen, wenn der erste Tropfen aufschlägt, falls auf Luftwiderstand, Kapillaranziehung u. s. w. keine Rücksicht genommen wird? (Zerstäuben des Wassers in Wasserfällen.)

$$x = 2\sqrt{h\,d} - d.$$

Für $h = 400$ m und $d = 0{,}001$ mm ist $x \sim 40$ mm.

83. Ein Körper wird mit 5 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit senkrecht emporgeworfen und trifft bei 0,6 m Steighöhe ein elastisches Hindernis, von dem er ohne Verlust an Geschwindigkeit senkrecht herabprallt. a. Welche Zeit ist bei unbehinderter Bewegung für Aufsteigen und Zurückfallen nötig? b. Wie groß ist die unbehinderte Steighöhe? c. Mit welcher Geschwindigkeit wird das Hindernis getroffen? d. Welche Zeit ist für Aufsteigen und Zurückfallen bei behinderter Bewegung nötig? e. Wieviel Doppelhube (Auf- und Abstiege) erfolgen bei behinderter Bewegung in der Minute, wenn auch eine vollkommen elastische Unterlage vorausgesetzt wird?

Diese Beziehungen gelten angenähert für die Aufwurfhämmer der Eisenfabrikation, die mit ihrem Kopfe gegen einen Reitel (Holz) schlagen.

a. 0,5097″ für Aufsteigen und 0,5097″ für Zurückfallen. b. 1,274 m.

c. 3,6368 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. d. 0,1390″ für Aufsteigen und 0,1390″ für Zurückfallen.

e. 215,8.

84. Bei einer gleichmäßig-geänderten Drehung eines Körpers hat die Winkelgeschwindigkeit anfänglich den Wert 10 und nach fünf Minuten den

Wert 20. a. Welche Tourenzahlen entsprechen dem Übergange? b. Welche Winkelbeschleunigung ist anzusetzen? c. Wie groß ist der Winkelweg, wenn die Anfangsstellung (σ_0) den Wert π hat?

a. Angenähert: 100 bis 200. Genauer: 95,493 bis 190,986.

b. $\frac{1}{30}$.

c. $\sigma = \pi + 4500 = 4503{,}142$, entsprechend 716,4 Umläufen.

85. Wie heißen für Nr. 84 die Bewegungsgleichungen für einen Punkt im Abstande $r = 0{,}5$ m von der Achse?

$$b = \frac{1}{60} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$$

$$v = 5 + \frac{1}{60} t$$

$$s = 1{,}571 + 5t + \frac{1}{120} t^2$$

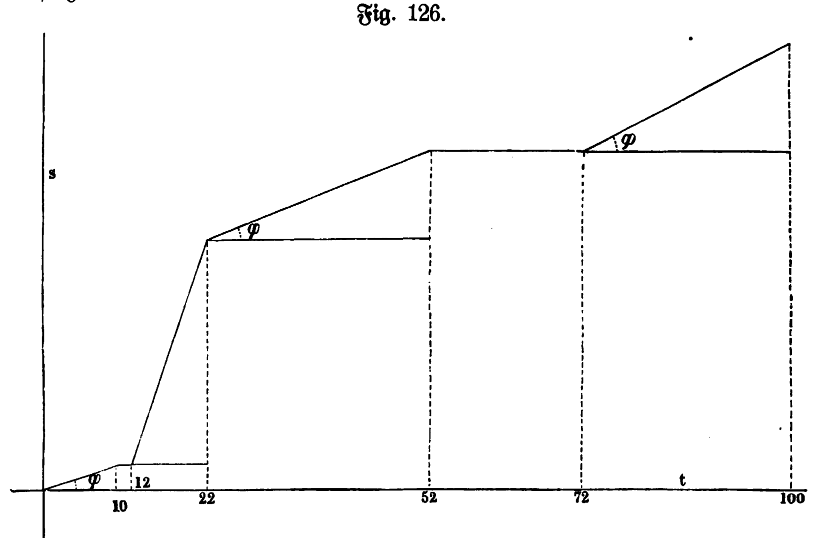
$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} 5^2 = \frac{1}{60}(s - 1{,}571).$$

86. Eine Welle, mit der Tourenzahl 100, kommt durch Bremsung in gleichmäßig-geänderter Bewegung in fünf Minuten zur Ruhe. a. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung (Verzögerung!)? b. Welchen Weg durchläuft dabei ein Punkt im Abstande 2 m von der Achse?

a. $\beta = -0{,}0349$. b. 3142 m.

87. Die Bewegung, deren Stellungsgleichung $s = 2 - 3t + 4t^2 + 5t^3 - 8t^4$ ist, soll in erster und zweiter Annäherung behandelt werden, gemäß § 11.

Fig. 126.



88 bis 95. Graphische Darstellung der Bewegungen der Nr. 40 bis 45, und der Nr. 85 und 87.

96. Die Wegkurve einer gleichförmigen Bewegung zu zeichnen, welche durch folgende Bestimmungsstücke gegeben (Fig. 126) ist.

Von $t = 0$ bis $t = 10$ ist $tang\,\varphi = \frac{1}{3}$
„ $t = 10$ „ $t = 12$ „ $tang\,\varphi = 0$
„ $t = 12$ „ $t = 22$ „ $tang\,\varphi = 3$
„ $t = 22$ „ $t = 52$ „ $tang\,\varphi = \frac{2}{5}$
„ $t = 52$ „ $t = 72$ „ $tang\,\varphi = 0$
„ $t = 72$ „ $t = 100$ „ $tang\,\varphi = \frac{1}{2}$.

Als Beispiel für die praktische Verwendung dieser Wegkurven dienen die graphischen Fahrpläne der Eisenbahnen. In Fig. 127 (a. f. S.) ist ein solcher Fahrplan der Strecke Breslau-Waldenburg dargestellt, wie er der Mitte der siebziger Jahre entsprach. Auf der X-Achse ist die Abfahrts- resp. Ankunftszeit der einzelnen Züge in Stunden angegeben; die bei den Wegkurvenstrecken stehenden Zahlen geben die zwischen den einzelnen Stunden liegenden Minuten an und beziehen sich diese auf die Ankunfts- und Abfahrtszeit bei den einzelnen Stationen. Die auf der Y-Achse stehenden Zahlen sind die Entfernungen der betreffenden Punkte in Kilometern, von Breslau aus gerechnet. Ein Schnittpunkt zweier Kurven bedeutet demnach, daß zu der dazu gehörigen Zeit zwei Züge denselben Punkt auf der Strecke erreicht haben. Die unter den Tagesstunden befindlichen Zahlen bedeuten die Nummer des betreffenden Zuges. Es finden sich in dem Fahrplane Personenzüge (———), Güterzüge (---------), Kohlenzüge (———) und zwei Extrazüge (═════) zwischen Breslau und Freiburg, welche nur jeden Sonntag zur Benutzung kamen.

97. Für den freien Fall mit veränderlichem g ist die Geschwindigkeitskurve zu zeichnen: a. für das Erdinnere, b. für den Außenraum der Erde.

Bei b. ist zunächst für ϱ sowohl v als auch t zu berechnen (vergl. S. 162 u. f.) und demgemäß v und t in Verbindung zu setzen.

98. Welche Größe erhält die Endgeschwindigkeit v und die Beschleunigung j einer geradlinigen Bewegung, für welche der Weg

$$s = 2 + \frac{5}{2}t + \frac{3}{4}t^2 + \frac{5}{8}t^3 \text{ ist? (Vergl. § 13.)}$$

$$v = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}t + \frac{15}{8}t^2$$

$$j = \frac{3}{2} + \frac{15}{4}t.$$

99. Welche Gleichungen gelten für s und j, wenn $v = 5 - \frac{3}{2}t + \frac{5}{6}t^2$ und $s_0 = 10$ ist?

Fig. 127.


km
Waldenburg 83
Altwasser 78 Anhaltspunkt
69
Freiburg 56 Station
53
Königszelt 48 Station
Saarau 42 Anhaltspunkt
Ingramsdorf 34 Anhaltspunkt
Mettkau 30 Anhaltspunkt
26
Canth 21 Station
16
Schmolz 11 Anhaltspunkt
5
Breslau 0 Station
Zeit 12 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 Stunden
Zug-Nr. 21 37 51 22 23 52 24 53 25 38 39 26 27 54 28 40
Zug-Art Extra-Züge: Personen-Züge: Kohlen-Züge: Güter-Züge:

$$s = 10 + 5\,t - \frac{3}{4}t^2 + \frac{5}{18}t^3$$

$$j = -\frac{3}{2} + \frac{5}{3}\,t.$$

100. Welche Gleichungen gelten für s und v, wenn $j = 7 - \frac{1}{3}t + 2\,t^2$ und $s_0 = 5$ und $v_0 = 2$ ist?

$$v = 2 + 7\,t - \frac{1}{6}\,t^2 + \frac{2}{3}\,t^3$$

$$s = 5 + 2\,t + \frac{7}{2}\,t^2 - \frac{1}{18}\,t^3 + \frac{1}{6}\,t^4.$$

101 bis 110. Für den Fall, daß die Bewegungen der Nr. 40 bis 45 und der Nr. 87, 98, 99, 100 auf einer Geraden oder auf einem Kreise vor sich gehen, ist der Hodograph zu zeichnen.

111. Die beiden Bewegungen $s = -3\,t + 4\,t^2$ und $s = 5\,t - 6\,t^2$ bilden ein Verschiebungssystem. Ihre Bahnen sind zwei Gerade, die sich so unter 60° schneiden, daß die positiven Halbstrahlen den Winkel von 60° einschließen. Die Bewegung ist zu behandeln.

112. Das Beispiel der Fig. 36 ist auszuführen für die Bestimmung, daß sich die Scheibe in derselben Zeit einmal um ihre Achse dreht, in der der Radius durchlaufen wird.

113. Dasselbe (vergl. Nr. 112), falls Bewegung I einen Durchmesser als Bahn hat und falls dieser in derselben Zeit durchlaufen wird, in der sich die Scheibe einmal um ihre Achse dreht.

114. Wie groß ist die Normalbeschleunigung eines Punktes, der sich in einem Kreise vom Halbmesser 4 m mit einer Geschwindigkeit von $8\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ bewegt?

$$16\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

115. Ein Punkt bewegt sich in einem Kreise, dessen Halbmesser 18 m beträgt. Die Normalbeschleunigung des Punktes mag $5\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ sein, wie groß ist die Geschwindigkeit desselben?

$$9{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

116. Ein Punkt, der eine Geschwindigkeit von $10\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ besitzt, wird durch eine Normalkraft, deren Beschleunigung $2\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ beträgt, in eine kreisförmige Bewegung versetzt. Wie groß ist der Halbmesser der Bahn?

50 m.

117. Für die parabolische Bahn eines Geschosses ist der Krümmungshalbmesser im Scheitel und in irgend einem anderen Punkte zu bestimmen, gemäß Formel 29 b. (Vergl. S. 170.)

118. Ein Punkt hat nach zwei aufeinander normalen Richtungen die Geschwindigkeiten (Beschleunigungen) von $35 \frac{m}{sec}$ und $87 \frac{m}{sec}$. Es ist die resultirende Geschwindigkeit (Beschleunigung) der Größe und Richtung nach zu bestimmen.

$93{,}77 \frac{m}{sec}$; $68^0\,5'$ mit der Geschwindigkeit von $35 \frac{m}{sec}$.

119. Man soll die einem Punkte eigene Geschwindigkeit von $120 \frac{m}{sec}$ in zwei aufeinander rechtwinklige Geschwindigkeiten zerlegen, von denen

a. die eine gleich $75 \frac{m}{sec}$ sein mag;

b. die eine einen Winkel von $34^0\,7'\,3''$ mit der resultierenden Geschwindigkeit bilden soll.

a. $51^0\,19'\,4''$ mit $75 \frac{m}{sec}$; $93{,}68 \frac{m}{sec}$.

b. $99{,}343 \frac{m}{sec}$ an dem gegebenen Winkel liegend; $67{,}306 \frac{m}{sec}$.

120. Zwei in einem Punkte wirksame Beschleunigungen von $115 \frac{m}{sec^2}$ und $89 \frac{m}{sec^2}$ bilden miteinander den Winkel $147^0\,8'\,3''$.

a. Wie groß ist die resultierende Beschleunigung?

b. Wie groß ist der Winkel, den die gegebenen Beschleunigungen miteinander bilden, wenn die resultierende Beschleunigung gleich der kleineren oder gleich der größeren der gegebenen Beschleunigungen ist?

a. $62{,}865 \frac{m}{sec^2}$ mit $89 \frac{m}{sec^2}$ den Winkel $83^0\,4'$ bildend.

b. $130^0\,14'\,44''$; $112^0\,45'\,54''$.

121. Die einem Punkte eigene Beschleunigung von $77{,}5 \frac{m}{sec^2}$ soll in zwei Beschleunigungen zerlegt werden:

a. wenn die Komponenten mit der gegebenen Beschleunigung die Winkel $35^0\,7'\,11''$ und $52^0\,9'\,8''$ bilden;

b. wenn eine der Komponenten gleich $50{,}5 \frac{m}{sec^2}$ ist und mit der gegebenen Beschleunigung einen Winkel von $36^0\,8'\,6''$ bildet;

c. wenn eine der Komponenten gleich $60{,}0 \frac{m}{sec^2}$ genommen wird und die andere noch zu bestimmende Komponente mit der gegebenen Beschleunigung den Winkel $47^0\,10'\,11''$ bildet;

d. wenn die beiden Komponenten der Größe nach gleich $46{,}2 \frac{m}{sec^2}$ und $35{,}0 \frac{m}{sec^2}$ gegeben sind.

a. $61{,}265 \frac{m}{sec^2}$, $44{,}634 \frac{m}{sec^2}$.

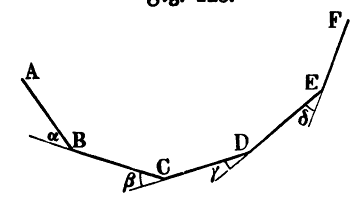
b. $47{,}27 \frac{m}{sec^2}$, $39^0\,2'\,3''$.

c. $71{,}88 \frac{m}{sec^2}$ oder $33{,}48 \frac{m}{sec^2}$, $61^0\,28'\,17''$ oder $24^0\,9'\,4''$.

d. Beide Komponenten bilden den Winkel $35^0\,4'$ und die resultierende Beschleunigung schließt mit $46{,}2 \frac{m}{sec^2}$ den Winkel $15^0\,2'\,18''$ ein.

122. Ein Körper bewege sich längs der gebrochenen Linie $ABCDEF$ (Fig. 128); α, β, γ, δ seien die Winkel, die die aufeinander folgenden Teile der Linie miteinander bilden. Der Körper habe zu Anfang der Bewegung die Geschwindigkeit c gehabt.

Fig. 128.



a. Mit welcher Geschwindigkeit v kommt der Körper nach F, wenn jedesmal die Komponente der Geschwindigkeit, senkrecht zur Bahn, in einem Eckpunkt verloren geht?

b. Welches Ergebnis tritt bei einem regelmäßigen n-Eck ein für $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \frac{\omega}{n}$, falls $\lim n = \infty$ ist?

a. $v = c \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \cos\delta$.

b. $v = c$.

123. Auf einem Flusse, der mit einer Geschwindigkeit $c_1 = 1 \frac{m}{sec}$ fließt, erhält ein Kahn durch Ruderer eine Geschwindigkeit $c_2 = 1{,}3 \frac{m}{sec}$, welche mit der Stromgeschwindigkeit einen Winkel von 150^0 bildet. Es ist die Größe und Richtung der resultierenden Geschwindigkeit c zu bestimmen:

$$c = 0{,}66 \frac{m}{sec}$$
$$\varphi_1 = 100^0\,57'$$
$$\varphi_2 = 49^0\,3'.$$

124. Ein Punkt besitze nach vier in einer Ebene liegenden Richtungen die Geschwindigkeiten (Beschleunigungen) $12 \frac{m}{sec}$, $24 \frac{m}{sec}$, $36 \frac{m}{sec}$, $48 \frac{m}{sec}$, die mit einer, durch den Punkt gezogenen Linie, der X-Achse, nach der Reihe die

Winkel 16°, 29°, 33°, 75° bilden. Es ist die resultierende Geschwindigkeit der Größe und Richtung nach zu bestimmen.

$$v_x = 75{,}142;\ v_y = 80{,}915;\ v = 110{,}424;\ \alpha = 47^0\,7'\,10'';$$
$$\beta = 42^0\,52'\,50''.$$

125. Ein Punkt hat das Bestreben, sich nach drei aufeinander normalen Richtungen, die also nicht in einer Ebene liegen, in gleichmäßig-geänderte Bewegungen mit den Beschleunigungen $35\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$, $67\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ und $98\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ zu versetzen. Es ist die Größe und Richtung der resultierenden Beschleunigung zu bestimmen.

$$123{,}766\frac{\text{m}}{\text{sec}^2};\ 73^0\,34'\,24'',\ 57^0\,13'\,30'',\ 37^0\,38'\,42''.$$

126. Ein Punkt besitzt eine Geschwindigkeit von $550\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, die nach drei aufeinander normalen Richtungen zerlegt werden soll, wenn

a. zwei der Komponenten $100\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $230\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ betragen;

b. eine der Komponenten eine Größe von $120\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ hat und die gegebene Geschwindigkeit mit einer zweiten Komponente den Winkel $15^0\,6'\,14''$ bildet;

c. die gegebene Geschwindigkeit mit zweien der Komponenten die Winkel $87^0\,13'\,12''$ und $54^0\,17'\,8''$ bildet.

a. $489{,}49\frac{\text{m}}{\text{sec}};\ 79^0\,31'\,27'',\ 65^0\,16'\,49'',\ 27^0\,7'\,43''.$

b. $120\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ mit $77^0\,23'\,51''$; $531{,}02\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ mit $15^0\,6'\,14''$;

$78{,}2\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ mit $81^0\,49'\,32''$.

c. $445{,}7\frac{\text{m}}{\text{sec}};\ 321{,}06\frac{\text{m}}{\text{sec}};\ 26{,}676\frac{\text{m}}{\text{sec}};\ 36^0\,23'\,46''.$

127 bis 132. Nach der Projektionsmethode sind für rechtwinkelige Achsen zu behandeln die Beispiele:

$$\begin{Bmatrix} s_x = x = 2 - 4t \\ s_y = y = 5 + 3t \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} s_x = x = 5t \\ s_y = y = 2t^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} s_x = x = a\,.\,sin\left(2\pi\cdot\frac{t}{T}\right) \\ s_y = y = b\,.\,cos\left(2\pi\cdot\frac{t}{T}\right) \end{Bmatrix} \text{ für } a = 5\,\text{cm} \text{ und } b = 3\,\text{cm} \text{ und } T = 20''$$

$$\left\{\begin{array}{l} s_x = x = \dfrac{a}{\sin\left(2\pi\dfrac{t}{T}\right)} \\ s_y = y = b\cot\left(2\pi\dfrac{t}{T}\right) \end{array}\right\} \text{für } a = 5\text{ cm und } b = 3\text{ cm und } T = 20''$$

$$\left\{\begin{array}{l} s_x = x = 3 + 4t \\ s_y = y = -2 + 5t \\ s_z = z = -3 + 2t \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} s_x = x = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}\,.\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T}\right) \\ s_y = y = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}\,.\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T}\right) \\ s_z = z = a\,.\sin\left(2\pi\cdot\dfrac{t}{T}\right) \end{array}\right\} \text{für } a = 5\text{ cm und } T = 20''.$$

133 bis 136. Nach der Polarmethode sind zu behandeln die Beispiele:

$$\left\{\begin{array}{l} r = 2t \\ \sigma = 10^0\,.\,t = \dfrac{\pi}{18}\cdot t \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} r = 2t \\ \sigma = \dfrac{90^0}{t} = \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{t} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} r^2 = a^2\cos\left(4\pi\cdot\dfrac{t}{T}\right) \\ \sigma = \dfrac{t}{T}\cdot 2\pi \end{array}\right\} \text{für } a = 5\text{ cm und } T = 20''.$$

$$\left\{\begin{array}{l} r = 3t \\ \sigma = \dfrac{1}{5}\,log(t) \end{array}\right\}$$

137. Nach der Polarmethode ist zu behandeln, falls λ die Länge und β die Breite (wie auf der Erde) und r die Entfernung vom Pol (dem Erdmittelpunkte entsprechend) bezeichnet:

$$\left\{\begin{array}{r} \lambda = 2\pi\cdot\dfrac{t}{T} \\ tang\,\beta = m\,.\,\lambda \\ r^2 = a^2(1 + m^2\lambda^2) \end{array}\right\} \text{für } m = 3 \text{ und } T = 20'' \text{ und } a = 5\text{ cm.}$$

138. Es sind die Bewegungsverhältnisse eines Punktes zu bestimmen, für den gegeben ist

$$c_x = o,\ j_x = 16;\ c_y = -32;\ j_y = 4t.$$

$$j_G = \sqrt{16^2 + (4t)^2}; \; \cos\lambda = \frac{16}{\sqrt{16^2 + (4t)^2}}; \; \cos\mu = \frac{4t}{\sqrt{16^2 + (4t)^2}}$$

$$v_x = 16t; \; v_y = -32 + 2t^2$$

$$v = \sqrt{(16t)^2 + (2t^2 - 32)^2} = 2t^2 + 32; \; \cos\alpha = \frac{8t}{t^2 + 16}; \; \cos\beta = \frac{t^2 - 16}{t^2 + 16}$$

$$j_T = 4t$$

$j_N = \sqrt{j_G^2 - j_T^2} = 16$ und da $\varrho = \frac{v^2}{j_N}$, so erhält man $\varrho = \frac{(2t^2 + 32)^2}{16}$.

Es ist weiter für $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$

$$x = 8t^2$$
$$y = \tfrac{2}{3}t^3 - 32t$$

und durch Elimination von t ergiebt sich die Gleichung der Bahn

$$y = \frac{2}{3}\frac{x}{8}\sqrt{\frac{x}{8}} - 32\sqrt{\frac{x}{8}} = \sqrt{\frac{x}{8}}\left(\frac{x}{12} - 32\right).$$

Aus v erhält man noch den Weg $s = \frac{2}{3}t^3 + 32t$.

139. Die Bewegungsverhältnisse eines Punktes zu finden, für den gegeben ist:

$$c_x = 2, \; j_x = o; \; c_y = o, \; j_y = 3; \; c_z = 4; \; j_z = 5.$$

$$j_G = \sqrt{o^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{34}; \; \cos\lambda = \frac{o}{\sqrt{34}} = 0; \; \cos\mu = \frac{3}{\sqrt{34}};$$

$$\cos\nu = \frac{5}{\sqrt{34}};$$

$$v_x = 2; \; v_y = 3t; \; v_z = 4 + 5t; \; v = \sqrt{2^2 + (3t)^2 + (4 + 5t)^2}$$

$$= \sqrt{34t^2 + 40t + 20}; \; \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{34t^2 + 40t + 20}};$$

$$\cos\beta = \frac{3t}{\sqrt{34t^2 + 40t + 20}}; \; \cos\gamma = \frac{4 + 5t}{\sqrt{34t^2 + 40t + 20}}.$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= \tfrac{3}{2}t \\ z &= 4t + \tfrac{5}{2}t^2 \end{aligned}\right\}$$

Aus je zweien dieser Gleichungen werde t eliminiert, so erhält man:

$$y = \tfrac{3}{8}x^2$$
$$z = 2x + \tfrac{5}{8}x^2.$$

Diese Gleichungen sind die Projektionen der Bahn im Raume auf die XY- und XZ-Ebene, und die Durchschnittslinie der zu diesen Kurven gehörigen projizierenden Flächen ist die Bahn selbst.

140. Auf einer geneigten Ebene vom Neigungswinkel 60° liegt ein Körper, der sich innerhalb 15 Sekunden auf der schiefen Ebene in gleichmäßig-geänderter Bewegung abwärts verschiebt. Mit welcher Geschwindigkeit

kommt der Körper in die Horizontalebene und welche Länge hat die schiefe Ebene?

$$v = 127{,}4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}; \ s = 955{,}74 \text{ m}.$$

141. Auf derselben schiefen Ebene (vergl. Nr. 140) erlangt ein Körper eine Endgeschwindigkeit von $45 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

In welcher Zeit legt der Körper den Weg auf der schiefen Ebene zurück? Welche Länge hat die schiefe Ebene?

5,3 Sekunden; 119,3 m.

142. Ein Körper soll innerhalb 5 Sekunden bei der Bewegung auf einer geneigten Ebene eine Geschwindigkeit von $17 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erlangen.

Welchen Neigungswinkel hat man für die schiefe Ebene anzunehmen? Welche Länge hat die geneigte Ebene?

$$\alpha = 20^0\, 16'\, 40''; \ s = 42{,}5 \text{ m}.$$

143. Eine geneigte Ebene von der Länge 40 m durchläuft ein Körper innerhalb 4 Sekunden.

Wie groß ist der Neigungswinkel der Ebene?
Welche Geschwindigkeit erlangt der Körper?

$$\alpha = 30^0\, 38'\, 30''; \ v = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

144. Zwei geneigte Ebenen sind an ihrem tiefsten Punkte allmählich ineinander übergeführt. Die Länge der ersten Ebene sei 70 m mit dem Neigungswinkel $53^0\, 17'\, 20''$, die zweite Ebene sei gegen den Horizont um 20^0 geneigt. Ein Körper durchlaufe die erste Ebene wie in Nr. 140.

Welchen Weg wird derselbe auf der zweiten Ebene zurücklegen?

$$s \sin \alpha = x \sin \beta$$

$$x = 164 \text{ m}.$$

145. Um wieviel ist eine in horizontaler Richtung abgeschossene Kugel nach einer halben Sekunde gesunken?

$$x^2 = \frac{2\,c^2}{g}\, y$$

1,23 m.

146. Von einem Punkte, der 1,8 m über einer Horizontalebene liegt, wird ein Körper mit einer Geschwindigkeit von $10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ horizontal geworfen. Nach welcher Zeit erreicht er die feste Horizontalebene, welche Größe hat die Wurfweite?

0,6 Sekunden; 6 m.

147. Unter einem Elevationswinkel von 30^0 soll ein Gebäude, das sich in einer horizontalen Entfernung von 1200 m befindet, beschossen werden.

a. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit muß der Schuß geschehen?
b. Nach welcher Zeit schlägt die Kugel auf?
c. Wie groß ist die Wurfhöhe bei diesen Angaben?
d. Mit welcher Geschwindigkeit trifft die Kugel das Ziel?

$$y = -x \tang \alpha + \frac{1}{2} \frac{g}{(c \cos \alpha)^2} x^2.$$

a. $116{,}6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$; b. fast 12 Sekunden; c. 173,21 m; d. Anfangsgeschwindigkeit.

148. Ein Gebäude soll von einem Punkte, der 100 m tiefer gelegen ist und sich in einer horizontalen Entfernung von 1525 m befindet, mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $150 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ beschossen werden:

a. Welcher Elevationswinkel muß dabei zur Anwendung kommen?
b. Mit welcher Geschwindigkeit trifft das Wurfgeschoß das Gebäude?
c. Wieviel Zeit ist zu einem Schusse erforderlich?

$$\tang \alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^4 - g(g x^2 - 2 c^2 y)}}{g x}.$$

a. $\begin{cases} 68^0\,28'\,50'' & \text{für Bogenschuß,} \\ 25^0\,16' & \text{für Flachschuß.} \end{cases}$

b. $143{,}3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$.

c. $\begin{cases} 27{,}72 & \text{Sekunden für Bogenschuß,} \\ 11{,}24 & \text{" " Flachschuß.} \end{cases}$

149. Von einer Anhöhe soll ein Gebäude beschossen werden, das 70 m tiefer als die Anhöhe in einer horizontalen Entfernung von 800 m liegt. Das Geschütz ist für die größte Wurfweite gerichtet, der Elevationswinkel ist also 45^0.

a. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit muß die Kugel abgeschossen werden?
b. Wie groß ist die Endgeschwindigkeit beim Aufschlagen?
c. Unter welchem Winkel trifft die Kugel das Gebäude?

a. $84{,}95 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$; b. $92{,}6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$; c. $49^0\,33'$.

150. Beim Eintreiben eines horizontalen Bohrloches stößt man auf Wasser, welches durch das Bohrloch ausbricht und auf eine horizontale Entfernung $a = 5$ m (Sprungweite) eine vertikale Senkung $b = 0{,}5$ m (Sprungtiefe) zeigt. Welchem Wasserstande h entsprechen diese Verhältnisse, wenn die Geschwindigkeit c eines unter dem Wasserstande h austretenden Strahles durch die Formel $c = \sqrt{2 g h}$ bestimmt ist und vom Einflusse der Reibung abgesehen wird? Die Parabel des ausbrechenden Wasserstrahles ist bestimmt durch $a = c t$ und $b = \frac{g}{2} t^2$.

$$h = 12{,}5 \text{ m}$$

$$c = 15{,}66 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

151. Die Schwingungszeiten von Fadenpendeln zu berechnen, deren Längen gleich 1,5 m und 3 m gegeben sind.

$$\frac{1}{2} T = 1{,}23 \text{ und } 1{,}74 \text{ Sekunden.}$$

152. Ein Fadenpendel von der Länge 1,4 m macht in einer bestimmten Zeit 12 Schwingungen.

Um wieviel ist dasselbe zu verkürzen, damit es in derselben Zeit 20 Schwingungen mache?

$$l_2 = 0{,}504 \text{ m, daher um } 0{,}896 \text{ m zu verkürzen.}$$

153. Die Länge des einfachen Sekundenpendels ist unter 52° Breite gleich 440,65 Pariser Linien.

Wie groß ist hiernach die Beschleunigung der Schwere für Orte unter 52° Breite, für Orte am Äquator?

$$1 \text{ m} = 443{,}296 \text{ Pariser Linien.}$$

$$g = l\pi^2 \text{ und } g_\beta = g_0 (1 + {}^1/_{289} \sin\beta^2).$$

$$9{,}810 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}; \; 9{,}78965 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

154. Es ist die Länge des einfachen Sekundenpendels zu berechnen für die Orte, die unter der Breite von 5°, 76° und 90° liegen:

991,92 mm; 995,13 mm; 995,33 mm.

155. Um wieviele Sekunden eilt eine Uhr mit Sekundenpendel, die am Äquator richtig geht, unter 75° Breite täglich vor?

Ist l die Länge des Sekundenpendels am Äquator, so gilt für die Zeitdauer einer Schwingung desselben an einem Orte von der Breite β:

$$\frac{1}{2} T = \pi \sqrt{\frac{l}{g_\beta}} = \sqrt{\frac{1}{1 + {}^1/_{289} \sin\beta^2}}.$$

Macht das Pendel an diesem Orte täglich n Schwingungen, so ist danach

$$n \sqrt{\frac{1}{1 + {}^1/_{289} \sin\beta^2}} = 86\,400 \text{ Sekunden,}$$

$$n = 86540,$$

d. h. 140 Schwingungen sind zu viel vorhanden. Die Uhr geht also um 140 Sekunden, d. h. um 2 Minuten 20 Sekunden vor.

156. Ersetzt man $\frac{1}{289}$ in Nr. 153 durch x, so läßt sich x aus der Länge zweier Sekundenpendel für verschiedene Breitengrade berechnen. Bezeichnen wir diese Grade mit β und β_1, die Längen der Sekundenpendel mit l und l_1, so ist:

$$\pi^2 l = g_0 (1 + x \sin\beta^2)$$

$$\pi^2 l_1 = g_0 (1 + x \sin\beta_1^2), \text{ daher } \frac{l}{l_1} = \frac{1 + x\sin\beta^2}{1 + x\sin\beta_1^2}.$$

Für Berlin, unter 52° 30′ 16″ nördlicher Breite gelegen, ist die beobachtete Länge 440,665 Pariser Linien und für Paris, unter 48° 50′ 14″ nördlicher

Breite, ist diese Länge 440,53 Pariser Linien. Für diese durch Beobachtung gefundenen Größen ergiebt sich

$$x = 0{,}00489,$$

während $^1/_{289}$ gleich 0,00346 ist, was seinen Grund darin hat, daß bei dem früheren Fall die Erde als vollkommene Kugel vorausgesetzt worden ist.

157. Für Orte, unter der Breite β am Niveau des Meeres gelegen, sei die Länge des Sekundenpendels l_1.

Wie groß ist diese Länge unter derselben Breite in einer Höhe von h m über dem Meeresspiegel? (Vergl. S. 154.)

Die Berechnung sei für den Mont Blanc, 4900 m über dem Meere, unter der Breite von 45° 45′ gelegen, durchzuführen.

Der Radius R der Erde ist 6366198 m.

$$l_2 \doteq l_1 \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

$$l_2 = 994{,}2 \text{ mm}.$$

158. Ein Sekundenpendel von der Länge l wird durch Wärme um 0,01 l länger.

Wieviel Schwingungen macht es täglich weniger?

429 Schwingungen.

159. Es seien zwei verschiedene Centrifugalpendel gegeben:

Wie verhalten sich die in derselben Zeit t gemachten Umläufe n_1 und n_2?

Wie verhalten sich die Längen der Centrifugalpendel, wenn in derselben Zeit eine gleiche Anzahl von Umläufen gemacht werden soll?

$$n_2 : n_1 = \sqrt{l_1 \cos\alpha_1} : \sqrt{l_2 \,.\, \cos\alpha_2}$$

$$l_1 : l_2 = \cos\alpha_2 : \cos\alpha_1.$$

160. Ein Centrifugalpendel von der Länge l mache in einer Minute n Umläufe.

Wie groß ist die Höhe des dabei beschriebenen Kegelmantels?

$$\frac{894{,}56 \text{ m}}{n^2}.$$

161. Bei der Kurbelschleife (vergl. Fig. 129) ist die Bewegung des Punktes P_x eine harmonische Schwingung, da $O P_x = x = r \cos\varepsilon$ ist, falls die Kurbelbewegung gleichförmig (c) vor sich geht. Da die Bewegung, bei welcher der „Stein“ S in dem Schlitze AB gleitet, wegen der seitlichen Führungen F_1 und F_2 eine Verschiebung ist, so stellt die Bewegung von P_x auch die Bewegung jedes anderen Punktes dar.

Diese Bewegung ist zu behandeln (vergl. S. 172) für $r = 36$ cm bei einer Tourenzahl $n = 50$.

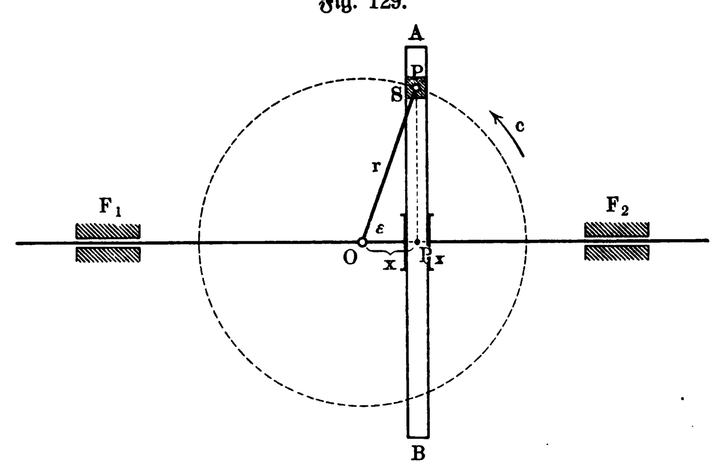
162. Angenähert gilt die Betrachtung der Nr. 161 auch noch bei dem Mechanismus der Fig. 124 für die Schwingung des Punktes A bezw. für jeden Punkt des Kolbens, falls B sich gleichförmig bewegt. Eine genaue

Übereinstimmung würde nur für eine unendlich lange Kolbenstange AB eintreten.

Die Genauigkeit der Annäherung soll für eine Einteilung des Kreises (r) von 15° zu 15° bestimmt werden, was Stellung, Geschwindigkeit und Beschleunigung von A betrifft, für $AB : BO = l : r = 5 : 1$.

Bei der Ausführung kann $r = 40$ cm und $n = 60$ gesetzt werden.

Fig. 129.



163. Die Konstruktion der Centralachse auf S. 118 ist zeichnerisch durchzuführen.

164. Der Zusammenhang der beiden Konstruktionen für die Centralachse (vergl. § 33, Schluß) ist genauer zu entwickeln.

165. Senkrecht zu einer Ebene liegen vier Parallelachsen für Drehungen, deren Sinn innerhalb der Ebene im Vergleich mit der Uhrzeigerbewegung durch + und — bezeichnet werden mag. Die Lage der Schnittpunkte der Achsen und der Ebene sind in dieser für rechtwinkelige Koordinaten gegeben bezw. durch die Punkte[1]):

$$P_1 = (2;\ 3),\ P_2 = (8;\ 5),\ P_3 = (12;\ 7),\ P_4 = (13;\ 9).$$

Die Drehungen bezw. durch $+ 10^0$, $- 20^0$, $- 50^0$, $+ 70^0$.

Diese Folge von Drehungen ist konstruktiv zu vereinigen.

166. Gemäß Fig. 78 ist O für $\varphi_1 : \varphi_2 = 5 : 3$ zu konstruieren.

167. Gemäß Fig. 79 ist O für $\varphi_1 : \varphi_2 = 5 : 3$ zu konstruieren.

168 u. 169. Die Aufgaben 166 und 167 sind bezw. gemäß Fig. 81 und 82 zu behandeln.

170. Gemäß Fig. 80 ist φ konstruktiv herzustellen für $\varphi_1 = 10$, $\varphi_2 = 15$, $\alpha_1 = 20$, $\alpha_2 = 42^0$.

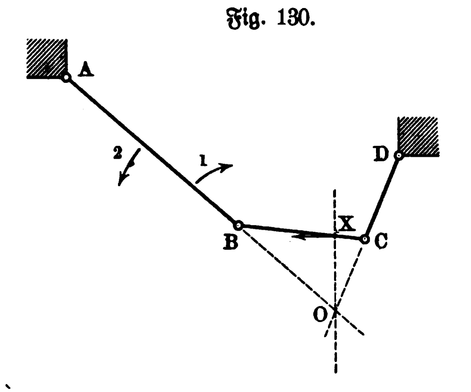
---

[1]) P_1 hat $x = 2$ und $y = 3$ u. s. w.

Die Konstruktion ist durch die Rechnung zu prüfen und deren Genauigkeit festzustellen.

171. Welcher Punkt X der Stange BC des in den Punkten A, B, C, D durch Gelenke verbundenen Stangenpolygons (vergl. Fig. 130) bewegt sich bei Beginn von Drehungen von AB im Sinne der Pfeile 1 oder 2 in der Horizontalebene?

Fig. 130.



Die Konstruktion für X ist in Fig. 130 angedeutet, wobei O augenblicklicher Drehpunkt ist.

172. Gemäß dem Beispiele auf S. 135 ist die „Präzession der Tag- und Nachtgleichen" genauer zu entwickeln. Statt $23^1/_2{}^0$ ist genauer zu rechnen $23^0\,27'\,32''$, ein voller Umlauf der Äquinoktialpunkte würde 25868 Jahre (großes platonisches Jahr) erfordern. Für das Abrollen zweier Kegel gilt folgendes: Fällt man von einem gemeinsamen Punkte beider Mäntel, der von der gemeinsamen Spitze den Abstand l hat, auf die beiden Kegelachsen bezw. Lote r_1 und r_2, so gelten für die bezw. Kegelöffnungen ε_1 und ε_2 die Beziehungen $r_1 = l \sin \varepsilon_1$ und $r_2 = l \sin \varepsilon_2$. Das Abrollen wird demnach charakterisiert durch die Gleichung

$$x(2\,r_1\,\pi) = 2\,r_2\,\pi,$$

d. h. durch

$$x \sin \varepsilon_1 = \sin \varepsilon_2.$$

173. Wenn eine Gerade, die durch einen festen Punkt geht, mit einem ihrer Punkte auf einer festen Geraden bleibt, so beschreibt jeder Punkt eine Konchoide. Diese Linie ist zu untersuchen gemäß der Darstellung auf S. 188 u. f.

174. Die Bewegung des Kurbelmechanismus der Fig. 124 ist genauer zu untersuchen gemäß der Darstellung auf S. 192 u. f.

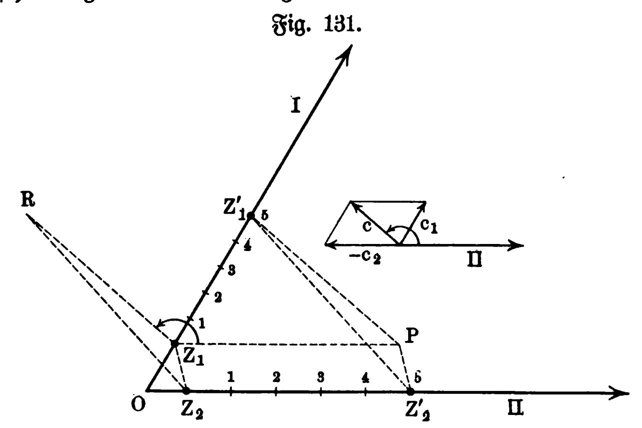
175. Die Konchoidenbewegung (vergl. Nr. 173) ist genauer zu untersuchen, gemäß der Darstellung auf S. 192 u. f.

176. Auf zwei geraden Bahnlinien, die sich unter 60° schneiden, bewegen sich (vergl. Fig. 131) zwei Eisenbahnzüge gleichförmig bezw. mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 10\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $c_2 = 15\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Zur Zeit t haben sie vom Schnittpunkt der Bahnlinien bezw. die Abstände 1100 m und 800 m. Die Relativbewegung des ersten Zuges gegen den zweiten ist für den Verlauf von fünf Minuten darzustellen.

Die Relativbewegung hat eine Geschwindigkeit vom Werte $c = 13{,}23\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$,

deren Richtung 139° 6′ 24″ von der Bewegungsrichtung des zweiten Zuges abweicht. Die relative Bahn ist eine Strecke $Z_1 R$ in der Richtung der relativen Geschwindigkeit von der Länge 3969 m.

Fig. 131.



Bezeichnet man die Endlagen von Z_1 und Z_2 bezw. durch Z'_1 und Z'_2, so hat man für $Z'_2 P \# Z_2 Z_1$ die Beziehung $[Z'_2 Z'_1] \overset{\times}{=} [Z'_2 P] \overset{\times}{+} [P Z'_1]$, aus der $[Z'_2 Z'_1]$ folgt; für die Rechnung ist dabei noch $\measuredangle\, O Z_2 Z_1$ zu bestimmen.

177. Aus einem Eisenbahnzuge wird senkrecht gegen einen anderen, dazu parallelen, ein Stein geschleudert, und zwar mit einer Geschwindigkeit von $5 \frac{m}{sec}$. Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Stein den zweiten Zug, a) wenn beide Züge mit der Geschwindigkeit $15 \frac{m}{sec}$ in gleichem Sinne fahren, b) wenn der erste Zug ruht und der zweite sich mit der Geschwindigkeit $15 \frac{m}{sec}$ bewegt, c) wenn der zweite Zug ruht und der erste sich mit $15 \frac{m}{sec}$ bewegt, d) wenn beide Züge mit der Geschwindigkeit $15 \frac{m}{sec}$ in entgegengesetztem Sinne fahren?

a. $5 \frac{m}{sec}$ senkrecht zu II. b. $15{,}81 \frac{m}{sec}$ unter dem Winkel 161° 35′ zu II.

c. $15{,}81 \frac{m}{sec}$ unter dem Winkel 18° 25′ zu II.

d. $30{,}42 \frac{m}{sec}$ unter dem Winkel 170° 30′ zu II.

178. Die Geschwindigkeit eines Wassertropfens in Bezug auf ein Gefäß beträgt in dem Augenblicke des Ausflusses $7{,}85 \frac{m}{sec}$, während die Ausflußstelle des Gefäßes die Geschwindigkeit $6 \frac{m}{sec}$ hat. Welches ist die

(absolute) Geschwindigkeit des Wassers, wenn die Richtungen beider Geschwindigkeiten einen Winkel von 130° bilden?

$$6{,}09\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

179. Ein Kahn, dem Ruderer eine Geschwindigkeit von $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ geben, wird in einem Flusse von $1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ Geschwindigkeit einmal durch die Ruder stets rechtwinklig zum Ufer in Bewegung gesetzt, das andere Mal so, daß seine Bahn rechtwinklig zum Ufer liegt. Wie verhalten sich die Überfahrtszeiten bei einer Strombreite von 1200 m?

3 : 5.

180. Ein Kasten bewegt sich mit der Beschleunigung $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$ senkrecht nach oben. Wie groß ist die Schwingungsdauer eines Pendels, das an der Decke des Kastens hängt?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+2}}.$$

181. Ein Kasten bewegt sich mit der Beschleunigung $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$ senkrecht nach unten. Wie groß ist die Schwingungsdauer eines Pendels, das an der Decke des Kastens hängt?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-2}}.$$

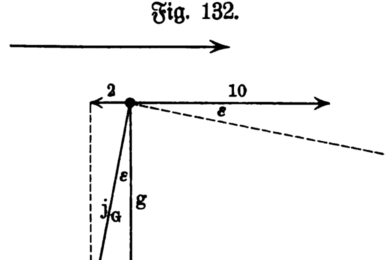
182. Wie ändern sich die Ergebnisse der Nr. 180 und 181 für eine Beschleunigung von $12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$?

Im Falle der Nr. 181 müßte das Pendel an dem Boden des Kastens befestigt werden und man hätte:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{12-g}}.$$

183. In einem Kasten, der sich horizontal mit der Beschleunigung $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$ bewegt, wird in Richtung der Bewegung eine Kugel mit einer Geschwindigkeit von $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ geworfen. Die entsprechende parabolische Bahn ist zu zeichnen.

Fig. 132.



Die Lösung giebt Fig. 132.

184. Unter welchem Winkel zu einander stehen die Windfahnen zweier sich gegenläufig bewegenden Schiffe, welche die Windrichtung senkrecht kreuzen?

90°.

185. Entsprechend Fig. 90 ist die Untersuchung durchzuführen, a. wenn die beiden Geschosse einander entgegenfliegen, b. wenn die Bewegung von Q erst beginnt, nachdem die Bewegung von P bereits 5″ gedauert hat.

186. Entsprechend Fig. 91 ist die Untersuchung durchzuführen, a. wenn sich die Punkte gegenläufig mit derselben Winkelgeschwindigkeit bewegen, b. wenn sich die Punkte mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten mitläufig oder gegenläufig bewegen.

187. Auf einer Scheibe S, die sich um eine Achse A dreht, ist eine Achse B befestigt, die zu A parallel ist. Welche (absolute) Bewegung vollführt ein Körper K, der sich um die Achse B mit einer Winkelgeschwindigkeit dreht, welche der Winkelgeschwindigkeit von S um A entgegengesetzt gleich ist?

Kreisverschiebung.

188. Entsprechend Fig. 95 ist die Untersuchung für eine gerade Bahn durchzuführen, welche die Drehungsachse schief schneidet.

Übertragung auf einen Kegelmantel.

189. Entsprechend Fig. 96 ist die Untersuchung für gleichsinnige Drehungen durchzuführen.

190. Entsprechend Fig. 96 ist die Untersuchung für zwei sich schneidende Achsen durchzuführen.

Übertragung auf Kegelmäntel.

Zweiter Abschnitt.

Der Übergang von der Phoronomie zur Dynamik.

(Lehre vom materiellen Punkte.)

---

40. Die dynamische Grundgleichung für materielle Körperelemente (Atome). Gemäß dem Principe der Trägheit bedarf nicht die Bewegung, sondern die Bewegungsänderung einer weiteren Erklärung (vergl. § 17). Diese Bewegungsänderung wurde zunächst für einen sich bewegenden Punkt W in jedem Zeitpunkte t als Gesamtbeschleunigung $[j_G]$ dargestellt (vergl. § 25), während dann weitere Untersuchungen über die Bewegung von starren Körpern es ermöglichten, dies auch für jeden Punkt eines starren Körpers durchzuführen. Anderseits weisen alle unsere Erfahrungen darauf hin, daß die Beschleunigungen, welche wir an Körpern der Außenwelt beobachten, durch eine gegenseitige Einwirkung solcher Körper bedingt sind, d. h. wir müssen mindestens zwei Körper betrachten, wenn wir eine beobachtete Beschleunigung auf ihre letzten, uns zugänglichen Bedingungen zurückführen wollen, den Körper, an dem sie beobachtet wird, und außerdem einen anderen Körper, von dem sie auszugehen scheint.

Beispiele: Der fallende Stein und die Erde, der Mond und die Erde, die Erde und die Sonne; alle Bewegungsänderungen, die durch die Berührung zweier Körper bedingt sind (Stoß, Schlag u. s. w.).

Unsere Erfahrungen lehren uns aber ferner, daß sich die gegenseitige Einwirkung der Körper der Außenwelt bei Bewegungsänderungen nicht bloß in dem Auftreten von Beschleunigungen zeigt, daß vielmehr die reine Bewegungslehre (Phoronomie) in ganz bestimmtem Sinne (Dynamik) erweitert werden muß, wenn jene gegenseitige Einwirkung voll zur Darstellung kommen soll. Dies folgt schon allein daraus, daß alle Körper in der Nähe der Erdoberfläche mit derselben Beschleunigung $[g]$ frei fallen, während der Zug oder Druck, den wir in einzelnen Teilen unseres eigenen Körpers aushalten müssen, wenn wir durch ihn verschiedene Körper am freien Fallen verhindern, unter sonst gleichen Umständen höchst verschieden sein

kann. Daß dieser Zug oder Druck bei Körpern von gleichem Stoffe (z. B. Blei) mit dem Rauminhalte (Volumen) wächst und abnimmt und daß er für verschiedene Stoffe (z. B. Blei und Eisen) bei verschiedenem Rauminhalte derselbe sein kann, ist das Ergebnis alter, wenn auch roher Erfahrungen. Sie lehren, daß unsere, in der Empfindung von Zug und Druck unmittelbar abgeschätzte Leistung, nämlich eine bestimmte Beschleunigung [g] fortgesetzt im Entstehen zu unterdrücken, nicht bloß von dieser Beschleunigung [g] abhängt, sondern außerdem von dem Rauminhalte und der Stoffart der Körper, an denen diese Beschleunigung auftritt.

Diese rohe Abschätzung von Zug und Druck, welche uns unsere Empfindung giebt, ist schon in sehr alten Zeiten (vergl. z. B. die Baudenkmäler Ägyptens) durch die Messung an einem Instrumente ersetzt worden, welches allerdings ursprünglich vor allem für die Bestimmung von Warenmengen von Bedeutung war. Dieses Instrument ist die gleicharmige Hebelwage.

Zwei Körper, welche als Belastungen der gleicharmigen Hebelwage deren Balken horizontal stellen, üben erfahrungsmäßig unter sonst gleichen Umständen auf Teile unseres eigenen Körpers denselben Zug oder Druck aus, wenn wir sie durch ihn am freien Fallen hindern. Indem man diese Erfahrung auf andere und zwar auch auf leblose Körper übertrug, welche einen bestimmten Körper am freien Fallen hindern, kam man dazu, auch z. B. in dem belasteten Seile einen Zug und in der belasteten Stütze einen Druck anzunehmen, und diesen Zug oder Druck der durch die gleicharmige Hebelwage gemessenen Belastung proportional zu setzen.

Daß dieser Zug oder Druck, oder genauer, der entsprechende Zustand in den leblosen Körpern, aber auch der Beschleunigung proportional ist, von deren Betrachtung wir ausgingen, zeigt am einfachsten die Untersuchung des Falles auf einer schiefen Ebene. Schon rohe Erfahrungen lehren, daß der Zug oder Druck, den wir empfinden, wenn wir einen bestimmten Körper auf einer schiefen Ebene am Fallen hindern, von dem Neigungswinkel (α) der Ebene gegen den Horizont abhängt, daß er für die Grenzen $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ bezw. seinen kleinsten Wert (0) und seinen größten Wert (dem freien Fall entsprechend) hat und dazwischen zugleich mit dem Neigungswinkel bezw. zunimmt und abnimmt. Eine genauere, nur phoronomische Experimentaluntersuchung (vergl. Anwendungen zur Phoronomie, Nr. 6) des Falles auf der schiefen Ebene (α), wie sie zuerst Galilei (1602) angestellt hat, zeigt, daß eine gleichmäßig-geänderte Bewegung mit der Beschleunigung [$g \sin \alpha$] vorliegt, als deren Sonderfall für $\alpha = 90^0$ sich der freie Fall ergiebt. Ergänzt man diese Untersuchung in dynamischer Hinsicht, indem man feststellt, welche (durch die gleicharmige Hebelwage gemessenen) Belastungen einen bestimmten Körper bei bestimmten Stellungen (α) der schiefen Ebene auf dieser am Fallen hindern, so findet man diese Belastungen proportional zu den vorher bestimmten Beschleunigungen.

Dies bestätigt auch die Erfahrung, da der Druck oder Zug einer Belastung für eine bewegliche Oberlage oder Unterlage um so geringer wird, je beschleunigter sich diese in der Richtung des freien Falles bewegt,

während bei umgekehrter Richtung eine Verstärkung des Zuges oder Druckes auftritt. Schon rohe Erfahrungen an der eigenen belasteten Hand zeigen dies bei deren Bewegungen aufwärts oder abwärts. Hier wirkt die Beschleunigung des freien Falles nur relativ in Bezug auf die bewegliche Oberlage oder Unterlage, so daß für diese bei einer abwärts gerichteten Beschleunigung [g] kein Druck oder Zug auftritt.

Aus solchen Überlegungen folgt, daß man den betrachteten Zug oder Druck sowohl der (durch die gleicharmige Hebelwage gemessenen) Belastung als auch der Beschleunigung proportional zu setzen hat, daß also das Produkt aus Belastung und Beschleunigung der einfachste Ausdruck für die Messung dieses Zuges oder Druckes ist.

Führt man die Messung der Belastung durch die gleicharmige Hebelwage auf eine bestimmte Einheit zurück (vergl. Einl., S. 9), so darf man sich die verschiedenen Stoffe als Verdichtungen eines und desselben Grundstoffes (Materie) vorstellen, dessen Menge dann unter dem Namen Masse durch die gleicharmige Hebelwage bestimmt wird.

Dabei wird die Masse (vergl. Einl., S. 9) eines Körpers darstellbar als Produkt aus seinem Rauminhalte (Volumen) und seiner Dichtigkeit.

Bezeichnet man die Masse eines Körpers durch m, so hat demnach der betrachtete Zug oder Druck beim freien Falle den Wert mg, beim Falle auf der schiefen Ebene (α) den Wert $mg \sin \alpha$.

Nennt man den Druck oder Zug, der bei der Verhinderung des freien Falles auftritt, im Gegensatze zu anderen Zug- und Druckarten Schwerdruck oder Schwerzug, wofür auch das zusammenfassende Wort Gewicht gebraucht werden kann, so führen unsere Überlegungen [1]) schließlich zu der Beziehung:

$$\text{Gewicht} = (\text{Masse}) . (\text{Fallbeschleunigung}) \quad . \quad . \quad . \quad 61)$$

Nennt man nun alle gegenseitigen Einwirkungen zweier Körper, welche sich mit der Wirkung der Erde auf einen zu ihr fallenden Körper zahlenmäßig vergleichen, d. h. durch Gewichte messen lassen, Kräfte, so würde die möglichst ausgedehnte Verallgemeinerung der eben gewonnenen Beziehung zu der Gleichung:

$$\text{Kraft} = (\text{Masse}) . (\text{Beschleunigung}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 62)$$

führen.

Man hat diese Gleichung, welche erst das Wort „Kraft“ genau definiert, unter einer ganz bestimmten Voraussetzung seit Newtons Tagen den einschlägigen Untersuchungen zu Grunde gelegt und ist dabei ohne Ausnahme in voller Übereinstimmung mit der Erfahrung geblieben. Darin liegt die Bewährung jener Gleichung, welche natürlich nicht „bewiesen“ werden kann.

Jene Voraussetzung besteht darin, daß die Gültigkeit der Gleichung zunächst auf einen sich bewegenden Punkt eingeschränkt wird, den man sich dabei als Träger einer unendlich-kleinen Masse (im Vergleich zu den Massen

[1]) Dabei ist natürlich in Bezug auf Reibung, Luftwiderstand u. s. w. der bekannte Schluß gemacht, daß die Erscheinung um so reiner zu Tage tritt, je mehr die störenden Einflüsse, welche sich nicht ganz beseitigen lassen, zurücktreten.

der Körper der Außenwelt) vorstellt. Diese Einschränkung ist nötig, weil an den einzelnen Punkten eines Körpers sehr verschiedene Beschleunigungen beobachtet werden können, während dem Körper nur eine Masse zukommt. Man hat sich dabei vorzustellen, daß der Körper aus unendlich-vielen solchen unendlich-kleinen Massen, welche materielle Körperelemente oder Atome heißen mögen, zusammengesetzt ist bezw. in sie zerlegt werden kann, und daß dabei stets die Gesamtheit der Teilmassen gleich der Masse des Körpers ist, wie es erfahrungsmäßig für endliche Teilmassen (Konstanz der Massensumme) der Fall ist.

Man bezeichnet einen Punkt, der Träger von Masse ist, im Gegensatz zu den Punkten der Geometrie und der Phoronomie als „materiellen Punkt“.

Solche Punkte sind entweder Träger einer unendlich-kleinen Masse (Atome) oder Träger einer endlichen Masse, welche in ihnen gewissermaßen verdichtet gedacht werden darf (dynamische Centren, wie z. B. die Schwerpunkte).

Die Gültigkeit der Gleichung „Kraft = (Masse) . (Beschleunigung)“, welche jetzt meist „dynamische Grundgleichung“ heißt, wird für die materiellen Punkte erster Art (Atome) vorausgesetzt. Ob sie auch weitere Gültigkeit besitzt, muß von Fall zu Fall untersucht werden[1]).

41. Die Beziehung von Kraft und Beschleunigung innerhalb der dynamischen Grundgleichung und das Parallelogramm der Kräfte. Die Erfahrung lehrt, daß die Richtung einer Kraft als Zug und Druck stets mit der Richtung der ihr entsprechenden Beschleunigung übereinstimmt oder umgekehrt, wie es für Schwerdruck oder Schwerzug in Bezug auf die Fallbeschleunigung ersichtlich ist. Die Kraft erscheint also als Vektor $[K]$ und hängt mit der ihr entsprechenden Beschleunigung $[j_G]$ so zusammen, daß beide dieselbe Richtung und Werte vom Verhältnisse $\mu : 1$ haben, falls man die Masse mit μ bezeichnet. Dabei erscheint die Beschleunigung selbst als Kraft für den Sonderfall $\mu = 1$. Der Ursprung der Kraft als Vektor heißt der Angriffspunkt.

Als Folgerung ergiebt sich, daß Kräfte an einem Punkte gemäß dem Parallelogrammprincipe vereinigt werden dürfen, so daß die entsprechenden Entwickelungen der Einleitung (S. 24 u. f.) auch für Kräfte gültig sind.

42. Die Verwendung der dynamischen Grundgleichung bei Bewegungen materieller Körper. Die Überlegungen, welche zur dynamischen Grundgleichung führten, stützten sich auf Erfahrungen an Körpern der Außenwelt, während die Gültigkeit jener Gleichung zunächst auf Atome eingeschränkt wurde. Man steht infolgedessen vor der Aufgabe, die thatsächlich

---

[1]) Sie muß auch die Theorie der gleicharmigen Hebelwage, welche auch jeder festen Seilrolle zu Grunde liegt, nachträglich rechtfertigen, da dieses Instrument für die Massenbestimmung dient. Der scheinbare Zirkel ist innerhalb der physikalischen Mechanik unvermeidlich.

gegebenen Beziehungen der Körper der Außenwelt abzuleiten, indem man die dynamische Grundgleichung auf deren Atome anwendet und dann von den Atomen (Elementen) zum ganzen Körper (Integrum) einen Übergang zu finden sucht, d. h. von der dynamischen Elementargleichung zu entsprechenden Integralgleichungen zu kommen strebt, wie es zuerst Huyghens und dann vor allem Newton gethan hat.

Für einen solchen Übergang können selbstverständlich nur Erfahrungen in der Außenwelt die nötigen Hülfsmittel bieten.

Diese Hülfsmittel sind verschieden je nach dem Aggregatzustande der betrachteten Körper.

Dabei steht jedes Atom insofern unter einem gewissen Zwange, als es mit anderen Atomen zu dem Ganzen eines Körpers verbunden ist, und demgemäß hat man auch die gezwungene Bewegung des Atoms als Bestandteil eines Körpers von seiner freien Bewegung zu unterscheiden.

Während die Behandlung der freien Bewegung eines Atoms bereits durch die Phoronomie erledigt ist, erfordert die Behandlung der gezwungenen Bewegung eines Atoms von Fall zu Fall neue Untersuchungen.

Die Erfahrung lehrt, daß der Zwang stets durch Kräfte dargestellt werden kann.

Bei der Bewegung eines freien Atoms von der Masse μ stellt $[K] \stackrel{\times}{=} \mu [j_G]$ für eine Beschleunigung $[j_G]$ ohne weiteres die von außen, infolge gegenseitiger Einwirkung des Atoms und eines anderen materiellen Gebildes, an das Atom herantretende Kraft dar, welche der Abweichung der Bewegung des Atoms von der Urbewegung entspricht. Diese Kraft $[K]$ kann dabei natürlich aus beliebig-vielen Komponenten erwachsen.

Für Körper veranschaulicht dies der freie Fall; hier tritt infolge der gegenseitigen Einwirkung von Körper und Erde im Schwerpunkte des Körpers die Kraft $[K] \stackrel{\times}{=} m [g]$ auf, welche aus den unendlich-vielen Komponenten erwächst, welche der gegenseitigen Anziehung der einzelnen, die Erde und den Körper bildenden Atome entsprechen.

Bei der Bewegung eines gezwungenen Atoms gilt zwar für das Atom selbst noch genau dasselbe, doch muß hier für eine weitere Untersuchung $[K] \stackrel{\times}{=} \mu [j_G]$ in zwei Komponenten gespalten werden, deren eine der Einwirkung des Körpers entspricht, dem das Atom angehört, deren andere die Einwirkung aller anderen materiellen Gebilde, welche zu berücksichtigen sind, darstellt.

Da das Atom als Teil des Körpers angesehen wird, so pflegt man nur die zweite Seitenkraft (bezw. deren Komponenten) als von außen herantretende Kraft anzusehen, während man die erste Seitenkraft (bezw. deren Komponenten), welche den Zwang darstellt, als innere Kraft bezeichnet.

Die Kraft $[K] \stackrel{\times}{=} [j_G]$, welche die in der Bewegung wirklich zur Geltung kommende Kraft darstellt und deshalb Effektivkraft heißt, ist also hier als Resultante aus der, von außen herantretenden oder der äußeren Kraft (A) und dem Zwange oder der inneren Kraft (J) anzusehen.

Das freie Atom würde durch $[A]$ getrieben, so daß es die Beschleunigung $\frac{[A]}{\mu}$ erhielte, das gezwungene Atom erhält thatsächlich die Beschleunigung $\frac{[K]}{\mu}$, weil ihm außerdem noch der Zwang $[J]$ die Beschleunigung $\frac{[J]}{\mu}$ erteilt (vergl. Fig. 133).

Für Körper veranschaulicht dies einigermaßen der Fall auf der schiefen Ebene (vergl. Fig. 134), falls man den Körper und die schiefe Ebene als ein Ganzes auffaßt. Hier ist $[A] \stackrel{\times}{=} m[g]$ und $[K] \stackrel{\times}{=} m[g \sin \alpha]$, so daß $[J]$ durch

$$[K] \stackrel{\times}{=} [A] \stackrel{\times}{+} [J]$$

zu bestimmen ist; man hat hier $J = m g \cos \alpha$.

Fig. 133.

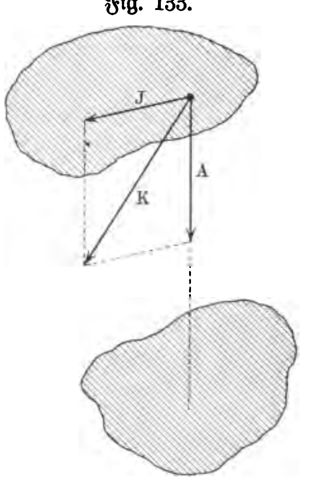


Fig. 134.

Diese Zerlegung von $[K]$ in $[A]$ und $[J]$ rechtfertigt sich, weil das System aller Kräfte $[J]$, welche innerhalb eines Körpers zwischen den einzelnen Atomen auftreten, eine ganz besondere Eigenschaft hat, dem allgemeinen Princip der Paarwirkung (vergl. Einleitung, S. 12 u. f.) entsprechend, welches in § 44 genauer behandelt werden soll.

Spricht man von Kräften, die auf einen Körper wirken oder einen Körper angreifen, so meint man damit stets Kräfte, die von außen an seine Atome herantreten, sie sind stets der eine Teil einer gegenseitigen Einwirkung zwischen dem Körper und anderen materiellen Gebilden, während dabei der andere, an jenen materiellen Gebilden haftende Teil dieser Einwirkung unsere Aufmerksamkeit meist nicht fesselt. So entspricht der Zug eines Körpers an einer Oberlage oder sein Druck auf eine Unterlage der Einwirkung der Erde auf ihn, während uns die Einwirkung des Körpers auf die Erde zunächst nicht interessiert. So ist der Zug oder Druck, den lebende Wesen ausüben, deren Einwirkung auf einen Körper, während uns die Einwirkung des Körpers auf sie nicht beschäftigt. Benutzen wir ein Gewicht, etwa durch Vermittelung von Schnurlauf und Rolle, zur Einleitung einer Bewegung, so geben wir der gegenseitigen Einwirkung von Gewicht und Erde Gelegenheit, in Thätigkeit zu treten, es interessiert uns aber nur die Einwirkung der Erde auf den Körper und die damit gegebene Einwirkung des Körpers auf die zu bewegenden Massen.

43. Die Verwendung der dynamischen Grundgleichung bei Bewegungen starrer materieller Körper und deren Charakteristik. Das

besondere Hülfsmittel, welches bei starren Körpern den Übergang von der Elementargleichung zur Integralgleichung ermöglicht, besteht in der Verwertung der Erfahrung, daß zwei gleiche Kräfte (Zug oder Druck) von entgegengesetztem Sinne, die innerhalb derselben Geraden an einem Körper beobachtet werden, von um so geringerer Wirkung sind, je näher der Körper dem Bilde eines starren Körpers kommt.

Beispiel: Man denke eine cylindrische Siegellackstange in ihrer Längsachse beiderseits durch je 2 kg gezogen, zunächst bei Zimmertemperatur, und dann die Siegellackmasse mehr und mehr erwärmt.

Nennt man solche Kräfte, die man durch $[K]$ und $[\overline{K}]$ bezeichnen kann, Gegenkräfte voneinander, so gelangt man für starre materielle Körper zu dem Satze: An jedem starren materiellen Körper dürfen Gegenkräfte hinzugefügt und fortgenommen werden.

Durch Umkehrung gelangt man zu einer Definition des starren materiellen Körpers: Sind an einem Körper in jeder Geraden Gegenkräfte ohne Wirkung, so ist der Körper ein starrer materieller Körper.

Aus dem Satze fließt noch als Folgerung, daß innerhalb eines starren materiellen Körpers jede Kraft auf der Geraden, von der sie als Strecke ein Teil ist, beliebig verschoben werden darf, da sie ja in jeder Lage im Verein mit einer bestimmten Gegenkraft aufgehoben wird.

Will man sich den inneren Bau eines starren materiellen Körpers veranschaulichen, so kann man sich je zwei seiner Atome durch Gegenkräfte verbunden denken, welche jede Veränderung in der Lage der Atome verhindern.

44. Das Princip der Paarwirkung und die Kräfte am starren Körper. Das aus der Erfahrung erschlossene Princip der Paarwirkung sagt aus: Bei der, durch Kräfte dargestellten, gegenseitigen Einwirkung zweier Körper P und Q der Außenwelt ist die Einwirkung von P auf Q stets der Einwirkung von Q auf P entgegengesetzt-gleich, so daß beide Einwirkungen, wenn sie an einem und demselben starren Körper aufträten, diesen zu keiner Bewegungsänderung veranlassen würden. Demgemäß erleiden zwei starre Körper P und Q infolge ihrer gegenseitigen Einwirkung keine Bewegungsänderung, wenn sie selbst starr verbunden sind.

Dasselbe gilt auch für zwei beliebige Körper P und Q der Außenwelt, falls man die Atome jedes Körpers für ein Zeitelement in ihrer augenblicklichen Lage starr verbunden denkt.

Beispiel: Die gegenseitige Einwirkung zwischen einem frei fallenden Körper P und der Erde Q führt zu keiner Bewegungsänderung, wenn beide Körper durch eine dazwischen geschobene Stütze fest miteinander verbunden werden.

Da bei der gegenseitigen Einwirkung zweier Körper P und Q oft zunächst die eine Seite des ganzen Vorganges, etwa die Einwirkung von Q auf P (z. B. der Erde auf den frei fallenden Körper) die Aufmerksamkeit fesselt, so hebt man oft diese eine Seite des ganzen Vorganges als Wirkung (Aktion) hervor und bezeichnet demgegenüber dessen andere Seite, d. h. die Einwirkung von P auf Q (z. B. die Einwirkung des fallenden Steines auf

die Erde) als Gegenwirkung (Reaktion). Infolgedessen führt obiges Princip auch den Namen: **Princip der Gleichheit von Wirkung (Aktion) und Gegenwirkung (Reaktion).**

Bei der Übertragung dieses Princips auf Atome entspricht im besonderen jeder Kraft, die an einem Atome auftritt, da sie nur der eine Teil einer gegenseitigen Einwirkung ist, eine andere Kraft von gleichem Werte und entgegengesetztem Sinn, welche mit der ersten Kraft innerhalb derselben Geraden liegt, so daß beide Kräfte Gegenkräfte voneinander sind (vergl. § 43).

Bei der gezwungenen Bewegung eines, einem materiellen Körper angehörigen Atoms liegt die Gegenkraft von $[A]$ außerhalb des betrachteten Körpers, während die Gegenkraft von $[J]$ innerhalb des betrachteten Körpers liegt. Betrachtet man nun das ganze System der Kräfte $[A_1]$, $[A_2]$,..., welche an den einzelnen Atomen des Körpers auftreten, so unterliegt dieses System nicht dem Principe der Paarwirkung, weil die Kräfte $[\bar{A}_1]$, $[\bar{A}_2]$, ... außerhalb des Körpers zur Geltung kommen. Betrachtet man aber das ganze System der inneren Kräfte $[J_1]$, $[J_2]$, ..., welche an den einzelnen Atomen des Körpers auftreten, so läßt sich dieses auflösen in die Paarwirkungen je zweier Atome, welche dem Körper angehören, so daß für dieses System das Princip der Paarwirkung in Geltung ist.

Das System der Effektivkräfte $[K_1]$, $[K_2]$, ..., welche an den einzelnen Atomen eines Körpers auftreten, entspringt also aus dem Systeme $[A_1]$, $[A_2]$, ..., welches dem Principe der Paarwirkung nicht unterliegt, und dem Systeme $[J_1]$, $[J_2]$, ..., für welches das Princip der Paarwirkung in Geltung ist.

Bei einem starren Körper hebt sich das System $[J_1]$, $[J_2]$, ... in sich auf, weil es aus lauter Gegenkräften an starr verbundenen Punkten besteht, so daß also hier das System der Effektivkräfte und das System der äußeren Kräfte genau dieselbe Wirkung hat.

Dieser Satz für starre Körper ist ein Teil des später noch ausführlicher zu behandelnden Princips, welches nach seinem Entdecker d'Alembert benannt wird (vergl. Einl., S. 19).

45. Die Bedeutung der dynamischen Grundgleichung bei Verschiebungen starrer materieller Körper. Die Erfahrungen, welche zur dynamischen Grundgleichung führten, wurden an bestimmten Bewegungen von Körpern der Außenwelt (freier Fall und Fall auf der schiefen Ebene) gemacht, welche in großer Annäherung als Verschiebungen starrer Körper angesehen werden können. Es liegt daher nahe, vor allem zu untersuchen, ob die dynamische Grundgleichung sich auf Verschiebungen starrer materieller Körper übertragen läßt.

Dazu betrachten wir zunächst die Verschiebung eines starren Moleküls, d. h. einer abzählbaren (n) Gruppe von starr miteinander verbundenen Atomen.

Zwei Atome der Gruppe (vergl. Fig. 135, a. f. S.) bezw. von den Massen μ_1 und μ_2 mögen A_1 und A_2 heißen und sich in der Verschiebungsrichtung V

zur Zeit t mit der Beschleunigung $[j_G]$ aus der Ruhe verschieben, so daß an ihnen bezw. die Effektivkräfte $[K_1] \stackrel{\times}{=} \mu_1 \cdot [j_G]$ und $[K_2] \stackrel{\times}{=} \mu_2 \cdot [j_G]$ auftreten.

Wegen der starren Verbindung von A_1 und A_2 ist es erlaubt (vergl. § 43), die Gegenkräfte $[H]$ und $[\overline{H}]$ zuzusetzen, so daß $[K]$ und $[H]$ zur Resultante $[R_1]$ und $[K_2]$ und $[\overline{H}]$ zur Resultante $[R_2]$ zusammengefaßt werden können, d. h. die Kräfte $[K_1]$ und $[K_2]$ lassen sich durch die Kräfte $[R_1]$ und $[R_2]$ ersetzen. Da $[K_1]$ und $[K_2]$ beim Übergange in $[R_1]$ und $[R_2]$ beide (im Sinne der Pfeile der Fig. 135) nach außen gedreht erscheinen, so haben $[R_1]$ und $[R_2]$ einen Schnittpunkt O, an den sie (nach § 43) verschoben werden dürfen, falls man sich O mit A_1 und A_2 fest verbunden denkt. Um $[R_1]$ und $[R_2]$ in O zu einer Resultante zu vereinigen, zerlegt man sie am besten wieder bezw. in $[K_1]$ und $[H]$ und in $[K_2]$ und $[\overline{H}]$, so daß sich die Resultante unmittelbar als eine Kraft vom Werte $K_1 + K_2$ und der Richtung von $[K_1]$ oder $[K_2]$ ergiebt[1]), sie mag $[K_{1,2}]$ heißen. Diese Resultante trifft die Strecke $A_1 A_2$ in einem Punkte $A_{1,2}$ und man hat wegen der Ähnlichkeit der entsprechenden Dreiecke der Figur:

Fig. 135.

$$1)\ \frac{O A_{1,2}}{A_{1,2} A_1} = \frac{K_1}{H} \quad \text{und} \quad 2)\ \frac{O A_{1,2}}{A_{1,2} A_2} = \frac{K_2}{\overline{H}}$$

und also durch Division von 1) und 2)

$$3)\ \frac{A_{1,2} A_2}{A_{1,2} A_1} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

d. h. Strecke $A_1 A_2$ wird durch $A_{1,2}$ innerlich geteilt und zwar gemäß dem Verhältnisse $\mu_2 : \mu_1$, so daß sich A_1 und A_2 und μ_1 und μ_2 bei der Teilung umgekehrt entsprechen. Die Lage von $A_{1,2}$ ist unabhängig von der Richtung der Verschiebung.

Bei der betrachteten Verschiebung lassen sich die beiden Atome A_1 und A_2 durch irgend einen Punkt P der Geraden $O A_{1,2}$ ersetzen, wenn man an ihm die Kraft $[K_{1,2}] = (\mu_1 + \mu_2) \cdot [j_G]$ vorhanden denkt. Giebt man dem Punkte P die Masse $(\mu_1 + \mu_2)$, so entsteht die an ihm auftretende Kraft $[K_{1,2}]$ bei der betrachteten Verschiebung gemäß der dynamischen Grundgleichung.

Soll dies für alle möglichen Verschiebungen gelten, so hat man nicht einen beliebigen Punkt P der Geraden $O A_{1,2}$ auszuwählen, sondern den Punkt $A_{1,2}$, um den sich $[K_{1,2}]$ bei Änderung der Richtung von $[K_1]$ und $[K_2]$ dreht.

Der Punkt $A_{1,2}$ ist ein materieller Punkt zweiter Art, d. h. ein

[1]) Vergl. hierzu die Betrachtung in Bezug auf Fig. 82.

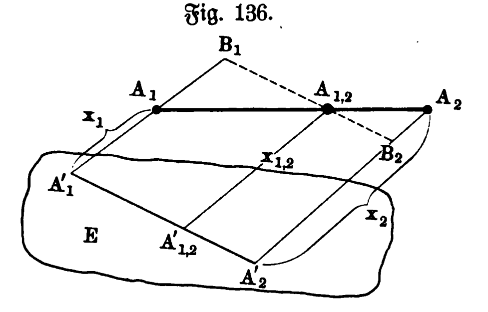
dynamisches Centrum, man hat in ihm die Massen μ_1 und μ_2 von A_1 und A_2 vereinigt zu denken, wenn man A_1 und A_2 durch ihn bei der betrachteten Bewegung ersetzen will. Man nennt diesen Punkt, welcher die Verbindungsstrecke der beiden Atome im umgekehrten Verhältnisse ihrer Masse teilt, den Massenmittelpunkt des Moleküls.

Demgemäß gilt der Satz: Die dynamische Grundgleichung, welche zunächst nur für ein Atom gilt, läßt sich bei Verschiebungen auf ein starres Molekül aus zwei Atomen anwenden, wenn man dieses durch seinen Massenmittelpunkt ersetzt.

Dieser Satz ist von großer Wichtigkeit, weil er sich sofort auf ein starres Molekül aus n Atomen ausdehnen läßt.

Dazu hat man nur erst A_1 und A_2 durch $A_{1,2}$ zu ersetzen, dann $A_{1,2}$ und A_3 ebenso zu $A_{1,2,3}$ zusammenzufassen, dann $A_{1,2,3}$ und A_4 u. s. f., und außerdem zu zeigen, daß der schließlich gewonnene Punkt $A_{1,2\ldots n}$, der kurz durch A bezeichnet werden mag, von der Masse $\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_n$ in seiner Lage unabhängig ist von der zufälligen Reihenfolge $1, 2, \ldots n$ der Zusammenfassung. Um diese Unabhängigkeit nachzuweisen, projicieren wir, wie es Fig. 136 zeigt, die Punkte A_1, $A_{1,2}$, A_2 auf irgend einer Ebene E durch Parallelstrecken x_1, $x_{1,2}$, x_2. Legt man zur Projektion von $A_1 A_2$ durch $A_{1,2}$ die Parallele $B_1 B_2$, so ist wegen der Ähnlichkeit der entsprechenden Dreiecke

Fig. 136.



$$\frac{B_1 A_1}{B_2 A_2} = \frac{A_1 A_{1,2}}{A_2 A_{1,2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Da $B_1 A_1 = x_{1,2} - x_1$ und $B_2 A_2 = x_2 - x_{1,2}$ ist, so hat man also:

$$\frac{x_{1,2} - x_1}{x_2 - x_{1,2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \text{ d. h. } (\mu_1 + \mu_2) x_{1,2} = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2.$$

Wendet man dieses Verfahren auf jeden Punkt des Moleküls an, so ist zunächst für $A_{1,2,3}$ als Zusammenfassung von $A_{1,2}$ und A_3 in Geltung:

$$\begin{aligned} x_{1,2,3}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) &= (\mu_1 + \mu_2) x_{1,2} + \mu_3 x_3 \\ &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3. \end{aligned}$$

Bezeichnet man $x_{1,2,\ldots n}$ der Kürze wegen durch x, so gelangt man dann durch den Schluß von $n - 1$ auf n zu der Gleichung:

$$x(\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_n) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots \mu_n x_n \quad . \quad . \quad . \quad 63)$$

Demnach ist der Abstand x des Punktes A von der Ebene E unabhängig von der Reihenfolge der Zusammenfassung der einzelnen Massen, da x als das Verhältnis zweier Summen erscheint, deren Posten natürlich beliebig vertauscht werden können. Da E eine ganz beliebige Ebene des

Raumes ist, so ist die Lage von A von der Reihenfolge der Zusammenfassung der einzelnen Massen unabhängig.

Man nennt den so gewonnenen Punkt, der ein materieller Punkt zweiter Art, d. h. ein dynamisches Centrum ist, den Massenmittelpunkt des Moleküls; man hat sich in ihm die Masse $\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_n$ vereinigt zu denken.

Demgemäß gilt der Satz: Die dynamische Grundgleichung läßt sich bei Verschiebungen auf ein starres Molekül aus n Atomen übertragen, wenn man dieses durch seinen Massenmittelpunkt ersetzt.

Um die Lage von A zu bestimmen, benutzt man am besten die Formel Nr. 63, indem man sie auf drei, zu einem Koordinatensysteme vereinigte Ebenen anwendet.

Bezeichnet man in einem solchen Systeme die Koordinaten eines Punktes A_p der Gruppe $A_1, A_2, \ldots A_n$ durch x_p, y_p, z_p und kürzt man ferner

$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots \mu_n x_n$ durch $\sum_{p=1}^{p=n} \mu_p x_p$ oder durch $\Sigma \mu_p x_p$ für

$p = 1, 2, \ldots n$, und $\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_n$ durch $\sum_{p=1}^{p=n} \mu_p$ oder durch $\Sigma \mu_p$

für $p = 1, 2, \ldots n$ ab u. s. f., so ist die Lage des Massenmittelpunktes A gegeben durch die drei Koordinaten:

$$x = \frac{\Sigma \mu_p x_p}{\Sigma \mu_p}, \quad y = \frac{\Sigma \mu_p y_p}{\Sigma \mu_p}, \quad z = \frac{\Sigma \mu_p z_p}{\Sigma \mu_p} \quad \ldots \quad 64)$$

für $p = 1, 2, \ldots n$.

Man pflegt das Produkt aus einer Masse und einer Strecke im allgemeinen als Massenmoment zu bezeichnen, so daß in den Formeln Nr. 64 besondere Massenmomente vorkommen, gebildet aus den Koordinaten (z. B. $x_1, x_2, \ldots x_n$ und x) nach einer Ebene. Da diese besonderen Massenmomente von hervorragender Bedeutung sind, so pflegt man den Inhalt der Formeln Nr. 64 kurz als „Satz von den Massenmomenten" zu bezeichnen. Sein genauer Ausdruck würde lauten: Benutzt man für die Atome eines Moleküls und für dessen Massenmittelpunkt die Koordinaten nach einer Ebene zur Bildung von Massenmomenten, so ist das Moment des Massenmittelpunktes gleich der Summe der Massenmomente der einzelnen Atome.

Man kann die drei Formeln der Nr. 64 leicht in eine zusammenfassen, wobei wir der Einfachheit wegen das benutzte Koordinatensystem als rechtwinkelig voraussetzen.

Die Vektoren $[OA_1]$, $[OA_2], \ldots [OA_n]$ aus dem Anfangspunkte O des Koordinatensystems, welche durch $[r_1], [r_2], \ldots [r_n]$ bezeichnet werden sollen, mögen mit den Achsen bezw. die Winkel $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \ldots (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ bilden. Ordnet man jedem Vektor $[r_p]$ einen Vektor $\mu_p [r_p]$ von gleichem Ursprunge und gleicher Richtung zu, wie $[r_p]$, so gilt bei Projektion von $[r_p]$ auf die Achsen:

$$\mu_p x_p = \mu_p r_p \cos \alpha_p, \quad \mu_p y_p = \mu_p r_p \cos \beta_p, \quad \mu_p z_p = \mu_p r_p \cos \gamma_p.$$

Bildet man also aus den Vektoren $\mu_1 [r_1]$, $\mu_2 [r_2]$, ... $\mu_n [r_n]$ von O aus einen Streckenzug, so sind dessen Projektionen auf die Achsen, gemäß den Formeln Nr. 64,

$$x \Sigma \mu_p, \; y \Sigma \mu_p, \; z \Sigma \mu_p \text{ für } p = 1, 2, \ldots n.$$

Da x, y, z die Koordinaten von A sind, so sind x, y, z die Projektionen des Vektors $[OA] = [r]$ auf die Achsen, und demnach lassen sich $x \Sigma \mu_p$, $y \Sigma \mu_p$, $z \Sigma \mu_p$ als die Projektionen eines $[r]$ zugeordneten Vektors $\Sigma \mu_p \,.\, [r]$ darstellen, welcher also die Schlußstrecke des Streckenzuges aus den Vektoren $\mu_1 [r_1]$, $\mu_2 [r_2]$, ... $\mu_n [r_n]$ ist.

Auf diesem Vektor OS liegt der Punkt A und zwar so, daß $OA = \dfrac{OS}{\Sigma \mu_p}$ ist.

Demgemäß kann man A auch erhalten durch die Schlußstrecke OS des Streckenzuges der Vektoren $\mu_1 [r_1]$, $\mu_2 [r_2]$, ... $\mu_n [r_n]$, indem man aus dieser $[O\,A] \overset{\times}{=} \dfrac{[O\,S]}{\Sigma \mu_p}$ bildet.

Der Ausdruck dieses Verfahrens ist:

$$\mu_1 [r_1] \overset{\times}{+} \mu_2 [r_2] \overset{\times}{+} \ldots \mu_n [r_n] \overset{\times}{=} \Sigma \mu_p [r] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 65)$$

Um schließlich von einem starren Moleküle zu einem starren materiellen Körper überzugehen, hat man die Betrachtung unter der Voraussetzung, daß $\Sigma \mu_p$ einen endlichen Wert m hat, auf unendlich-viele starr miteinander verbundene Atome auszudehnen. Die Formeln Nr. 64 bleiben auch hier in Gültigkeit. Bezeichnet man nämlich zunächst für ein Molekül den größten Wert von x_p mit x_0, so ist $\Sigma \mu_p x_p < x_0 \Sigma \mu_p$ und also $\dfrac{\Sigma \mu_p x_p}{\Sigma \mu_p} < x_0$; bezeichnet man den kleinsten Wert von x_p mit x_u, so ist ebenso $\dfrac{\Sigma \mu_p x_p}{\Sigma \mu_p} > x_u$. Demgemäß gilt $x_u < x < x_0$, und Entsprechendes gilt für y und z. Dieser Schluß läßt sich unter der Voraussetzung, daß kein Punkt des Körpers von den Koordinatenebenen[1]) einen unendlich-großen Abstand hat und daß $\Sigma \mu_p$ den endlichen Wert m hat, ohne weiteres auf Körper ausdehnen.

Für die thatsächliche Bestimmung der Lage des Massenmittelpunktes eines gegebenen Körpers, welche uns später (vergl. das Kapitel vom Schwerpunkte) noch ausführlicher beschäftigen wird, geben die Formeln Nr. 64 und 65 die nötigen Hülfsmittel.

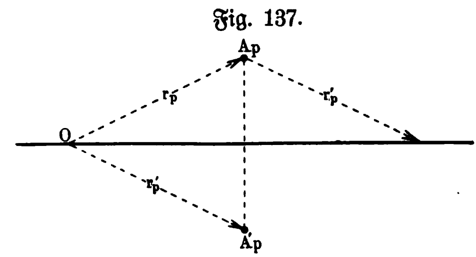
Für einen Körper mit einer Symmetrieebene giebt Formel Nr. 65 dazu ohne weiteres eine wichtige Regel.

Da die Symmetrie darin besteht, daß jedem Atome A_p von der Masse μ_p auf der einen Seite der Ebene ein Atom A'_p von derselben Masse μ_p auf der anderen Seite der Ebene entspricht und zwar so, daß $A_p A'_p$ auf der Ebene senkrecht steht und durch sie halbiert wird, so liegt der Endpunkt von

[1]) Bei der beliebigen Lage des Körpers darf man stets annehmen, daß x_p, y_p, z_p positiv sind.

$[r_p] \overset{\times}{+} [r'_p]$ und demnach auch der Endpunkt von $\mu_p [r_p] \overset{\times}{+} \mu_p [r'_p]$ in der Symmetrieebene, falls man den Ursprung O der Vektoren in die Symmetrieebene legt (vergl. Fig. 137). Da dieses für je zwei Atome A_p und A'_p gilt, so liegt auch der Massenmittelpunkt in der Symmetrieebene.

Fig. 137.



Hat ein Körper mehrere Symmetrieebenen, so liegt er in jeder derselben, d. h. in ihrer Schnittlinie bezw. in ihrem Schnittpunkte.

Für **homogene** Gebilde ($\mu_1 = \mu_2 = \cdots$) läßt sich demnach die Lage des Massenmittelpunktes oft ohne Rechnung bestimmen. Für die Kugel ist der Mittelpunkt, für den geraden Cylinder der Mittelpunkt der Achse, für das Rechtkant der Schnittpunkt der Diagonalachsen u. s. w. Massenmittelpunkt.

Demnach gilt: **Die dynamische Grundgleichung, welche ursprünglich nur für ein Atom gilt, läßt sich bei Verschiebungen auf einen starren materiellen Körper übertragen, wenn man diesen durch seinen Massenmittelpunkt ersetzt.**

Dieser ist ein materieller Punkt zweiter Art, d. h. ein dynamisches Centrum; man hat sich in ihm stets die Masse $m = \Sigma \mu_p$ des Körpers vereinigt zu denken.

Zur Bestimmung seiner Lage dienen die Formeln Nr. 64 bezw. Formel Nr. 65.

Es gilt dann: $[K] = m \,.\, [j_G]$.

Gemäß dieser Untersuchung läßt sich die betrachtete Verschiebung (aus der Ruhe) eines starren materiellen Körpers aufheben, wenn man in dessen Massenmittelpunkte eine äußere Kraft $[\overline{K}]$ vom Werte $m \,.\, j_G$ und von einer Richtung, welche der Richtung von $[j_G]$ entgegengesetzt ist, anbringt, so daß $[K]$ und $[\overline{K}]$ Gegenkräfte sind.

Dies veranschaulicht uns am einfachsten ein fester Körper, welcher in der Nähe der Oberfläche aufgehangen oder unterstützt ist. Obwohl jedes seiner Atome bei seiner gegenseitigen Einwirkung mit der Erde die Beschleunigung $[g]$ erhält, so genügt doch die Aufhängung oder Unterstützung in der Vertikalen des Massenmittelpunktes, welcher hier ($j_G = g$) **Schwerpunkt** heißt, um die Bewegung zu verhindern. Die Aufhängung oder Unterstützung liefert hier die statische Kraft $[\overline{K}]$, welche die Entwickelung der (kinetischen) Kraft $[K]$ in jedem Augenblick unterdrückt ($K = \overline{K} = m g$).

Dieselbe Betrachtung gilt auch für den Fall auf der schiefen Ebene. Daß umgekehrt eine äußere Kraft K, welche durch den Massenmittelpunkt eines starren materiellen Körpers von der Masse m geht, diesem aus der Ruhe eine **Verschiebung** von der Beschleunigung $[j_G] = \frac{[K]}{m}$ erteilt, folgt aus der Schlußbetrachtung des § 44 auf S. 234, da das System der

äußeren Kräfte, welches hier in der einen Kraft $[K]$ besteht, und das System der Effektivkräfte, welches hier zu der einen Kraft $m[j_G]$ führt, zu demselben Ergebnisse führen müssen.

Natürlich gilt die ganze Betrachtung, die für eine Bewegung aus der Ruhe angestellt wurde, auch für jeden Zeitpunkt innerhalb der Bewegung, wenn man außerdem die bereits vorhandenen Geschwindigkeiten für sich behandelt.

Als Nebenergebnis der ganzen Untersuchung folgt noch eine wichtige Regel für die Vereinigung eines Systems von parallelen Kräften gleicher Richtung, die in einzelnen Punkten eines starren materiellen Körpers angreifen.

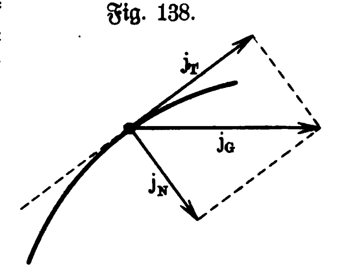
Wenn die Kräfte $[K_1]$ und $[K_2]$ der Fig. 135 nicht bezw. die Werte $\mu_1 j_G$ und $\mu_2 j_G$ haben, sondern beliebige andere Werte, so ist ihre Vereinigung auf einem Strahle $O A_{1,2}$ genau so zu bewirken, wie vorher, nur läßt sich das Verhältnis $\frac{K_1}{K_2}$ der Gleichung 3) nicht auf das Verhältnis $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ zurückführen. Es ist also dann $A_{1,2}$ der innere Teilpunkt von $A_1 A_2$ gemäß dem umgekehrten Kraftverhältnisse, nicht aber gemäß dem umgekehrten Massenverhältnisse. Die weitere Entwickelung bleibt bis zu den Formeln Nr. 64 völlig bestehen, falls man in ihr stets statt der Massen die Kräfte festhält. Man gelangt dabei zu einem Mittelpunkte des Systems der parallelen Kräfte, für dessen Lage die Formeln gelten:

$$x = \frac{\Sigma K_p x_p}{\Sigma K_p}, \quad y = \frac{\Sigma K_p y_p}{\Sigma K_p}, \quad z = \frac{\Sigma K_p z_p}{\Sigma K_p} \quad . \; . \; . \; . \quad 66)$$

Das System wird durch die resultierende Kraft vom Werte $R = \Sigma K_p$ und von der Richtung des Systems ersetzt, falls man sie in diesem Mittelpunkte anbringt, dessen Lage von der Richtung des Systems unabhängig ist. Nachdem $[R]$ bestimmt ist, darf man $[R]$ natürlich auf seiner Geraden beliebig verschieben (vergl. S. 233).

46. Die Bewegungsgleichungen der Dynamik für ein Atom. Nachdem die weitere Verwendbarkeit der, ursprünglich nur für ein Atom geltenden dynamischen Grundgleichung im vorigen Paragraphen dargelegt worden ist, wollen wir die Folgerungen betrachten, welche sich aus ihr für die Bewegungen von Atomen ergeben. Dazu betrachten wir zunächst die wichtige Zerlegung der Gesamtbeschleunigung in der Richtung von Tangente und Normale (vergl. § 25) von dem neuen Gesichtspunkte aus.

Fig. 138.



Der Kraft $K = \mu \,.\, [j_G]$ entsprechen nun die beiden Komponenten $[K_T] = \mu \,.\, [j_T]$ und $[K_N] = \mu \,.\, [j_N]$, welche bezw. Tangentialkraft und Normalkraft oder Centripetalkraft genannt werden. Da $[j_T]$ die Beschleunigung längs der Bahn mißt, welche mit der aus der Stellungsgleichung für s gewonnenen Beschleunigung j übereinstimmt, während $j_N = \frac{v^2}{\varrho}$ ist, so gilt:

$$1)\quad K_T = \mu j \quad \text{und} \quad 2)\quad K_N = \mu \frac{v^2}{\varrho} \quad \ldots\ldots \quad 67)$$

Für den Übergang von der Phoronomie zur Dynamik ist zunächst die erste Gleichung der Nr. 67 von Bedeutung, weil die Grundmethode (vergl. § 28) lediglich die Verhältnisse auf der als gegeben vorausgesetzten Bahn betrachtet. Ersetzt man hier j durch $\frac{K_T}{\mu}$, so geht jede Gleichung der Phoronomie in eine Gleichung der Dynamik über. Dazu ist ferner zu bemerken, daß neben dem Produkte aus einer Masse und einer Beschleunigung (Kraft) und neben dem Produkte aus einer Masse und einer Strecke (Massenmoment) auch noch das Produkt aus einer Masse und einer Geschwindigkeit, welches Bewegungsgröße (B) genannt wird, eine gewisse Bedeutung hat[1]. Wir betrachten nun die phoronomischen Gleichungen der Paragraphen 11 und 12 aus dem neuen Gesichtspunkte.

Wenn ein Atom in gleichförmiger Bewegung ist, so gelten auf der Bahn die Bewegungsgleichungen $s = s_0 + ct$, $v = c$, $j = 0$, welche durch Multiplikation mit der Masse μ des Atoms, wenn der Weg $s - s_0$ wieder durch w bezeichnet wird, die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} &1.\quad \mu(s - s_0) = \mu w = (\mu c)\, t \\ &2.\quad B = \mu v = \mu c \\ &3.\quad \mu j = K_T = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 68)$$

erhalten.

Die letzte Gleichung sagt aus, daß hier keine Kraft längs der Bahn wirkt, die zweite, daß die Bewegungsgröße konstant ist, die erste, daß das Produkt aus Masse und Weg stets gleich dem Produkte aus der Bewegungsgröße und der abgelaufenen Zeit ist.

Wenn ein Atom in gleichmäßig-geänderter Bewegung ist, so gelten auf der Bahn die Bewegungsgleichungen $s = s_0 + v_0 t + \frac{b}{2} t^2$, $v = v_0 + bt$, $j = b$ und $\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = b(s - s_0)$, welche durch Multiplikation mit der Masse μ des Atoms, wenn der Weg $s - s_0$ wieder mit w bezeichnet wird, die Gestalt

$$1.\quad \mu(s - s_0) = (\mu v_0)t + \frac{(\mu b)}{2} t^2$$

oder

$$\mu w = B_0 t + \tfrac{1}{2} K_T t^2$$

$$2.\quad \mu v - \mu v_0 = (\mu b)t$$

oder

$$B - B_0 = K_T \,.\, t$$

$$3.\quad \mu j = \mu b = K_T$$

$$4.\quad \tfrac{1}{2}\mu v^2 - \tfrac{1}{2}\mu v_0^2 = (\mu b)(s - s_0) = K_T . w \quad \ldots\ldots \quad 69)$$

erhalten.

[1]) Die Bewegungsgröße ist eine Richtungsgröße, wenn man ihr die Richtung der entsprechenden Geschwindigkeit giebt.

Die dritte Gleichung sagt aus, daß hier längs der Bahn eine konstante Kraft $K_T = \mu b$ in Wirkung ist.

Von besonderer Bedeutung sind noch die Gleichungen 2) und 4), weil man ihre Gültigkeit gemäß § 12, Nr. 2 und 3 auf beliebige Bewegungen ausdehnen kann.

Für die Bestandteile dieser Gleichungen hat man folgende Namen eingeführt:

1. Man bezeichnet das Produkt aus der konstanten Kraft und der abgelaufenen Zeit als Kraftantrieb, so daß $K_T \cdot t$ den tangentialen Kraftantrieb darstellt.

2. Man bezeichnet das Produkt $\frac{1}{2}\mu v^2$ aus der halben Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit als Bewegungsenergie (E) oder kinetische Energie, oder kurz als Energie, oder auch als „Lebendige Kraft".

3. Man bezeichnet das Produkt $K_T \cdot w$ aus der konstanten Tangentialkraft und dem Wege ihres Angriffspunktes als Arbeit ($\mathfrak{A}$).

Energie und Arbeit sind keine Richtungsgrößen, während sich der Kraftantrieb als solche auffassen läßt.

Demgemäß sagt Gleichung 2) aus: Die Änderung der Bewegungsgröße während der Zeit t ist gleich dem entsprechenden tangentialen Kraftantriebe.

Ferner sagt Gleichung 4) aus: Die Änderung der Energie während der Zeit t ist gleich der entsprechenden Arbeit.

Wichtige Sonderfälle der Gleichung 4) treten für $v_0 = 0$ bezw. $E_0 = 0$ und $v = 0$ bezw. $E = 0$ ein, man hat, gemäß $E - E_0 = \mathfrak{A}$, für $E_0 = 0$

$$4\text{a.} \quad E = \mathfrak{A},$$

d. h. die während der Zeit t erzeugte Energie ist gleich der entsprechenden Arbeit, und für $E = 0$

$$4\text{b.} \quad E_0 = -\mathfrak{A},$$

d. h. die während der Zeit t verbrauchte Energie ist gleich der entsprechenden Arbeit.

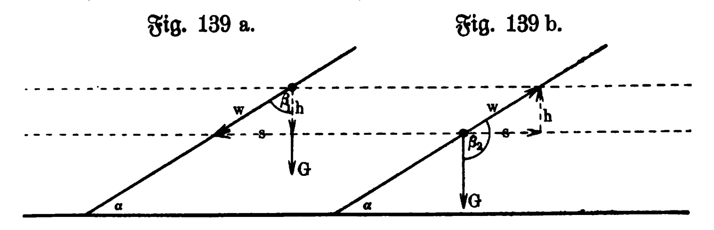
Um die Bedeutung dieser Sätze einzusehen, hat man sich an die geläufige Erfahrung zu erinnern, daß ein bewegter Körper im Gegensatz zu einem ruhenden eine gewisse Wirkung ausübt, die man im gewöhnlichen Leben als Wucht (des Stoßes oder des Schlages) oder Anprall u. s. w. zu bezeichnen pflegt. Um ein Maß für diese Wirkung zu gewinnen, kann man davon ausgehen, daß diese ohne Zweifel mit der Masse und der Geschwindigkeit wächst und abnimmt, so daß Funktionen von der Form $C m^p v^q$ für C als konstante und p und q als ganze positive Zahlen die einfachsten Ansätze für eine derartige Messung sind. Unter diesen einfachsten Ansätzen treten auch die Bewegungsgröße (mv) und die Energie ($\frac{1}{2} m v^2$) auf, sie haben vor anderen derartigen Ansätzen den großen Vorzug, zu der Kraft oder genauer zu deren tangentialer Komponente in einer einfachen Beziehung zu stehen. Die Kraft, welche sich infolge der gegenseitigen Einwirkung der Körper zeigt, tritt bei freier Entfaltung als Beschleunigung einer bewegten Masse auf (kinetische Kraft), bei vollständiger Hemmung nur als Zug oder Druck (statische Kraft). Man kann die Kraft als ein Maß für die augen-

blickliche gegenseitige Einwirkung der Körper ansehen, während sich für die dauernde gegenseitige Einwirkung zwei verschiedene Maße ergeben, nämlich das Produkt aus der (konstanten) Kraft und der Dauer ihres Auftretens, d. h. der Kraftantrieb, und das Produkt aus der (konstanten) Kraft und der in ihrem Sinne oder im Gegensinne erfolgten Verrückung ihres Angriffspunktes, d. h. die Arbeit. Die Bewegungsgröße steht nun zu dem Kraftantrieb, die Energie zur Arbeit in einfacher Beziehung, wie es die oben entwickelten Gleichungen 2) und 4) zeigen.

Die Begriffe Bewegungsgröße und Kraftantrieb sind einfacher als die Begriffe Energie und Arbeit, und es erscheint also durchaus natürlich, daß Gleichung 2) geschichtlich früher aufgestellt und benutzt wurde als Gleichung 4). Daß Gleichung 2) seit der Mitte des 19. Jahrhunderts langsam durch Gleichung 4) verdrängt worden ist, liegt darin, daß die Erweiterung von Gleichung 4) für beliebige Bewegungen fruchtbarer ist als die entsprechende Ausdehnung von Gleichung 2).

Um dies einzusehen, muß man den Begriff Arbeit noch etwas genauer betrachten. In dem ersten Lehrgange der Physik wird er an der senkrechten Hebung und Senkung von Körpern veranschaulicht, wobei er als Pro-

Fig. 139 a. Fig. 139 b.



dukt von Gewicht (G) und Hebungs- oder Senkungsstrecke (h) eingeführt wird. Bei der Senkung entspricht die Bewegung der gegenseitigen Anziehung von Erde und Körper, bei der Hebung ist sie dieser entgegengesetzt, so daß man den Unterschied der Arbeiten in beiden Fällen durch + und — bezeichnen kann, und zwar empfiehlt es sich, das Zeichen + für die Arbeit zu verwenden, welche der Anziehung entspricht, d. h. für die Senkungsarbeit, da hier die Richtung der Kraft (Gewicht G) und der Verschiebung (Senkung h) übereinstimmen.

Betrachtet man (vergl. S. 165) die senkrechte Senkung oder Hebung h auf einer schiefen Ebene (α) für eine schiefe Senkung oder Hebung w längs der Ebene, so ist $h = w \sin \alpha$. Führt man (vergl. Fig. 139 a u. b) den Winkel zwischen Kraftrichtung und Verschiebungsrichtung β_1 oder β_2 ein, so ist $h = w \cos \beta_1$ und man hat für die Senkung $+ G h = + G w \cos \beta_1$, und für die Hebung $- G h = - G w \cos \beta_1 = + G w \cos \beta_2$, da $\beta_1 + \beta_2 = 180^0$ ist. Hier werden also beide Arbeiten durch den einen Ausdruck $+ G w \cos \beta$ dargestellt, falls man den Winkel zwischen Kraftrichtung und Verschiebungsrichtung durch β bezeichnet. Für $\beta = 0$ erhält man wieder die positive Arbeit der senkrechten Senkung ($w = h$), für $\beta = 180^0$ wieder die negative Arbeit der senkrechten Hebung ($w = h$), so daß auch diese beiden Arbeiten durch den einen Ausdruck mitumfaßt werden.

Denkt man die Verschiebung [w] aus der senkrechten Komponente [h] und der wagerechten Komponente [s] zusammengesetzt, so ist die seitliche Verschiebung [s] für die Stellung von Körper und Erdoberfläche ohne Belang, sie würde sich bei einem frei beweglichen Körper, wenn kein Luftwiderstand vorhanden wäre, auch ganz ohne Kraftaufwand (Beschleunigung) durch eine einmal vorhandene horizontal gerichtete Geschwindigkeit (vergl. Wurfbewegung) in beliebiger Größe erzeugen lassen. Betrachtet man für die Bestimmung der Arbeit nur die Stellung von Körper und Erdoberfläche als wesentlich, so ist die Arbeit für die betrachtete schiefe Senkung oder Hebung dieselbe wie für die senkrechte Senkung oder Hebung und zwar gilt dann für die Berechnung der Arbeit $\mathfrak{A}$ ganz allgemein:

$$\mathfrak{A} = + G w \cos\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 70)$$

Dieser Ausdruck läßt eine doppelte Deutung zu, je nachdem man ihn als $G(w \cos\beta)$ oder als $(G \cos\beta)\, w$ auffaßt. Im ersten Falle bezeichnet $w \cos\beta$ die Projektion der Verschiebung [w] auf die Gerade der Kraft, d. h. die Verschiebungskomponente innerhalb der Geraden, welche durch die Richtung der Kraft bestimmt wird; im zweiten Falle bezeichnet $G \cos\beta$ die Projektion der Kraft [G] auf die Gerade der Verschiebung, d. h. die Kraftkomponente innerhalb der Geraden, welche durch die Richtung der Verschiebung bestimmt wird (vergl. Einl. zu Fig. 14).

Setzt man allgemein fest, daß die Arbeit nur durch die Verschiebungskomponente innerhalb der Geraden der Kraft oder nur durch die Kraftkomponente innerhalb der Geraden der Verschiebung bestimmt wird, so gelangt man für eine konstante Kraft (K) von bestimmter Richtung und für eine geradlinige Verschiebung (w) von bestimmter Richtung, wenn diese Richtungen den Winkel δ bilden, zu der Definition der Arbeit:

$$\mathfrak{A} = + K w \cos\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 71)$$

d. h. Arbeit = Produkt aus Kraft und Verschiebung und Kosinus des Zwischenwinkels.

Bei einer veränderlichen Kraft und bei einer beliebigen Verrückung von deren Angriffspunkte stellt Formel Nr. 71 die Formel für die elementare Arbeit dar ($\lim \tau = 0$), gemäß welcher die Arbeit für eine endliche Zeit berechnet werden muß.

Für eine konstante Kraft von bestimmter Richtung gilt z. B. bei beliebiger Verrückung des Angriffspunktes (vergl. S. 170) die Formel

$$\mathfrak{A} = \pm K h,$$

falls man mit h die Projektion des Weges, den der Angriffspunkt beschreibt, auf die Gerade der Kraft bezeichnet, da hier jedes Element des Weges auf dieselbe Gerade projiziert werden muß.

Zerlegt man bei einer Bewegung auf beliebiger Bahn die Effektivkraft K stets in die Tangentialkraft K_T und in die Normalkraft K_N, so fällt K_T stets in die Gerade der augenblicklichen

Verrückung (Tangente der Bahn), so daß sie allein für die Berechnung der Arbeit in Frage kommt.

Für den Fall, daß z. B. K_T einen konstanten Wert hat, gilt also (vergl. S. 243) die Formel

$$\mathfrak{A} = \pm K_T w,$$

falls man mit w den Weg des Angriffspunktes im Sinne von $s - s_0 = w$ bezeichnet, da hier jedes Element des Weges mit derselben Größe K_T multipliziert werden muß.

Da bei der Begriffsbestimmung der Arbeit die Leistung der Normalkraft, welche in der Krümmung der Bahn besteht, ganz außer Betracht bleibt und nur die Leistung der Tangentialkraft, welche längs der Bahn zur Geltung kommt, berücksichtigt wird, so ist es für die Berechnung der Arbeit gleichgültig, ob man die Arbeit von $[K] \overset{\times}{=} \mu \,.\, [j_G]$ oder von $[K_T] \overset{\times}{=} \mu \,.\, [j_T]$ einführt; die Normalkraft $[K_n]$ leistet im Sinne der ganzen Betrachtung überhaupt keine Arbeit ($\cos \delta = 0$ für $\delta = 90^0$ und für $\delta = 270^0$).

Auf dieser Gleichwertigkeit von $[K]$ und $[K_T]$ bei Berechnung der Arbeit beruht nun auch vor allem[1]) das Übergewicht, welches der Begriff Arbeit und damit auch der Begriff Energie über die alten Begriffe Kraftantrieb und Bewegungsgröße erhalten hat; der Kraftantrieb ist für die ganze Kraft $[K]$ ein anderer als für deren tangentiale Komponente $[K_T]$, die Arbeit ist für beide Kräfte genau dieselbe.

Darum hat auch die Übertragung der Gleichungen 2) und 4) gemäß § 12, Nr. 2 und 3 auf beliebige Bewegungen bei Gleichung 4) eine weit umfassendere Bedeutung als bei Gleichung 2).

Zeichnet man für die Übertragung der Gleichung 2) statt der Beschleunigung-Zeitlinie des § 12 die Tangentialkraft-Zeitlinie, indem man die zusammengehörigen Werte von t und K_T als Abscissen und Ordinaten aufträgt, so erhält man die Beziehung:

$$B - B_0 = F_0^t (K_T \perp t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 72)$$

d. h. die Änderung der Bewegungsgröße wird bei jeder Bewegung durch die entsprechende Fläche der Tangentialkraft-Zeitlinie dargestellt.

Da diese Fläche für die Bewegung von 0 bis t die Summation der tangentialen Komponenten der elementaren Kraftantriebe darstellt, welche in ihrer Vereinigung wiederum als „tangentialer Kraftantrieb“ für die Zeit $0 \ldots t$ bezeichnet werden können, so gilt auch:

> Die Änderung der Bewegungsgröße ist bei jeder Bewegung gleich dem entsprechenden tangentialen Kraftantrieb.

Zeichnet man für die Übertragung der Gleichung 4) statt der Beschleunigung-Weglinie des § 12 die Tangentialkraft-Weglinie, indem man die zusammengehörigen Werte der Stellung s für $w = s - s_0$ und der Tan-

[1]) Außerdem darauf, daß die beobachteten Kräfte der Außenwelt meist nur durch die Lage der Körper bedingt sind, deren gegenseitiger Einwirkung sie entsprechen.

gentialkraft K_T als Abscissen und Ordinaten aufträgt, so erhält man die Beziehung:

$$E - E_0 = F_0^t (K_T \perp w) = F_{s_0}^s (K_T \perp w) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 73)$$

d. h. die Änderung der Energie wird bei jeder Bewegung durch die entsprechende Fläche der Tangentialkraft-Weglinie dargestellt.

Da diese Fläche für die Bewegung von 0 bis t bezw. von s_0 bis s die Summation der elementaren Arbeiten darstellt, für deren Bestimmung etwaige Normalkomponenten K_N der Kraft K gar nicht in Frage kommen, und da man diese elementaren Arbeiten in ihrer Vereinigung wieder als „Arbeit" bezeichnen kann, so gilt auch:

> Die Änderung der Energie ist bei jeder Bewegung gleich der entsprechenden Arbeit.

Sind z. B. bei einem geworfenen Körper die Geschwindigkeiten in zwei Punkten der Bahn, welche den senkrechten Abstand h haben, bezw. v_0 und v, so ist die entsprechende Arbeit bei einem Gewichte G des Körpers $\pm Gh$ und man hat:

$$E - E_0 = \pm Gh.$$

Dasselbe Ergebnis liefert die Formel Nr. 53 auf S. 171 nach Multiplikation mit μ.

In einem Falle sind die beiden Gleichungen 2) und 4) von gleich umfassender Bedeutung, nämlich dann, wenn K_n fortgesetzt den Wert 0 hat, so daß keine Krümmung der Bahn erfolgt; es ist dann $[K] \stackrel{\times}{=} [K_T]$.

Für Bewegungen auf gerader Linie gilt also: Die Änderung der Bewegungsgröße ist gleich dem entsprechenden Kraftantrieb.

Dieser Satz wird natürlich auch für krummlinige Bewegungen von Bedeutung, wenn man sie nach der Projektionsmethode behandelt; man muß dabei den Projektionen des Atoms dieselbe Masse μ zuschreiben, wie diesem selbst.

Erwächst die Kraft K aus mehreren Seitenkräften $K_1, K_2, \ldots K_n$, so ist die Arbeit der Mittelkraft K für eine elementare Verschiebung w stets gleich der (algebraischen) Summe der Arbeiten der Seitenkräfte. Bilden nämlich K und $K_1, K_2, \ldots K_n$ bezw. mit der Richtung der Verschiebung die Winkel α und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, so ist K_T einerseits $K \cos \alpha$ und anderseits $K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \cdots K_n \cos \alpha_n$ und demnach $K_T \,.\, w$ einerseits $K w \cos \alpha$ und anderseits $K_1 w \cos \alpha_1 + K_2 w \cos \alpha_2 + \cdots K_n w \cos \alpha_n$ (vergl. dazu Einl. S. 37).

Setzt man dem System $K_1, K_2, \ldots K_n$ noch die Gegenkraft von K zu, so zerstören sich die Kräfte (Gleichgewicht), und die Arbeit ist Null. Dies gilt natürlich für jede Verrückung, nicht bloß für die thatsächlich vorhandene w, sondern für eine beliebig erdachte (virtuelle), d. h. die Arbeit von Kräften, die an einem Punkte im Gleichgewicht sind, ist für jede virtuelle Verrückung Null, und umgekehrt.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß es oft zweckmäßig ist, die Arbeit $\mathfrak{A}$ im Verhältnisse zu der Zeit t zu betrachten, innerhalb welcher sie geleistet wird; man bezeichnet dieses Verhältnis $\frac{\mathfrak{A}}{t}$ als durchschnittliche Arbeitsstärke.

Für $\mathfrak{A} = K_T \,.\, w$ erhält es die Gestalt $K_T \cdot \frac{w}{t}$, wobei $\frac{w}{t}$ die durchschnittliche Geschwindigkeit für das Durchlaufen von w, d. h. für die Bewegung des Angriffspunktes der Kraft darstellt.

Beim Übergange zur Grenze ($lim\, \tau = 0$) erhält man auch hier statt des Durchschnittswertes die Werte für bestimmte Zeitpunkte, welche gelegentlich auch Konstanten sein können.

Für Kilogramm und Meter als Einheit bezeichnet man 75 Einheiten der Arbeitsstärke, also 75 Kilogramm-Meter pro Sekunde als Pferdestärke.

Alle Formeln dieses Paragraphen sind lediglich als Umformungen voneinander zu betrachten, deren Ausgangspunkt die Stellungsgleichung der Phoronomie bildet. Sie beziehen sich zunächst auf Effektivkräfte bezw. auf die anderen (effektiven) Größen, welche aus der Bewegung selbst abgeleitet werden.

Sobald das Atom als Element eines Körpers betrachtet wird, hat man die Effektivkräfte wiederum als Resultanten von äußeren und inneren Kräften anzusehen, wobei man zu bestimmten Beziehungen zwischen den Größen, welche den äußeren Kräften entsprechen, und zwischen den Größen, welche den Effektivkräften entsprechen, gelangt (vergl. S. 232).

In diesen Beziehungen zeigt sich dann erst die eigentliche Bedeutung der hier entwickelten Formeln.

Um diese Bedeutung von vornherein zu charakterisieren, kann man auch für das einzelne Atom die äußere Kraft und die Effektivkraft unterscheiden, obwohl hier, wo ja keine inneren Kräfte in Frage kommen, beides nur ein anderer Ausdruck für dieselbe Thatsache ist.

Während man thatsächlich aus einer beobachteten Beschleunigung auf eine Kraft schließt, welche für eine konstante Beschleunigung selbst konstant genannt wird, und diese Kraft als den einen Teil einer gegenseitigen Einwirkung anzusehen hat, ist es für eine erste Veranschaulichung ganz nützlich, diesen Teil unter dem Namen „Äußere Kraft“ als „Ursache“ anzusehen und ihm die „Effektivkraft“ als Wirkung gegenüberzustellen. Man muß sich dann irgendwo im Raume einen Sitz der äußeren Kraft $[A]$ vorstellen, etwa als anziehendes oder abstoßendes Centrum, von dem aus in der Richtung der Kraft Bewegungsänderungen auf das Atom von der Masse μ übertragen werden, so daß sich an diesem eine, der äußeren Kraft $[A]$ proportionale Effektivkraft $[K]$ entwickelt. Ist das Atom auf der Geraden der Kraft in Ruhe, so entsteht eine geradlinige Bewegung, bei der die äußere Kraft die Geschwindigkeit des Atoms während der n aufeinander folgenden Zeiten $\tau, \tau, \ldots \tau$ von 0 auf v_1, von v_1 auf $v_2, \ldots$, von v_{n-1} auf v_n steigert, so daß die Bewegungsgröße des Atoms demgemäß von 0 auf μv_1, von μv_1 auf $\mu v_2 \ldots$, von μv_{n-1} auf μv_n gesteigert wird. Dabei sind die mittleren Beschleunigungen $\frac{v_1 - 0}{\tau}, \frac{v_2 - v_1}{\tau}, \ldots \frac{v_n - v_{n-1}}{\tau}$ und die mittleren Effektivkräfte $\mu \frac{v_1 - 0}{\tau}, \mu \frac{v_2 - v_1}{\tau}, \ldots \mu \frac{v_n - v_{n-1}}{\tau}$ in Rechnung zu

stellen. Sind diese konstant, so daß $\frac{v_p - v_{p-1}}{\tau} = b$ gesetzt werden darf, so bringt die äußere Kraft in der Zeiteinheit die konstante Beschleunigung b hervor, so daß die entsprechende konstante Effektivkraft $[\mu b]$ als ihr Maß gelten darf. Ist diese Konstanz nicht vorhanden, so ist durch einen Grenzübergang aus $\frac{v_1 - 0}{\tau}, \frac{v_2 - v_1}{\tau}, \ldots \frac{v_n - v_{n-1}}{\tau}$ für $\lim \tau = 0$ der Wert j für die Zeit t herzustellen, so daß nun die entsprechende veränderliche Effektivkraft μj als Maß der äußeren Kraft $[K]$ zu gelten hat. Ob man sich die Kraft stetig verändert (zweite Annäherung) oder unendlich oft pulsierend (erste Annäherung) denkt, ist für das Ergebnis ($\lim \tau = 0$) gleichgültig.

Innerhalb dieser Vorstellung kann man auch für ein Atom von dem Antrieb der äußeren Kraft und von der Arbeit der äußeren Kraft sprechen, im Gegensatze zu dem Antrieb der Effektivkraft und der Arbeit der Effektivkraft, doch sieht man dabei nur dieselbe Größe von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus an.

Der Gegensatz wird aber von Bedeutung, sobald beim Auftreten innerer Kräfte zwischen äußerer Kraft und Effektivkraft thatsächlich ein Unterschied vorhanden ist.

In Bezug auf die Gleichungen 2) und 4) mag in Bezug auf § 14 noch bemerkt werden, daß die dort gegebenen Gleichungen 1, 2, 3 durch Multiplikation mit μ übergehen in

$$1.\quad B = \mu \frac{ds}{dt}$$

$$2.\quad K_T = \frac{dB}{dt} = \mu \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$3.\quad \mu v\, dv = K_T\, ds$$

und daß die Umkehrungen

$$1.\quad \mu s = \text{Konstante} + \int B \,.\, dt$$

$$2.\quad B = \text{Konstante} + \int K_T \,.\, dt = \text{Konstante} + \text{Tangential-Kraftantrieb}$$

$$3.\quad \tfrac{1}{2}\mu v^2 = E = \text{Konstante} + \int K_T \,.\, ds = \text{Konstante} + \text{Arbeit}$$

lauten.

47. Die dynamischen Größen für materielle Körper. Um die Definition einer dynamischen Größe, welche für ein Atom gegeben ist, auf ein Molekül oder auf einen Körper zu übertragen, geht man davon aus, daß einerseits die phoronomischen Größen für ein Atom durch Multiplikation mit der Masse in die entsprechenden dynamischen Größen übergehen und daß anderseits die Masse eines Körpers durch die Massensumme seiner Atome dargestellt wird. So ergiebt sich als sachgemäße Festsetzung, daß die dynamischen Größen für Körper aus den entsprechenden dynamischen Größen für Atome überhaupt durch Addition entstehen, durch geometrische, wenn sie Richtungsgrößen sind, durch arithmetische, wenn sie einfache, gegebenenfalls durch

die Vorzeichen + oder — unterschiedene Größen (Scalaren) sind. Dabei ist aber zu bemerken, daß sich die geometrische Addition erst ausführen läßt, wenn für die Vereinigung zweier solcher Richtungsgrößen an verschiedenen Atomen gemäß der Beschaffenheit des Körpers bestimmte Festsetzungen getroffen sind.

Während die Zusammenfassung der Massen der einzelnen Atome zur Masse des Körpers durch arithmetische Addition geschah, gab die Zusammenfassung der Effektivkräfte der einzelnen Atome bei der Verschiebung eines starren materiellen Körpers ein Beispiel von geometrischer Addition, für deren Ausführung aber die Festsetzung über den Zusatz und die Tilgung von Gegenkräften grundlegend war.

Die Bewegungsgröße eines Atoms wird stets als Richtungsgröße aufgefaßt, indem man die Richtung der entsprechenden Geschwindigkeit auf sie überträgt, und demgemäß ist die Bewegungsgröße eines Körpers für jedes Zeitelement durch geometrische Addition herzustellen.

Dasselbe gilt in Bezug auf den Kraftantrieb, dem man die Richtung der entsprechenden Kraft beilegt.

Dagegen wird die Energie eines Atoms nicht als Richtungsgröße eingeführt, so daß also die Energie eines Körpers durch arithmetische Addition gewonnen wird.

Dasselbe gilt in Bezug auf die Arbeit.

Die Posten, welche zur Energie des Körpers zusammentreten, haben alle dasselbe Vorzeichen (v^2), die Posten, welche in ihrer Vereinigung die Arbeit für ein System von an einzelnen Atomen wirkenden Kräften darstellen, können das Vorzeichen + oder das Vorzeichen — haben.

48. Die Bewegungsgleichungen der Dynamik für Verschiebungen starrer materieller Körper und die Bedeutung des Massenmittelpunktes bei beliebigen Bewegungen. Die Bildung der Begriffe, welche in § 46 für ein Atom eingeführt und in § 47 auf Körper ausgedehnt wurden, entspricht Beobachtungen von Bewegungen fester Körper der Außenwelt (vergl. auch die entsprechenden Beispiele) und zwar im besonderen von Verschiebungen, während die entsprechenden Bewegungsgleichungen wiederum zunächst nur für ein Atom aufgestellt werden konnten. Es erhebt sich daher die Frage, wie weit sich jene Gleichungen auf Verschiebungen starrer materieller Körper übertragen lassen.

Wir stellen zunächst die Bewegungsgröße für eine solche Bewegung fest. Die Vektoren von der Gestalt $\mu\,[v]$ bilden ein Parallelsystem, das dem in § 45 behandelten Systeme der Vektoren von der Gestalt $\mu\,[j_G]$ genau entspricht. Die Behandlung würde also auch hier zu einem entsprechenden Ergebnisse führen, falls man voraussetzen dürfte, daß auch zwei Bewegungsgrößen von gleichem Werte und entgegengesetzter Richtung innerhalb derselben starren Geraden sich aufheben.

Denken wir uns, wie Fig. 140 zeigt, den beiden Atomen A_1 und A_2 bezw. von den Massen μ_1 und μ_2 die Geschwindigkeiten $[v_1]$ und $[v_2]$ erteilt, so daß $\mu_1 v_1 = \mu_2 v_2$ ist, so müßte dieser Voraussetzung gemäß das

aus A_1 und A_2 bestehende Molekül bei starrer Verbindung von A_1 und A_2 in Ruhe bleiben, falls es vor dem Auftreten von $[v_1]$ und $[v_2]$ in Ruhe war. Denken wir uns $[v_1]$ durch eine konstante Kraft $[K_1] \overset{x}{=} \mu_1 [b_1]$ und $[v_2]$ durch eine konstante Kraft $[K_2] \overset{x}{=} \mu_2 [b_2]$ erzeugt und zwar innerhalb der Zeit t, so ist $v_1 = b_1 t$ und $v_2 = b_2 t$, so daß die Gleichung $\mu_1 v_1 = \mu_2 v_2$ zu der Gleichung $K_1 t = K_2 t$, d. h. zu $K_1 = K_2$ führt.

Fig. 140.

L_1 - - - - - v_1 A_1 ——— A_2 v_2 - - - - - L_2

Denkt man nun A_1 und A_2 zunächst bezw. unter dem Einflusse von $[K_1]$ und $[K_2]$ aus den Ruhelagen auf der Geraden $L_1 L_2$ frei beweglich, bis sie bezw. die Geschwindigkeiten $[v_1]$ und $[v_2]$ erhalten haben, und dann plötzlich starr verbunden, so hat die starre Verbindung jetzt beiderseits einen Zug oder Druck proportional zu $K_1 = K_2$ auszuhalten, d. h. sie bleibt in Ruhe gemäß dem Satze über Gegenkräfte an starren Verbindungen. (Vergl. auch die Betrachtung am Schlusse von § 46.)

Da also die betrachtete Voraussetzung richtig ist, so gilt der Satz: *Die Bewegungsgröße eines starren materiellen Körpers ist bei Verschiebungen gleich der Bewegungsgröße seines Massenmittelpunktes.*

Zerlegt man die Effektivkraft $\mu [j_G]$ jedes Atoms nach der Tangente und nach der Normale der Bahn, so entstehen zwei Systeme bezw. von der Gestalt $\mu [j_T]$ und $\mu [j_N]$, welche gemäß § 45 behandelt werden können. Das erste ist durch eine Kraft $m [j_T]$ im Massenmittelpunkte, das zweite durch eine Kraft $m [j_N]$ im Massenmittelpunkte ersetzbar, beide Kräfte lassen sich wieder zu $m [j_G]$ vereinigen.

Demgemäß gilt der Satz: *Der Kraftantrieb für einen starren materiellen Körper ist bei Verschiebungen gleich dem Kraftantriebe für seinen Massenmittelpunkt und zwar sowohl im ganzen, als auch in tangentialer und in normaler Richtung.*

Bildet man für jedes Atom die Energie $\frac{1}{2} \mu v^2$, so ist die Summe aller dieser Energie $\frac{1}{2} v^2 (\mu_1 + \mu_2 + \cdots) = \frac{1}{2} m v^2$, d. h. *die Energie eines starren materiellen Körpers ist bei Verschiebungen gleich der Energie seines Massenmittelpunktes.*

Da bei Verschiebungen der Weg des Angriffspunktes für jede Kraft aus der Gruppe $\mu [j_T]$ und für die Kraft $m [j_T]$ derselbe ist, und da ferner $\Sigma \mu_p j_T = m j_T$ ist, gilt auch:

Die Arbeit für einen starren materiellen Körper ist bei Verschiebungen gleich der Arbeit für seinen Massenmittelpunkt.

Aus alledem folgt:

Bei Verschiebungen läßt sich ein starrer materieller Körper in dynamischer Hinsicht stets durch seinen Massenmittelpunkt ersetzen. 74)

Dabei bleiben „Bewegungsgröße“ und „Energie“ als Effektivgrößen bestehen, d. h. sie sind aus der Bewegung zu berechnen, während „Kraftantrieb“

und „Arbeit“ als „Antrieb der äußeren Kräfte“ und als „Arbeit der äußeren Kräfte“ aufgefaßt werden dürfen, wobei daran erinnert werden mag, daß hier die äußeren Kräfte einer im Massenmittelpunkte angreifenden äußeren Kraft gleichwertig sind.

Dazu ist noch zu bemerken, daß sich für ein großes Gebiet von Kräften der Außenwelt die Arbeit $\mathfrak{A}$ in der Gleichung

$$E - E_0 = \mathfrak{A}$$

in der Form $-(U - U_0)$ darstellen läßt, wobei E_0 und U_0 der Zeit 0 und E und U der Zeit t entsprechen. Hängt U, abgesehen von Konstanten, nur von der Stellung des Punktes zu der, mit ihm in Einwirkung stehenden Materie im Raume ab, so heißt U das Potential oder auch die potentielle Energie (Spannungsenergie) für die bestimmte Stellung oder für die bestimmte Zeit. Man hat dann:

$$E - E_0 = -(U - U_0)$$

oder

$$E + U = E_0 + U_0.$$

Bezeichnet man den konstanten Wert $E_0 + U_0$ durch C, so gilt:

$$E + U = C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 75)$$

d. h. die Summe von Bewegungsenergie und Spannungsenergie ist eine Konstante. (Satz von der Erhaltung der Energie.)

Fällt z. B. ein Körper von der Masse m, dessen Massenmittelpunkt sich im Abstande h von der Erdoberfläche in Ruhe befindet, frei, so gilt für zwei Stellen 1 und 2, die den Abstand a haben,

$$\tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2 = m g a.$$

Hat der Massenmittelpunkt für 1 den Abstand h_1 und für 2 den Abstand h_2 von der Erdoberfläche, so ist $a = h_1 - h_2$, d. h. es ist:

$$\tfrac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2 = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 = C.$$

Um C zu bestimmen, lassen wir die Stelle 1 mit der Anfangslage zusammenfallen, für welche $h_1 = h$ und $v_1 = 0$ ist und erhalten $C = mgh$.

Die Energie mgh zerlegt sich also für jede Stelle in einen aktuellen Teil $\frac{1}{2} m v_p^2$ und einen potenziellen Teil $m g h_p$. Das Potential $U = m g h_p$ erhält für einen bestimmtes h_p einen bestimmten Wert, d. h. es ist für eine Ebene im Abstande h_p konstant. Man nennt eine solche Fläche (U = Konstante), wie hier die Ebene, eine Niveaufläche.

Da beliebige Bewegungen eines starren materiellen Körpers, unter Auszeichnung des Massenmittelpunktes (vergl. § 32) auf Verschiebungen dieses Punktes und Drehungen um Achsen durch diesen Punkt zurückgeführt werden können, so läßt sich ein starrer materieller Körper auch bei beliebigen Bewegungen in gewisser Hinsicht durch seinen Massenmittelpunkt ersetzen, nämlich dann, wenn die Drehungen gegenüber der Verschiebung zurücktreten oder wenn sie aus irgend einem Grunde unsere Aufmerksamkeit nicht fesseln. Will man also die Bewegung eines starren materiellen Körpers durch die Bewegung eines Punktes veranschau-

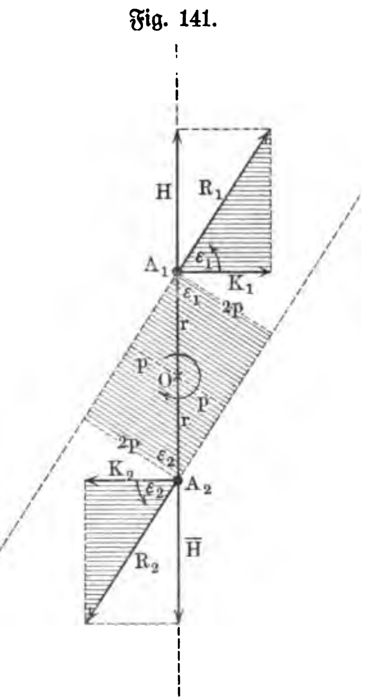
lichen, so hat man dazu im allgemeinen den Massenmittelpunkt zu wählen.

Andere Beispiele für die Zerlegung von A in $-(U - U_0)$ folgen aus den Betrachtungen auf S. 162 u. f. (Vergl. die Anwendung Nr. 3 dieses Abschnittes.) Das Potential ist, der Entwickelung entsprechend, eine bestimmte Arbeit und kann als solche von Fall zu Fall veranschaulicht werden.

49. Folgerungen aus der dynamischen Grundgleichung für Drehungen starrer materieller Körper. Versucht man einen starren materiellen Körper auch bei Drehungen mit Hülfe der dynamischen Grundgleichung durch einen materiellen Punkt zweiter Art zu ersetzen, so gelangt man schon bei den einfachsten vorbereitenden Aufgaben nicht zum Ziele[1]).

Wenn sich z. B. ein starres Molekül aus zwei Atomen von derselben Masse μ um eine zu $A_1 A_2$ senkrechte Achse durch seinen Massenmittelpunkt O dreht, wie es Fig. 141 für eine in O auf der Zeichnungsebene senkrechte Achse andeutet, so treten an beiden Atomen A_1 und A_2 Effektivkräfte von demselben Werte auf. Für die Winkelgeschwindigkeit φ und die Winkelbeschleunigung ι treten senkrecht zu $A_1 A_2$ die beiden Tangentialkräfte $[K_1]$ und $[K_2]$ vom Werte $\mu r \iota$ auf, während sich die beiden Normalkräfte innerhalb $A_1 A_2$ als Gegenkräfte vom Werte $\mu r \varphi^2$ aufheben. Versucht man die beiden Tangentialkräfte $[K_1]$ und $[K_2]$ wiederum durch Einführung von Gegenkräften $[H]$ und $[\overline{H}]$ zu vereinigen, so treten an die Stelle von $[K_1]$ und $[K_2]$ die Kräfte $[R_1]$ und $[R_2]$, welche $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2)$ im Endlichen keinen Schnittpunkt haben, ebensowenig wie $[K_1]$ und $[K_2]$ selbst. Für alle Kräfte $[R_1]$ und $[R_2]$, welche bei beliebigen Werten von $[H]$ und $[\overline{H}]$ eingeführt werden können, gilt gemäß der Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke:

Fig. 141.



$$\frac{K_1}{R_1} = \frac{K_2}{R_2} = \frac{2p}{2r},$$

d. h. man hat:

$$K \,.\, 2r = R \,.\, 2p,$$

falls man die gemeinsamen Werte von $[K_1]$ und $[K_2]$ durch K und von $[R_1]$ und $[R_2]$ durch R bezeichnet.

[1]) Die sogenannte Reduktion träger Massen (z. B. für ein Schwungrad) benutzt außer dem materiellen Punkte, in welchem die Masse verdichtet gedacht werden muß, noch die Punkte (oder wenigstens einen Punkt) der festen Achse.

Bei allen Umformungen behält also das Produkt aus R und aus dem Abstande (Arm oder Breite) $2p$ von $[R_1]$ und $[R_2]$ denselben Wert, nämlich $K \cdot 2r$.

Dieser Wert ist demnach für die betrachtete Drehung bezeichnend und kann als deren Maß bestimmt werden. Man nennt zwei Kräfte wie $[K_1]$ und $[K_2]$ oder $[R_1]$ und $[R_2]$ zusammen ein **Kräftepaar** und bezeichnet das entsprechende **Produkt aus Kraft und Arm** als dessen **Moment**. Will man auch noch den Sinn der Drehung mit bezeichnen, so kann man den Paaren unserer Figur, welche der Uhrzeigerbewegung entsprechen, ein positives, Paaren von entgegengesetztem Drehungssinn ein negatives Moment geben.

Man kann das **Moment eines Kräftepaares** auch durch die **beiden Kräfte**, welche es bilden, darstellen, gemäß folgender Definition:

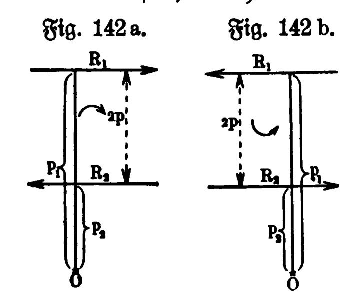


Fig. 142a. Fig. 142b.

Innerhalb der Ebene versteht man unter dem Momente einer Kraft in Bezug auf einen Drehpunkt O das Produkt aus der Kraft und deren Abstande vom Drehpunkte und zwar mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem die Drehung der Uhrzeigerbewegung entspricht oder nicht. (Vergl. Einl. zu Fig. 13.)

Es ergiebt sich dann nach Fig. 142 unmittelbar die Beziehung: Das Moment eines Kräftepaares ist gleich der (algebraischen) Summe der Momente der Kräfte, welche es bilden, und zwar für **jeden** Drehpunkt innerhalb der Ebene des Kräftepaares.

Man hat in Fig. 142a die Beziehung $+ 2p \cdot R = + p_1 R_1 - p_2 R_2 = + R(p_1 - p_2)$ und in Fig. 142b die Beziehung $- 2p \cdot R = - p_1 R_1 + p_2 R_2 = - R(p_1 - p_2)$.

Bezeichnet man das Moment des Kräftepaares, das man auch kurz Kraftmoment nennen kann, mit Mo, so ist $Mo = K \cdot 2r = \iota(2\mu r^2)$ und

$$\iota = \frac{Mo}{\mu r^2 + \mu r^2}.$$

Da ein Kräftepaar nicht auf eine Kraft zurückgeführt werden kann, so ist das Molekül bei der betrachteten Drehung nicht durch einen materiellen Punkt ersetzbar.

Wir betrachten noch die Drehung einer Strecke $L_1 L_2$, welche mit beliebig vielen Molekülen der oben betrachteten Art symmetrisch zu O besetzt ist, wobei die Masse von Molekül zu Molekül verschieden sein kann, und zwar um eine Achse senkrecht zu $L_1 L_2$ durch ihren Mittelpunkt O.

Bezeichnen in Fig. 143 A_p und A'_p die Atome einer Gruppe von der Masse μ_p, so sind für eine Winkelbeschleunigung ι in Rechnung zu stellen die Tangentialkräfte $[K_p]$ und $[K'_p]$ vom Werte $\mu_p r_p \iota$, während die entsprechenden Normalkräfte sich wieder zerstören.

Das System aller parallelen Kräfte $[K_p]$ für OL_1 hat einen Mittelpunkt, dessen Abstand von O auf OL_1 durch ϱ_1 bezeichnet werden mag. Es ist dann nach Formel Nr. 66:

$$r_1(\mu_1 r_1 \iota) + r_2(\mu_2 r_2 \iota) + \cdots = \varrho_1(\mu_1 r_1 \iota + \mu_2 r_2 \iota + \cdots),$$

d. h.:

$$\iota(\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 + \cdots) = \iota\,\varrho_1(\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2 + \cdots)$$

oder

$$\varrho_1 = \frac{\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 + \cdots}{\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2 + \cdots}.$$

Der Zähler von ϱ_1 mag durch $\mathfrak{Tr}_1$ bezeichnet werden, der Nenner von ϱ_1 läßt sich noch umformen, wenn man den Massenmittelpunkt von OL_1 sucht, der von O den Abstand s_1 haben mag. Es ist nach Formel Nr. 64:

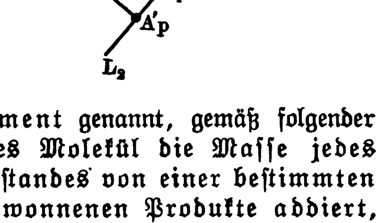
$$s_1(\mu_1 + \mu_2 + \cdots) = \mu_1 r_1 + \mu_2 r_2 + \cdots$$

und demnach ergiebt sich für $\mu_1 + \mu_2 + \cdots = m$ die Beziehung:

$$\varrho_1 = \frac{\mathfrak{Tr}_1}{m \cdot s_1}.$$

Die Kraft $[R_1]$, welche im Abstande ϱ_1 das System der betrachteten Kräfte ersetzt, hat den Wert $\iota(\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2 + \cdots) = m(\iota s_1)$. Betrachtet man ebenso die Strecke OL_2, so gelangt man zu einer Kraft $[R_2]$ im Abstande ϱ_2 von O auf OL_2.

Fig. 143.



Wegen der Symmetrie ist $R_1 = R_2 = R$ und $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$, so daß ein Kräftepaar von Momenten $Mo = R(2\varrho)$ entsteht. Man hat:

$$Mo = m\iota s_1\left(2\frac{\mathfrak{Tr}_1}{m s_1}\right) = \iota(2\,\mathfrak{Tr}_1),$$

d. h. für $2\,\mathfrak{Tr}_1 = \mathfrak{Tr}$:

$$\iota = \frac{Mo}{\mathfrak{Tr}}.$$

Die Größe $\mathfrak{Tr}$ wird **Trägheitsmoment** genannt, gemäß folgender Erklärung: **Wenn man für ein starres Molekül die Masse jedes Atoms mit dem Quadrate seines Abstandes von einer bestimmten Geraden multipliziert und die so gewonnenen Produkte addiert, so heißt die erhaltene Summe das Trägheitsmoment in Bezug auf die Gerade.**

Diese Erklärung gilt auch für Körper, falls wieder $\Sigma\mu_p$ den endlichen Wert m hat. Bezeichnet man nämlich unter der hier selbstverständlichen Voraussetzung, daß jedes r_p endlich ist, den größten Abstand r_p mit r_0 und den kleinsten mit r_u, so liegt $\mathfrak{Tr}$ in den Grenzen $r_u^2 m$ und $r_0^2 m$.

Die beiden behandelten Beispiele führen zu der Gleichung:

$$\left.\iota = \frac{Mo}{\mathfrak{Tr}},\ \text{d. h. Winkelbeschleunigung} = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}}\right\} \cdots 76)$$

Diese Gleichung hat eine weit umfassendere Gültigkeit, als man auf Grund der behandelten einfachen Beispiele vermuten sollte. Der Nachweis

dieser weiteren Gültigkeit, welcher uns später beschäftigen wird, gehört nicht an diese Stelle, wo nur gezeigt werden sollte, daß bei Drehungen der Ersatz eines starren materiellen Körpers durch einen materiellen Punkt nicht möglich ist.

Denkt man in den behandelten Beispielen äußere Kräftepaare angebracht, deren beiden Kräfte Gegenkräfte der dargestellten Kräfte $[K_1]$ und $[K_2]$ bezw. $[R_1]$ und $[R_2]$ sind, so wird die Drehung, soweit sie von Kräften abhängt, aufgehoben, es tritt entweder Ruhe ein oder gleichförmige Drehung.

Es ist nun die Frage, ob umgekehrt ein äußeres Kräftepaar vom Momente Mo, dessen Ebene durch den Massenmittelpunkt eines Körpers geht[1]), diesem eine Drehung von der Winkelbeschleunigung $\iota = \frac{Mo}{\mathfrak{Tr}}$ erteilt und zwar um eine Achse durch den Massenmittelpunkt, senkrecht zur Ebene des Paares, für welche der Körper das Trägheitsmoment $\mathfrak{Tr}$ hat.

Diese Frage ist im allgemeinen zu verneinen, doch mag vorgreifend bemerkt werden, daß bei Drehungen um eine feste Achse (vergl. Maschinenmodelle) die Gleichung $\iota = \frac{Mo}{\mathfrak{Tr}}$ gilt, unter der Voraussetzung, daß die Ebene des Paares vom Momente Mo senkrecht zur Drehungsachse liegt, und daß der Körper in Bezug auf diese Achse das Trägheitsmoment $\mathfrak{Tr}$ hat.

In diesem Falle und in anderen Fällen, für welche $\iota = \frac{Mo}{\mathfrak{Tr}}$ gilt, gehen die phoronomischen Gleichungen für gleichmäßig-geänderte Drehungen (S. 66), welche ja nur einen besonderen Fall der allgemeinen Gleichungen des § 11 darstellen, durch Multiplikation mit $\mathfrak{Tr}$ über in:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \mathfrak{Tr}(\sigma - \sigma_0) = \mathfrak{Tr}\,\varphi_0\, t + \frac{1}{2} Mo\, t^2 \\ 2. & \mathfrak{Tr}\,\varphi - \mathfrak{Tr}\,\varphi_0 = Mo\, t \\ 3. & \mathfrak{Tr}\,\iota = Mo \\ 4. & \frac{1}{2}\mathfrak{Tr}\,\varphi^2 - \frac{1}{2}\mathfrak{Tr}\,\varphi_0^2 = Mo(\sigma - \sigma_0) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 77)$$

Eine entsprechende Betrachtung führt dann wieder zu der erweiterten Gültigkeit der Gleichungen 2) und 4).

Dabei bedeutet $\frac{1}{2}\mathfrak{Tr}\,\varphi^2$ wiederum die Summe der Energien der einzelnen Atome, d. h. also die Energie des Körpers, denn man hat:

$$\frac{1}{2}(\mu_1 r_1^2 \varphi^2 + \mu_2 r_2^2 \varphi^2 + \cdots) = \frac{1}{2}\mu_1 (r_1 \varphi)^2 + \frac{1}{2}\mu_2 (r_2 \varphi)^2 + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\mu_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2 v_2^2 + \cdots$$

Dabei bedeutet ferner $Mo(\sigma - \sigma_0) = K \,.\, 2r(\sigma - \sigma_0)$ für ein konstantes K wiederum die geleistete Arbeit, da jede der Kräfte $[K_1]$ und $[K_2]$ in ihrer Richtung den Weg $r(\sigma - \sigma_0)$ zurücklegt, während für veränderliche Kräfte die entsprechende graphische Erweiterung eintreten muß.

Die Arbeit stellt sich also hier dar als Produkt aus Kraftmoment $(K.2r)$ und Winkelweg $(\sigma - \sigma_0)$, die Arbeitsstärke (vergl. S. 248) demnach als Produkt aus Kraftmoment und Winkelgeschwindigkeit.

[1]) Die Verschiebung der Kräftepaare ist hier noch nicht als zulässig erwiesen.

Bei gleichförmigen Drehungen oder bei periodisch-veränderlichen Drehungen, welche durchschnittlich als gleichförmig angesehen werden können, halten sich oft zwei Kräftepaare von gleichen und entgegengesetzten Momenten das Gleichgewicht. Für die Arbeitsstärke **eines** von ihnen gilt dann, wenn man die Anzahl n der Umdrehungen in der Minute einführt, der Ausdruck:

$$Mo \, . \, \frac{n \, . \, 2\pi}{60}.$$

Will man diese in Pferdestärken (N) umrechnen, so hat man für Kilogramm und Meter als Einheit noch durch 75 zu dividieren, so daß sich ergiebt:

$$N = Mo \cdot \frac{n \, . \, 2\pi}{60 \, . \, 75} = \frac{Mo \, . \, n}{716}$$

oder

$$Mo = 716 \, \frac{N}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 78)$$

Man bezeichnet $\frac{N}{n}$ wohl als **Effektquotient**.

Versucht man für Drehungen, in welchen die Gleichung $\iota = \frac{Mo}{\mathfrak{Tr}}$ gilt, den Körper durch einen materiellen Punkt E zweiter Art zu ersetzen, welcher in der Entfernung l von der Achse die Masse m des Körpers in sich vereinigt, so hat man anzusetzen:

$$\left. \begin{array}{l} m l^2 = \mathfrak{Tr}, \text{ d. h. } l = \sqrt{\frac{\mathfrak{Tr}}{m}} \\ \text{und} \\ l \, . \, L = Mo, \text{ d. h. } L = \frac{Mo}{l} \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots \quad 79)$$

Für diesen Punkt ist:

$$\iota = \frac{Mo}{\mathfrak{Tr}} = \frac{l \, . \, L}{m l^2} = \frac{L}{m l}$$

und

$$\iota l = j = \frac{L}{m},$$

d. h. er bewegt sich so, als wenn er **tangential** von einer Kraft L getrieben würde und dabei die **Tangentialbeschleunigung** $j = \iota l$, entsprechend der Winkelbeschleunigung ι, erhielte.

Solange man nur diese tangentialen Beziehungen beachtet, läßt sich also der Körper durch einen materiellen Punkt zweiter Art ersetzen. (Reduktion träger Massen.) Will man aber auch die Kräfte **normal** zur Bahn und die Reaktionen berücksichtigen, so ist jene Ersetzung unvollständig.

Bei diesem Ersatze würde in den beiden behandelten Beispielen für eine Geschwindigkeit v des ersetzenden Punktes E die Normalkraft $\frac{m v^2}{l}$ in Rechnung zu stellen sein, zu deren Zerstörung etwa in O als Gegenkraft eine Kraft

vom Werte $\frac{m v^2}{l}$ angebracht werden müßte, da sich die Normalkräfte der betrachteten Moleküle thatsächlich zerstören; erst E und O zusammen geben eine sachgemäße Ersetzung des Körpers, bei der auch noch die Reaktion von L zu berücksichtigen ist.

Außerdem ist die Lage von E auf dem Cylinder vom Radius l, dessen Achse die Drehungsachse ist, ganz willkürlich, so daß die vorher behandelte Verschiebung (Massenmittelpunkt) ganz andere Verhältnisse darbietet, als die Drehung.

Endlich liegt hier auch eine gewisse Willkür darin, die Masse m in E zu vereinigen, denn für eine ganz beliebige Masse m' gilt ebenso:

$$\left.\begin{aligned} m' l'^2 &= \mathfrak{Tr}, \text{ d. h. } l' = \sqrt{\frac{\mathfrak{Tr}}{m'}} \\ \text{und} \quad l' L' &= Mo, \text{ d. h. } L' = \frac{Mo}{l'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 80)$$

Man kann also in jedem Abstande l' einen Punkt E' einführen, welcher den Körper von der Masse m in tangentialer Hinsicht ersetzt, vorausgesetzt, daß man ihm die Masse $m' = \frac{\mathfrak{Tr}}{l'^2}$ giebt und ihn durch eine Kraft $L' = \frac{Mo}{l'}$ getrieben denkt.

Für die Bewegungsgrößen führt eine entsprechende Untersuchung zu entsprechenden Ergebnissen.

50. Die einfache Zwangsbewegung eines materiellen Punktes zweiter Art. Die Bewegungen der einzelnen Atome, welche einen materiellen Körper zusammensetzen, wurden im Gegensatz zu den Bewegungen freier Atome gezwungene Bewegungen genannt, weil die Atome als Bestandteile eines Körpers einem gewissen Zwange unterliegen, der ihre freie Bewegung abändert.

Entsprechendes gilt auch für materielle Punkte zweiter Art, d. h. für materielle Punkte, welche einen bestimmten Körper bei einer bestimmten Bewegung ersetzen, falls dieser Körper durch andere Körper in seiner freien Bewegung gehindert wird. Der einfachste Fall ist hier der, daß dem materiellen Punkte zweiter Art durch Führungen unmittelbar eine bestimmte Bahn vorgeschrieben wird. Eine centrisch-durchbohrte Kugel, welche auf einem beliebig gebogenen Drahte, oder eine Kugel, welche innerhalb einer sie eng umschließenden Röhre beweglich ist, können diesen Zwang für den Mittelpunkt der Kugel veranschaulichen. Denkt man sich den Faden eines Fadenpendels durch eine gewichtslose starre Strecke ersetzt, so ist auch der Mittelpunkt der Pendelkugel ein materieller Punkt zweiter Art, der bei ebenen Schwingungen auf einen Kreisbogen gezwungen wird.

Die Erfahrung lehrt, daß auch ein solcher Zwang stets durch Kräfte dargestellt werden kann, und zwar durch Kräfte, welche von Punkten der vorgeschriebenen Bahn ausgehen oder von solchen auszugehen scheinen.

Bezeichnet man die äußere Kraft, welcher der materielle Punkt folgen würde, wenn er frei wäre, mit $[A]$, die Kraft, welche den Zwang darstellt und der für ein Atom eingeführten Kraft $[J]$ entspricht, mit $[Z]$, so ist die Effektivkraft $[K]$, welche der materielle Punkt thatsächlich bei seiner Bewegung zeigt, die Resultante aus $[A]$ und $[Z]$. Zerlegt man diese Kräfte in tangentialer und in normaler Richtung (Normalebene), so ist

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ [K_T] \overset{\times}{=} [A_T] \overset{\times}{+} [Z_T] \\ \text{und} \\ 2.\ [K_N] \overset{\times}{=} [A_N] \overset{\times}{+} [Z_N] \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 81)$$

Wenn $[Z_T] = 0$ ist, d. h. wenn die Führung in Richtung der Tangente der Bahn keinen Einfluß auf die Bewegung ausübt, so ist $[Z] \overset{\times}{=} [Z_N]$ und man hat für die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung j_G der Bewegung bei einem Krümmungsradius ϱ die einfacheren Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ [K_T] \overset{\times}{=} m\,[j_T] \overset{\times}{=} [A_T] \\ \text{und} \\ 2.\ [K_N] \overset{\times}{=} m\left[\dfrac{v^2}{\varrho}\right] \overset{\times}{=} [A_N] \overset{\times}{+} [Z] \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 82)$$

Bei gegebener Bahn (ϱ) und bei gegebenem m bestimmt $[A]$ die tangentialen Beziehungen (s, v, $j_T = j$) nach Gleichung 1, so daß damit auch $[Z]$ gegeben ist nach Gleichung 2.

Die Arbeit wird lediglich durch $[A_T]$ bestimmt.

Dieser Sonderfall ist von großer Wichtigkeit, weil die Komponente $[Z_T]$, welche bei unmittelbarer Führung des materiellen Punktes die Reibung für die Bahn darstellt, erfahrungsmäßig in vielen Fällen dem Werte Null sehr nahe gebracht werden kann, so daß sie für das Problem keine wesentliche Bedeutung hat.

Rechnet man für $Z_T = 0$, so erhält man in diesem Falle jedenfalls eine Annäherung, man spricht dann von einer absolut-glatten Bahn.

Bewegt sich eine Kugel in einer horizontalen, kreisförmigen Rinne mit konstanter Geschwindigkeit, so läßt sich der Teil des Zwanges, welcher dem Gewichte der Kugel entspricht, von der Betrachtung ausscheiden, weil er nach dem Principe der Paarwirkung diesem Gewichte entgegengesetzt-gleich ist. Unter Vernachlässigung der Reibung ist dann $[A] = 0$ zu setzen, so daß hier für einen Kreis vom Radius r gilt:

$$[Z] = m\left[\frac{v^2}{r}\right].$$

Hier ist nur die äußere Wand der Rinne nötig, sie entwickelt für den Kugelmittelpunkt (vergl. S. 240), falls dessen Abstand vom Mittelpunkte der Bahn r ist, die Centripetalkraft $[Z]$. Nach dem Principe der Paarwirkung entspricht dieser Kraft $[Z]$ eine Gegenkraft, welche Centrifugalkraft genannt wird, sie wirkt auf die Wand der Rinne nach außen und läßt sich an der Abnutzung nachweisen. Während die Centripetalkraft am materiellen Punkte angreift, greift die Centrifugalkraft an dem materiellen Gebilde an, welches den Zwang ausübt.

Von diesen beiden Kräften darf jede als *Reaktion* der anderen bezeichnet werden.

Diese Betrachtung läßt sich in Annäherung auf einen Eisenbahnzug übertragen, welcher mit konstanter Geschwindigkeit eine Kurve durchläuft; die Centripetalkraft geht vom Geleise aus und wirkt an dem Zuge, die Centrifugalkraft geht vom Zuge aus und wirkt auf das Geleise und kann an dessen Abnutzung nachgewiesen werden.

Schwingt man einen Stein an einem Faden im Kreise herum, so hindert die *Centripetalkraft* dessen Fortfliegen in der Tangente, während deren Reaktion, die *Centrifugalkraft*, als Zug an der Hand (nach außen) bemerkbar wird.

Unglücklicherweise bezeichnet man außerdem mit dem Worte *Centrifugalkraft* noch eine *thatsächlich nicht vorhandene, also auch experimentell nicht nachweisbare Kraft* von der Größe und Richtung der Centrifugalkraft, welche man sich *am materiellen Punkte* wirkend denkt [1]).

Man führt diese erdachte (fingierte) Kraft, welche bei thatsächlicher Existenz die Centripetalkraft gerade aufheben würde, ein, weil sie gelegentlich zu einer zweckmäßigen Veranschaulichung dienen kann. So geht unsere Gleichung

$$[Z] \overset{\times}{=} m\left[\frac{v_2}{\varrho}\right] \overset{\times}{-} [A_N],$$

falls man diese fingierte Gegenkraft der Centripetalkraft mit $[C]$ bezeichnet, über in:

$$[Z] \overset{\times}{=} \overset{\times}{-}[C] \overset{\times}{-} [A_N]$$

oder in

$$[Z] \overset{\times}{+} [C] \overset{\times}{+} [A_N] \overset{\times}{=} 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 83)$$

d. h. die drei Kräfte $[Z]$, $[C]$ und $[A_N]$ zerstören sich, sie stehen im Gleichgewichte.

Nimmt man das Centrifugalpendel als Beispiel, so zeigt Fig. 144 a, wie $[Z]$ und $[A]$ als Resultante $\left[\frac{m\,c^2}{r}\right]$ geben, Fig. 144 b, wie $[Z]$ einerseits die Komponente $\left[\frac{m\,c^2}{r}\right]$ liefert und anderseits $[A]$ durch die andere Komponente $[\bar{A}]$ aufhebt, Fig. 144 c, wie $[A]$ einerseits die Komponente $\left[\frac{m\,c^2}{r}\right]$ liefert und anderseits $[Z]$ durch die andere Komponente $[\bar{Z}]$ aufhebt. Dagegen zeigt Fig. 144 d, wie man durch einen, den *thatsächlichen Verhältnissen nicht entsprechenden* Ersatz der Kraft $\left[\frac{m\,c^2}{r}\right]$ durch deren Gegenkraft $[C]$ eine gegenseitige Zerstörung der Kräfte $[Z]$, $[A]$ und $[C]$ veranschaulichen kann. Diese Veranschaulichung hat hier den Wert, daß man die (kinetische) *Spannung des Fadens*, welche *bei der Bewegung* auftritt, mit einer

[1]) Ihre wahre Bedeutung als eine *Ergänzungskraft der Relativbewegung* wird im nächsten Paragraphen erklärt werden.

ebenso großen (statischen) Spannung des Fadens, welche bei Ruhe eintreten würde, vergleichen kann; die kinetische Spannung ist hier so groß, als wenn der Faden des Pendels ruhte und etwa durch Gewichte $[C]$ und $[A]$ gespannt würde.

Daß die hiermit gegebene Behandlung des Centrifugalpendels (vergl. auch S. 178) mit den allgemeinen Gleichungen übereinstimmt, zeigt der Ansatz

$$[A] \overset{\times}{=} [m\,g] \overset{\times}{=} [A_N] \quad \text{und} \quad [K_N] \overset{\times}{=} m\left[\frac{c^2}{r}\right],$$

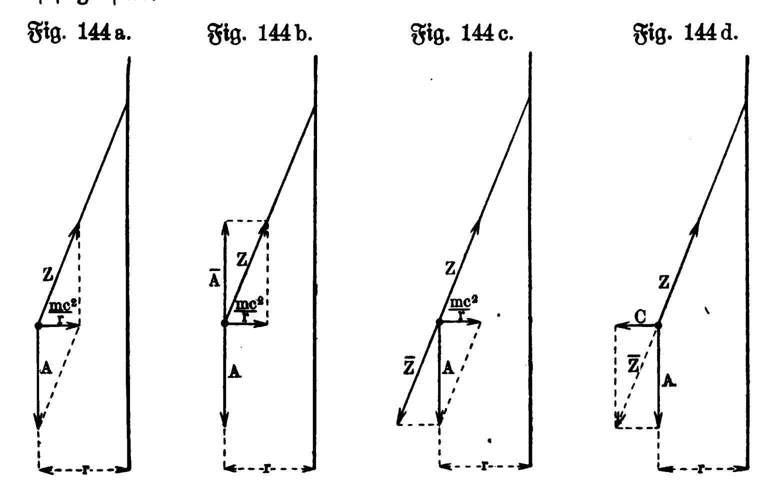
so daß hier

$$[Z] \overset{\times}{=} m\left[\frac{c^2}{r}\right] \overset{\times}{-} m\,[g]$$

ist, wobei $[Z]$ in die Richtung des Fadens (nach der Befestigung zu) fällt und für einen Ausschlag α den Wert $\frac{m\,g}{\cos\alpha}$ hat.

In einer gewissen Annäherung gelten diese Betrachtungen auch für die gebräuchlichen Centrifugalpendel, die an einer vertikalen Welle durch ein Gelenk befestigt sind.

Fig. 144 a. Fig. 144 b. Fig. 144 c. Fig. 144 d.



Man bestimmt hier wieder die Anzahl (n) der Umdrehungen in der Minute, so daß $\gamma \sim 0,1\,n$ ist[1]), für $c = r\,\gamma$.

Bei den ebenen Pendelschwingungen ist bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes u. s. w. gleichfalls $Z_T = 0$. Man hat hier (vergl. S. 176) für den Mittelpunkt der Pendelkugel

$$[A_T] \overset{\times}{=} m\,[g \sin\alpha] \quad \text{und} \quad [A_N] \overset{\times}{=} m\,[g \cos\alpha],$$

d. h. es ist

$$[Z] \overset{\times}{=} m\left[\frac{v^2}{l}\right] \overset{\times}{-} m\,[g \cos\alpha].$$

---

[1]) Das Zeichen $\sim$ bedeutet „angenähert=gleich".

Da $\left[\frac{v^2}{l}\right]$ nach dem Mittelpunkte des Kreises (Aufhängung) gerichtet ist, während $[g \cos \alpha]$ die entgegengesetzte Richtung hat, so ist

$$Z = m\left(\frac{v^2}{l} + g \cos \alpha\right)$$

und es hat $[Z]$, welches hier zugleich die Fadenspannung darstellt, die Richtung nach dem Mittelpunkte des Kreises.

Für zwei Stellen der Bahn, von denen die zweite von der ersten den senkrechten Abstand h hat, gilt nach Formel 73:

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = \text{Arbeit von } [A_T] = \text{Arbeit von } [A] = \pm m g h,$$

d. h. es ist

$$v^2 = v_0^2 \pm 2 g h.$$

Der Zwang, den die Bahn hier ausübt, ist sehr deutlich zu ersehen, wenn man sich zunächst vorstellt, daß sich die Pendelkugel in einer absolut-glatten kreisförmigen Rinne bewegt oder (durchbohrt) auf einem absolut-glatten kreisförmigen Drahte, anstatt durch den Faden befestigt zu sein; die Rinne oder der Draht muß sowohl die Kraft $m\left[\frac{v^2}{l}\right]$ liefern, als auch die ihr entgegengesetzte Kraft $m[g \cos \alpha]$ aufheben.

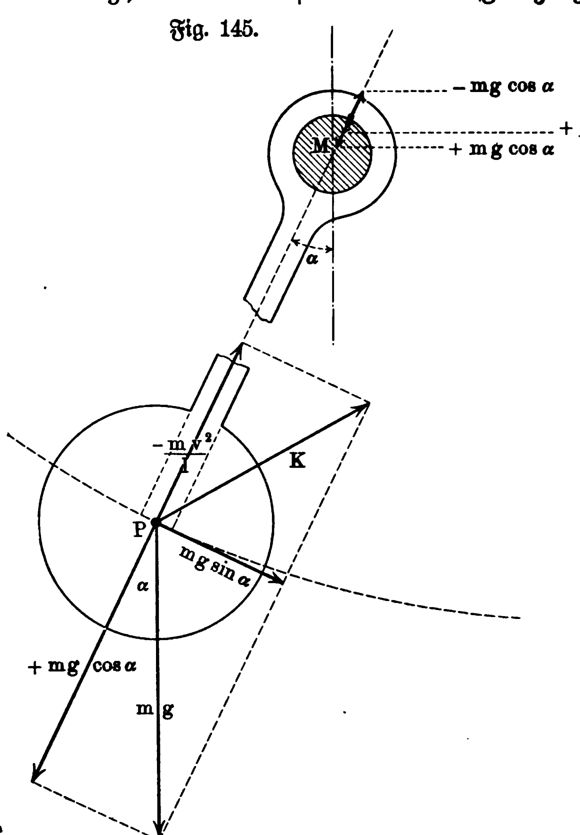
Nach dem Principe der Paarwirkung erleidet dabei die Rinne oder der Draht selbst, außer dem Drucke $m[g \cos \alpha]$, noch einen Druck vom Werte $m\frac{v^2}{l}$, dessen Richtung der Centripetalkraft der Bewegung entgegengesetzt ist. Diese Reaktion der Centripetalkraft, welche nicht an dem bewegten Körper, sondern an der Bahn haftet, ist wieder als Centrifugalkraft zu bezeichnen.

Wird der Zwang nicht durch eine Rinne oder durch einen Draht vermittelt, sondern, wie gewöhnlich, durch den Faden und dessen Befestigung, so stellt $[Z]$ den Einfluß der Befestigung auf die Pendelkugel dar, der hier durch den Faden vermittelt wird. Die Reaktion dieses Einflusses, d. h. der Zug an der Befestigung, welcher hier gleichfalls durch den Faden vermittelt wird, besteht wieder aus dem Zuge $m[g \cos \alpha]$ und aus einem centrifugalen Zuge vom Werte $m\left[\frac{v^2}{l}\right]$.

Eine klare Einsicht in diese Beziehungen erhält man nur, wenn man eine bestimmte Art der Befestigung genauer betrachtet. Denken wir uns oben an dem Faden eine Öse, welche auf einem runden Stifte ruht, bezw. eine starre gewichtslose Verbindung, wie sie Fig. 145 zeigt, so liefert der (im Schnitte schraffierte) Stift einerseits die Centripetalkraft $m\left[\frac{v^2}{l}\right]$ und hebt anderseits die Normalkomponente $m[g \cos \alpha]$ auf, so daß diese Kräfte vom Stifte ausgehen und an dem Pendel wirken. Da das Pendel als starrer Körper aufzufassen ist, so heben sich die beiden Gegenkräfte vom Werte $m g \cos \alpha$

thatsächlich auf, während an dem materiellen Punkte die Kräfte $m\left[\frac{v^2}{l}\right]$ und $m\,[g \sin\alpha]$ zu einer Kraft $[K]$ zusammentreten, welche den materiellen Punkt nun bewegt, als wenn er frei wäre. Die Zerlegung dieser Kraft K in tangentialer und normaler Richtung liefert natürlich wieder

Fig. 145.



$$[K_T] = m\,[g \sin\alpha]$$

und

$$[K_N] = m\left[\frac{v^2}{l}\right].$$

Als Reaktionen der von dem Stifte auf das Pendel übertragenen Kräfte greifen an dem Stifte die Gegenkräfte an, d. h. einmal der Druck $m\,[g \cos\alpha]$ und anderseits die Centrifugalkraft vom Werte $\frac{m v^2}{l}$.

Centripetalkraft und Centrifugalkraft greifen also auch hier an verschiedenen Körpern an.

Wird einem materiellen Punkte durch die Einflüsse anderer materieller Gebilde eine Fläche als Bewegungsgebiet angewiesen, so liegt $[Z]$ bei Vernachlässigung des tangentialen Zwanges in der Normalen der Fläche. Ist die Richtung der Bewegung gegeben, so liefert jede Ebene, welche durch die entsprechende Tangente geht, in ihrer Schnittlinie mit der Fläche den Anfang für eine mögliche Bahn des Punktes, für welche die schneidende Ebene Schmiegungsebene ist. Für alle diese Bahnen von gemeinsamer Tangente liefert $[A]$ durch Zerlegung $[A_T]$ und $[A_N]$. Da nun

$$m\left[\frac{v^2}{\varrho}\right] \overset{\times}{=} [A_N] \overset{\times}{+} [Z],$$

d. h.

$$[Z] \overset{\times}{=} m\left[\frac{v^2}{\varrho}\right] \overset{\times}{-} [A_N]$$

ist, so muß $m\left[\frac{v^2}{\varrho}\right] \stackrel{\times}{-} [A_N]$ eine Kraft darstellen, welche in die Normale der Fläche fällt. Dies läßt sich auf unendlich-viele Arten erreichen, da die Kräfte $[Z]$, $m\left[\frac{v^2}{\varrho}\right]$ und $[A_N]$ auf der Tangente in einem Punkte senkrecht stehen und also in einer Ebene liegen.

Wird noch der Wert der Geschwindigkeit v gegeben, so wird die Aufgabe bestimmt. Ist $[A_N] = 0$, so geht die Schmiegungsebene der Bahn durch $[v]$ und $[Z]$, d. h. die Bahn ist eine (durch einen gespannten Faden zu veranschaulichende) geodätische Linie der Fläche.

51. Die zusammengesetzte Zwangsbewegung eines materiellen Punktes zweiter Art und die fingierten Kräfte der Relativbewegung. Bisher wurde vorausgesetzt, daß die materiellen Führungen, die den materiellen Punkt in seine Bahn zwingen, in Ruhe sind. Bewegen sich diese, so gilt die allgemeine Betrachtung des vorigen Paragraphen für die (absolute) Bahn des materiellen Punktes zwar weiter, aber die Vereinfachung, welche in dem Fortfallen der tangentialen Komponente des Zwanges lag, bleibt selbst bei reibungslosen Führungen im allgemeinen nicht mehr bestehen.

Bewegt sich z. B. eine Kugel in einer geraden Rinne einer horizontalen, sich drehenden Scheibe, so ist die (absolute) Bahn des Kugelmittelpunktes eine horizontale Kurve von höchst verwickelter Gestalt, für welche der Zwang durchaus nicht mehr in die jedesmalige Normalebene fällt. In solchen Fällen ist es zweckmäßig, die Beschleunigung der absoluten Bewegung, welche natürlich nach wie vor durch die äußeren Kräfte und durch den Zwang bestimmt wird, aufzulösen in die Beschleunigung, relativ zur Führung, welche in unserem Beispiele die gerade Rinne ist, und in die anderen beiden Komponenten, welche dem Satze von Coriolis (vergl. § 38) entsprechen.

Hierzu kommt noch, daß in technischer Hinsicht gerade die Relativbewegung zur Führung in solchen Fällen oft eine größere Bedeutung hat als die (absolute) Bewegung selbst. So ist z. B. bei einer Radialturbine die Bewegung der Wassertropfen relativ zur Schaufel von großer Bedeutung, da von ihr die Triebkraft des Rades abhängt, während die absolute Bewegung lediglich theoretisches Interesse hat.

Infolgedessen wird hier auch die unmittelbare Bestimmung der Relativbeschleunigung in Bezug auf die Führung (vergl. S. 145) von Bedeutung.

Bezeichnen wir die Gesamtbeschleunigung der absoluten Bewegung des Punktes für einen bestimmten Zeitpunkt t nach wie vor durch $[j_G]$, so ist die entsprechende Kraft ebenso wie im vorigen Paragraphen die Resultante aus den äußeren Kräften und aus den Zwangskräften.

Bezeichnen wir ferner die Gesamtbeschleunigung der Bewegung des Punktes, relativ zur Führung (in der Führungsbahn), für denselben Zeitpunkt t durch $[j_r]$, die Verschiebungsbeschleunigung des Elementes der Führung, mit dem der materielle Punkt augenblicklich zusammenfällt, durch

$[j_f]$ und die dessen Drehung entsprechende Ergänzungskomponente vom Werte $2\, v . \varphi \sin \vartheta$ durch j_d, so gilt nach dem Satze von Coriolis[1]):

$$1. \quad [j_G] \overset{\times}{=} [j_r] \overset{\times}{+} [j_f] \overset{\times}{+} [j_d]$$

und demnach auch

$$2. \quad [j_r] \overset{\times}{=} [j_G] \overset{\times}{-} [j_f] \overset{\times}{-} [j_d].$$

Soll die rechte Seite der zweiten Gleichung eine Summe werden, so muß man $[j_f]$ durch die Gegenbeschleunigung $[\bar{j}_f]$ ersetzen, so daß $[j_f] + [\bar{j}_f] = 0$ ist, und ebenso $[j_d]$ durch $[\bar{j}_d]$. Man erhält dann:

$$3. \quad [j_r] \overset{\times}{=} [j_G] \overset{\times}{+} [\bar{j}_f] \overset{\times}{+} [\bar{j}_d],$$

d. h. man gelangt zurück zu dem Ergebnisse der Betrachtung auf S. 145. Durch Multiplikation mit der Masse m erhält man aus den Gleichungen 1, 2 und 3 zwei Gleichungen zwischen Kräften, die einer bestimmten Zerlegung der am materiellen Punkte wirksamen Kraft $m[j_G]$ entsprechen.

Von diesen Kräften läßt sich $m[j_r]$ sehr einfach deuten als die Kraft, welche die relative Bewegung des materiellen Punktes erzeugen würde, wenn diese eine absolute Bewegung wäre, sie mag Relativkraft heißen.

Dagegen sind die Kräfte $m[j_f]$ und $m[j_d]$, sowie deren Gegenkräfte $m[\bar{j}_f]$ und $m[\bar{j}_d]$ nur insofern zu deuten, als man sich die Beschleunigungen des entsprechenden Elementes der Führung oder deren Gegenbeschleunigungen auf den materiellen Punkt übertragen denkt.

Man nennt die fingierten Kräfte $m[\bar{j}_f]$ und $m[\bar{j}_d]$, welche bezw. der umgekehrten Verschiebung und der umgekehrten Drehung des Führungselementes entsprechen, bezw. die erste und die zweite Zusatzkraft oder Ergänzungskraft der Relativbewegung.

Die oben entwickelte Formel sagt dann aus, daß die Relativkraft die Resultante aus der (absoluten) Effektivkraft und den beiden Zusatzkräften der Relativbewegung ist.

Dieser Satz ist auch außerhalb technischer Verhältnisse von großer Bedeutung, weil wir zunächst alle Bewegungen, die wir beobachten, so behandeln, als wenn die Erde in einem absoluten Raum in absoluter Ruhe wäre. Wir vernachlässigen also zunächst die beiden Zusatzkräfte, welche der Eigenbewegung der Erde entsprechen, und arbeiten anstatt mit Gleichung 3 mit der Gleichung:

$$m[j_r] \overset{\times}{=} m[j_G].$$

---

[1]) Hier hat man (vergl. Fig. 85 und 86) ein Element $P' P''$ der Führungsbahn zu betrachten, welches aus der Lage $P'_1 P''_1$ durch Verschiebung längs des Bahnstückes $P'_1 P'_2$ in die Zwischenlage $P'_2 \bar{P}''$ und dann durch Drehung in die Lage $P'_2 P''_2$ gelangt. Die Beschleunigung für die Verschiebung ist $[j_f]$, während v die Geschwindigkeit des materiellen Punktes für das Durchlaufen von $P' P''$ und φ die Winkelgeschwindigkeit für die Drehung des Elementes $P' P''$ um P'_2 und ϑ den Winkel zwischen $[v]$ und der durch P'_2 gehenden Drehungsachse bezeichnet. Die Richtung von $[j_d]$ ist durch die Tangente (im Sinne der Bewegung) des Bogens $\bar{P}'' P''_2$ in $\bar{P}''$ bestimmt.

Im vorigen Paragraphen wurde bereits bemerkt, daß die Theorie des Centrifugalpendels als eines Fadenpendels in Annäherung auch für die üblichen Centrifugalpendel unserer Maschinen gilt.

Bei diesen wird dem Mittelpunkte der Pendelkugel durch die Führung im einfachsten Falle ein Bogen eines vertikalen Kreises als Bahn angewiesen, während die Drehung der vertikalen Achse, an welcher die Führung befestigt ist, diesen Bogen um einen vertikalen Durchmesser seines Kreises dreht.

Solange man nur eine bestimmte Stellung der Pendelkugel betrachtet, befindet sich diese in relativer Ruhe zu der Führungsbahn, so daß $[j_r] = 0$ ist. Ein Punkt des vertikalen Kreisbogens beschreibt bei gleichförmiger Drehung einen Kreis, für welchen keine Tangentalbeschleunigung anzusetzen ist, so daß $[j_f] = \left[\frac{m\,c^2}{r}\right]$ ist, während $[j_d] = 0$ ist, weil sich der Mittelpunkt der Pendelkugel auf der Führungsbahn nicht verschiebt. Demnach geht hier Gleichung 3 nach Multiplikation mit m über in:

$$O \overset{\times}{=} m\,[j_G] + m\,[\overline{j_f}].$$

Dabei ist $m\,[\overline{j_f}]$ wieder die fingierte Centrifugalkraft $[C]$, während $m\,[j_G]$ die Resultante aus $[A]$ und $[Z]$ ist, so daß $[A]$, $[Z]$ und $[C]$ sich gegenseitig zerstören. Wir kommen also auf Fig. 145d zurück, lernen jetzt aber $[C]$ als eine erste Zusatzkraft der Relativbewegung kennen[1]). Dies gilt natürlich für alle gleichförmigen Drehungen von Führungsbahnen, falls der materielle Punkt zu ihnen relativ in Ruhe ist.

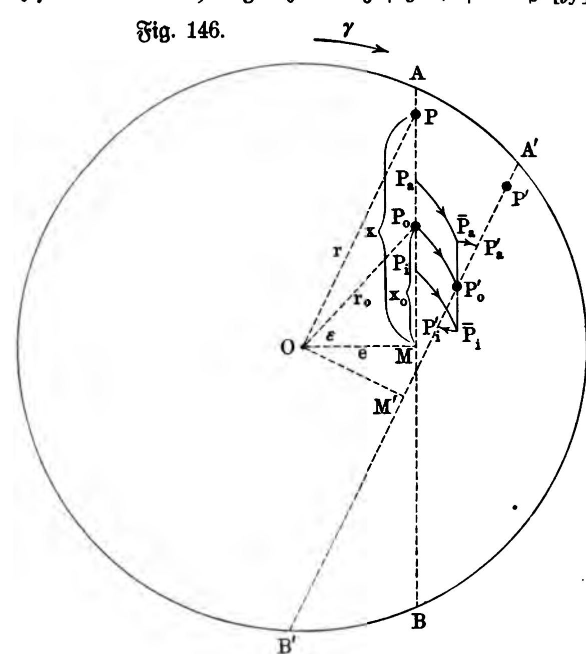
Als Beispiel betrachten wir die Bewegung, von der wir in diesem Paragraphen ausgingen, etwas genauer. Fig. 146 stelle eine horizontal gelagerte Scheibe dar, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit γ dreht. In einer geraden Rinne $A\,B$ der Scheibe, welche als reibungslos vorausgesetzt werden soll, befindet sich eine Kugel, deren Mittelpunkt W der materielle Punkt ist, den wir betrachten. Als äußere Kraft wirkt auf W nur das Gewicht $[m\,g]$, neben dem noch der Zwang $[Z]$ der Rinne, senkrecht zu deren Achse, zu berücksichtigen ist. Das Gewicht $[m\,g]$ können wir von der Betrachtung ausschließen, da es durch die feste Unterlage aufgehoben wird. Wir betrachten im folgenden nur die obere Hälfte der Scheibe im Sinne der Figur 146. Der Mittelpunkt W der Kugel mag zu einer bestimmten Zeit die Lage P_0 haben und in dieser die Geschwindigkeit v_0 besitzen; in dem folgenden Zeitelemente τ kann die Bewegung von W nach außen $(P_0\,P_a)$ oder nach innen $(P_0\,P_i)$ vor sich gehen.

Hat die Scheibe in der Zeit τ sich so gedreht, daß dabei $A\,B$ in die Lage $A'\,B'$ gelangt, so ist $P_0\,P_a$ durch Verschiebung in die Lage $P_0'\,\overline{P}_a$ und durch Drehung in die Lage $P_0'\,P_a'$ gelangt, ebenso $P_0\,P_i$ durch Verschiebung in die Lage $P_0'\,\overline{P}_i$ und durch Drehung in die Lage $P_0'\,P_i'$. Dabei sind die beiden Verschiebungspfeile mitläufig, die Drehungspfeile gegenläufig. In

[1]) Vergl. die Anmerkung auf S. 260.

beiden Fällen ist also für die Verschiebung längs des Kreisbogens $\widehat{P_0 P_0'}$, der gleichförmig durchlaufen wird, eine Centripetalbeschleunigung vom Werte $r_0 \gamma^2$ in der Richtung $P_0 O$ anzusetzen, so daß $[j_f] = [r_0 \gamma^2]$ ist. Dagegen ist bei der Drehung die Beschleunigung $[j_d]$ in P_0 senkrecht zu AB, für $P_0 P_a$ mit einem Pfeile nach rechts, für $P_0 P_i$ mit einem Pfeile nach links anzubringen.

Fig. 146.



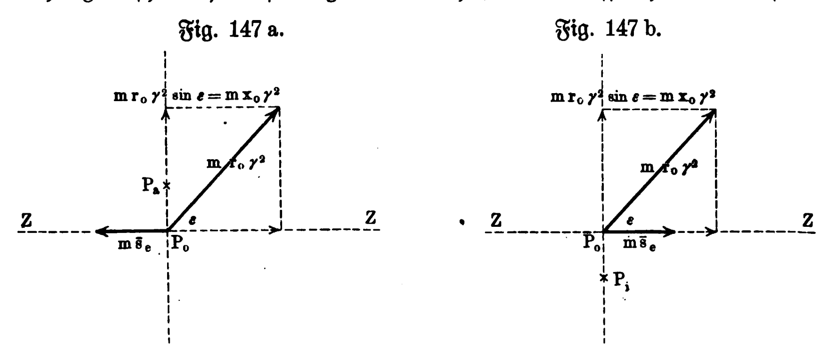
Außerdem ist noch in P_0 der Zwang Z senkrecht zu AB einzuführen, entweder mit einem Pfeile nach rechts oder mit einem Pfeile nach links, je nachdem er von der linken oder von der rechten Wand der Rinne ausgeübt wird.

Da die Relativbewegung hier geradlinig ist, so hat $[j_r]$ keine Normalkomponente und deshalb müssen sich bei der Bildung von $[j_r]$ gemäß der Formel:

$$[j_r] \overset{\times}{=} [j_G] \overset{\times}{+} [\bar{j}_f] \overset{\times}{+} [\bar{j}_d]$$

die Normalkomponenten der Beschleunigungen auf der rechten Seite der Gleichung aufheben; dasselbe gilt natürlich für die entsprechenden Kräfte.

Fig. 147 a. Fig. 147 b.



Die Skizzen Fig. 147 a und 147 b zeigen bezw. für die Bewegung nach außen und für die Bewegung nach innen die Lage der Ergänzungskräfte $m[\bar{j}_f]$ und $m[\bar{j}_d]$, und zwar ist j_d in den Figuren durch s_e (Scheinbare

Ergänzung) bezeichnet. Sollen diese mit $[Z]$ zu einer Zerstörung der Normalkomponente führen, so kann $[Z]$ in Fig. 147a sowohl nach links als auch nach rechts gerichtet sein, in Fig. 147b nur nach links.

Es ergeben sich also drei Fälle:

1. In Fig. 147a ist $[Z]$ nach links gerichtet:

$$Z + m\overline{s_e} = m r_0 \gamma^2 \cos \varepsilon.$$

2. In Fig. 147a ist $[Z]$ nach rechts gerichtet:

$$Z + m r_0 \gamma^2 \cos \varepsilon = m\overline{s_e}.$$

3. In Fig. 147b ist $[Z]$ nach links gerichtet:

$$Z = m\overline{s_e} + m r_0 \gamma^2 \cos \varepsilon.$$

In allen Fällen hat die Beschleunigung der Relativbewegung, die stets in der Richtung $P_0 P_a$ liegt, für P_0 den Wert $r_0 \gamma^2 \sin \varepsilon = x_0 \gamma^2$ und für eine bestimmte Stelle P, der die Geschwindigkeit v entsprechen mag, den Wert $x\gamma^2$, falls man $MP_0 = x_0$ und $MP = x$ setzt.

Nun gilt (vergl. S. 72):

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = F_{x_0}^{x}(j \perp w).$$

Um die rechte Seite der Gleichung auszuwerten, hat man auf der Strecke $P_0 P$ Lote aufzutragen von dem Werte $x_0 \gamma^2$ bis $x\gamma^2$. Dabei entsteht ein Trapez von der Fläche $\frac{x_0 \gamma^2 + x\gamma^2}{2} \cdot P_0 P = \frac{1}{2} \gamma^2 (x^2 - x_0^2)$, da $P_0 P = x - x_0$ ist. Demgemäß gilt:

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 + \gamma^2 (x^2 - x_0^2)}.$$

Mit dieser Bestimmung von v ist auch Z bestimmt, da s_e ohne weiteres durch die Formel $2 v \varphi \sin \vartheta$ gegeben wird, wobei v die Geschwindigkeit der Relativbewegung ist und wobei ferner $\varphi = \gamma$ und $\vartheta = 90^0$ ist, letzteres, weil die Drehungsachse senkrecht zur Richtung der Relativbewegung steht.

Den obigen drei Fällen entspricht, wenn man noch $r_0 \cos \varepsilon = e$ setzt:

1. $Z = m\gamma(e\gamma - 2v)$.
2. $Z = m\gamma(2v - e\gamma)$.
3. $Z = m\gamma(2v + e\gamma)$.

Für $v = \frac{1}{2} e\gamma$ hat Z in den Fällen 1 und 2 den Wert 0, für $v > \frac{1}{2} e\gamma$ wird Z in Formel 1, für $v < \frac{1}{2} e\gamma$ wird Z in der Formel 2 negativ.

Bezeichnet man die Richtung von Z, welche in unserer Figur der Drehung der Scheibe entspricht, als positib und die Gegenrichtung als negativ, so lassen sich die Formeln 1 und 2 zusammenfassen durch 2:

$$Z = m\gamma(2v - e\gamma).$$

Bei der Bewegung nach außen gilt demnach:

Für $v = 0 \ldots \frac{1}{2} e\gamma$ ist Z negativ, d. h. er ist nach links gerichtet.
Für $v = \frac{1}{2} e\gamma$ ist $Z = 0$.
Für $v = \frac{1}{2} e\gamma \ldots \infty$ ist Z positiv, d. h. er ist nach rechts gerichtet.

In Formel 3 ist Z stets nach links gerichtet, also stets negativ, so daß hier

$$Z = m\gamma(-2v - e\gamma)$$

geschrieben werden muß. Führt man noch die Richtung der Geschwindigkeit ein, so daß v für die Richtung MA (nach außen) positiv und für die Richtung AM (nach innen) negativ ist, so ist in Formel 3 noch v mit $-v$ zu vertauschen, so daß sich auch hier

$$Z = m\gamma(2v - e\gamma)$$

ergiebt.

Aus der Gleichung für v findet man durch eine, bei elementarer Betrachtung sehr umständliche Rechnung, falls man die Zeit in der Stellung x_0 zu zählen anfängt:

$$2x = \left(x_0 + \frac{v_0}{\gamma}\right)e^{+\gamma t} + \left(x_0 - \frac{v_0}{\gamma}\right)e^{-\gamma t}.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Ableitung (vergl. S. 73) ohne weiteres ein anderer Ausdruck für $2v$, nämlich:

$$2v = (x_0\gamma + v_0)e^{+\gamma t} - (x_0\gamma - v_0)e^{-\gamma t}.$$

Durch eine weitere Ableitung gewinnt man:

$$2j = (x_0\gamma^2 + v_0\gamma)e^{+\gamma t} + (x_0\gamma^2 - v_0\gamma)e^{-\gamma t}$$

und demgemäß ist, wie schon oben gefunden wurde, auch

$$j_r = j = +\gamma^2 x,$$

d. h. die Relativbewegung geht so vor sich, als wenn der materielle Punkt W in P eine mit MP gleichgerichtete Beschleunigung erhielte, die dem Abstande MP proportional ist, so daß sich M wie ein abstoßendes Centrum verhält.

Die absolute Bewegung von W wird lediglich durch die Kraft $[Z]$ bestimmt, sie läßt sich auch aus der relativen Bewegung und der Bewegung der Scheibe zusammensetzen.

Die Bewegung der Scheibe wird bestimmt durch die Gleichung:

$$\sigma = \sigma_0 + \gamma t \text{ oder für } \sigma_0 = 0 \text{ durch } \sigma = \gamma t,$$

so daß W bei der Stellung P in der Zeit τ durch die Scheibe um $OP.\gamma.\tau$ und zugleich auf seiner relativen Bahn um $v\tau$ weitergeführt wird für $\lim \tau = 0$.

Für den Sonderfall $e = 0$, d. h. bei einer radialen Rinne ist $Z = 2mv\gamma$ und $r_0 = x_0$ und $r = x$. Hier hat man für $\sigma = \gamma t$ ohne weiteres

$$2r = \left(r_0 + \frac{v_0}{\gamma}\right)e^{+\sigma} + \left(r_0 - \frac{v_0}{\gamma}\right)e^{-\sigma}$$

als Gleichung für die Bahn (Spirale) der absoluten Bewegung von W in Polarkoordinaten, für die der unbewegliche Mittelpunkt der Scheibe der Pol und die Horizontalprojektion der Rinnenachse in deren Stellung für $t = 0$ die Achse ist.

52. Die Einheiten und die Dimensionen der dynamischen Größen. Innerhalb der technischen Mechanik ringen augenblicklich zwei Maßsysteme miteinander, welche als physikalisches und als technisches Maßsystem

unterschieden werden (vergl. Einl., S. 17). Innerhalb des physikalischen Systems sieht man für technische Verhältnisse in einem Kilostücke, wie es der Gewichtssatz einer Wage darbietet, die Einheit der Masse, die man als Massen-Kilo bezeichnen kann, innerhalb des technischen Systems denkt man sich das Kilostück aufgehangen oder unterstützt und betrachtet seinen Schwerdruck oder seinen Schwerzug (Gewicht) als Einheit der Kraft, den man als Kraft-Kilo (kg) bezeichnen kann.

Innerhalb des technischen Systems, welches hier benutzt werden soll, liefert die Gleichung:

$$\text{Gewicht} = \text{Masse} \times \text{Fallbeschleunigung}$$

für 1 Kraft-Kilo die Masse $\frac{1}{g}$, so daß für G Kraft-Kilo die Masse $\frac{G}{g}$ anzusetzen ist, während umgekehrt die Masseneinheit durch g Kilostücke dargestellt wird. Man hat also hier für die Rechnung den Ansatz

$$\text{Masse} = \frac{\text{Gewicht in Kilo } (G)}{\text{Fallbeschleunigung } (g)}.$$

Die Einheit der Kraft ist hier die Kraft, welche 1 Kilostück die Beschleunigung $g \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ erteilt, wie es der freie Fall veranschaulicht.

Für die Bezeichnung der Masseneinheit fehlt leider ein Wort, so daß man zu dem schleppenden Ausdrucke „Technische Masseneinheit“ gezwungen ist.

Hat man keine Verwechselung mit dem physikalischen System[1]) zu befürchten, so kann man „Kraft-Kilo“ einfach durch „Kilo“ bezeichnen.

Demgemäß hat ein Hundertkilostück $\frac{100}{g} = 10{,}2$ technische Masseneinheiten und liefert als Gewicht 100 Kraft-Kilo. Wird einem Eisenbahnzuge, der 200000 Kilostücken entspricht, eine Beschleunigung von $0{,}1 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ erteilt, so sind hier an Masse $\frac{200\,000}{g} = 20\,400$ technische Masseneinheiten anzusetzen,

---

[1]) In dem physikalischen, technischen Verhältnissen angepaßten System ist die Einheit der Kraft das Gewicht von $\frac{1}{g}$ Kilo $\left(= \frac{1}{g} \text{ Kraft-Kilo}\right)$, d. h. sie ist die Kraft, welche einem Kilostücke die Beschleunigung $1 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ erteilt. An der Atwoodschen Fallmaschine wird diese Einheit durch einen Überdruck von $\frac{1}{g}$ Kilo bei beiderseitiger Belastung von $\frac{g-1}{2\,g}$ Kilo veranschaulicht, d. h. angenähert durch einen Überdruck von $\frac{1}{10}$ Kilo bei beiderseitiger Belastung von $\frac{9}{20}$ Kilo.

Ein Hundertkilostück hat hier 100 Massen-Kilo an Masse und liefert als Gewicht $100\,g = 981$ Krafteinheiten.

Ein Eisenbahnzug, der 200000 Kilostücken entspricht, hat 200000 Kilo an Masse, so daß einer Beschleunigung von $0{,}1 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ hier eine Kraft von 20000 Einheiten entspricht.

so daß die entsprechende Kraft (= Masse × Beschleunigung), d. h. die Zugkraft der Lokomotive 20400 . 0,1 = 2040 Kraft-Kilo beträgt (abgesehen von der Überwindung der Widerstände).

Die anderen dynamischen Größen werden nun im allgemeinen auf Einheiten bezogen, welche den Einheiten „1 Kraft-Kilo, 1 Meter, 1 Sekunde" entsprechen.

So wird die Arbeit als Produkt aus Kraft und Weg in Kraftkilo-Meter (Kilogramm-Meter = kgm) gemessen, d. h. die Einheit der Arbeit ist die Hebung oder Senkung von 1 Kilostück um 1 Meter. Dieselbe Einheit gilt auch für die Messung der Energie und des Kraftmomentes.

Die Arbeitsstärke (vergl. S. 248) hat 1 Kilogramm-Meter in der Sekunde als Einheit, wobei man 75 Kilogramm-Meter in der Sekunde als Pferdestärke (PS) zusammenfaßt[1]).

Wir stellen demgemäß für einige Größen die Dimensionen in dem physikalischen, technischen Verhältnissen angepaßten Maßsystem und die Dimensionen in dem technischen Maßsystem zusammen.

Im ersten sind Masse (m), Zeit (t) und Länge (l) die Grundgrößen, aus welchen alle anderen zusammengesetzt werden, im zweiten sind diese Kraft (K), Zeit (t) und Länge (l).

	Dimension im physikalischen System	Dimension im technischen System
Masse	m	$K\,l^{-1}\,t^2$
Kraft = Masse × Beschleunigung	$m\,l\,t^{-2}$	K
Bewegungsgröße = Masse × Geschwindigkeit	$m\,l\,t^{-1}$	$K\,t$
Kraft-Antrieb = Kraft × Zeit	$m\,l\,t^{-1}$	$K\,t$
Arbeit = Kraft × Weg	$m\,l^2\,t^{-2}$	$K\,l$
Bewegungsenergie = Hälfte der Masse × Quadrat der Geschwindigkeit	$m\,l^2\,t^{-2}$	$K\,l$
Kraft-Moment = Kraft × Arm	$m\,l^2\,t^{-2}$	$K\,l$
Massen-Moment = Masse × Arm	$m\,l$	$K\,t^2$
Trägheitsmoment = Masse × Quadrat des Abstandes von der Achse	$m\,l^2$	$K\,l\,t^2$
Arbeitsstärke = Kraft × Geschwindigkeit	$m\,l^2\,t^{-3}$	$K\,l\,t^{-1}$

[1]) Wegen der Beziehungen zur Elektrotechnik mag noch angeführt werden, daß im physikalischen System die Kraft, welche einem Gramm Masse die Beschleunigung 1 cm erteilt, unter dem Namen Dyn als Einheit dient. Die Einheit des physikalischen, technischen Verhältnissen angepaßten Systems, für welche das Gramm durch das Kilogramm und das Centimeter durch das Meter ersetzt ist, ist dann 100000 Dyn, wofür man das (allerdings auch anders verwendete) Wort Megadyn vorgeschlagen hat. Die Arbeit von 1 Dyn für 1 cm Verschiebung heißt Erg, wobei 10^7 Erg als 1 Joule bezeichnet werden. Die Arbeitsstärke für 1 Joule heißt Watt, d. h. 1 Watt = 1 $\frac{\text{Joule}}{\text{sec}}$. Unter dem Namen Kilowatt werden 1000 Watt zusammengefaßt.

Anwendungen der Lehre vom materiellen Punkte.

---

1. Allgemeines. a) Die angreifenden Kräfte. Bei Anwendungen können hier (im Gegensatz zur theoretischen Grundlegung) naturgemäß nur materielle Punkte zweiter Art in Frage kommen, d. h. Punkte materieller Körper, welche für diese bei bestimmten Bewegungen dynamische Centren sind. Dabei werden die Körper stets durch äußere Kräfte angegriffen, und diese Kräfte sind entweder Massenkräfte, welche unmittelbar auf die einzelnen Atome des Körpers wirken, oder Oberflächenkräfte, welche unmittelbar auf eine, einem Teile der geometrischen Oberfläche des Körpers benachbarte Schicht von Atomen wirken und von dieser aus mittelbar weiter wirken. Von den Massenkräften kommt hier nur der Schwerdruck oder Schwerzug (Gewicht) in Frage, welcher auf der gegenseitigen Einwirkung eines Körpers und der Erde beruht. Ist allein diese Kraft zu betrachten, so haben wir es mit dem freien Falle zu thun.

Soll das Eintreten dieser Bewegung gehindert werden, so sind dabei außerdem Oberflächenkräfte in Betracht zu ziehen, da bei der Aufhängung, z. B. an einem Seile, oder bei der Unterstützung, z. B. durch eine Stange oder eine Säule, ein bestimmter Teil der Oberfläche des Körpers mit bestimmten Teilen der Oberfläche anderer Körper in materielle Verbindung gesetzt wird.

Ähnliches gilt für den Fall auf bestimmter Bahn, dessen einfachstes Beispiel die Bewegung auf der schiefen Ebene ist, bei welchem der Zwang der Bahn neben dem Gewichte des Körpers zu beachten ist.

Benutzt man das Gewicht eines Körpers A, um einen Körper B in Bewegung zu setzen, so muß man entweder beide Körper mit Teilen ihrer Oberflächen in Berührung bringen oder man muß irgend eine Übertragung, z. B. ein Seil mit Rollenführung, verwenden, wobei wiederum eine Reihe von Oberflächenkräften in Frage kommen. Entsprechendes gilt auch für die Aufhebung einer vorhandenen Bewegung. Ähnliches tritt auf, wenn man durch den Druck oder Zug der eigenen Hand (Berührungsfläche) Bewegungen einleitet oder vorhandene Bewegungen aufhebt u. s. w. In allen diesen Fällen läßt sich erfahrungsmäßig jedesmal eine Gerade angeben, innerhalb welcher sich die Kraftwirkung so zu sagen verdichtet, so daß bei einem starren Körper irgend ein Punkt dieser Geraden als dynamisches Centrum dieser Wirkung angesehen werden darf.

Es hängt dies damit zusammen, daß nur diejenigen Wirkungen innerhalb der Außenwelt als Kräfte bezeichnet werden, welche mit dem Schwerdruck oder Schwerzug, der sich ja stets im Massenmittelpunkte (Schwerpunkte) so zu sagen verdichtet, zahlenmäßig verglichen werden können. Außerdem kommt auch das Princip der Paarwirkung dabei in Betracht.

Wenn wir z. B. den einfachen Kurbelmechanismus, welchen Fig. 124 darstellt, betrachten, so wirkt bei einer Dampfmaschine die Spannung des Dampfes auf die Oberfläche des Kolbens K und damit auf die Kolbenstange KA, welche wiederum durch Vermittelung der Oberfläche des ganzen Kreuzkopfstückes A die Kraft zum Teil auf die Führung dieses Stückes und zum Teil auf die Kolbenstange AB überträgt u. s. w. Hier denken wir uns den ganzen Vorgang der Kraftübertragung bei symmetrischer Herstellung der Konstruktionsteile in deren Mittellinien bezw. Mittelpunkten verdichtet, obwohl thatsächlich überall ausgedehnte Flächen in Frage kommen. Entsprechendes gilt auch bei Übertragungen durch Seile und Rollen.

b) Die Kraftzerlegung. Bei Anwendungen ist zu beachten, daß eine Zerlegung von Kräften, welche in theoretischer Hinsicht richtig ist, den thatsächlichen Verhältnissen durchaus nicht immer entspricht, und daß über diese thatsächlichen Verhältnisse nur die Erfahrung den nötigen Aufschluß geben kann. So zerlegt sich z. B. eine Kraft $[K]$, welche bei zwei, durch ein Gelenk verbundenen Stangen die Mitte des Gelenkes (Knoten) trifft, bei symmetrischer Herstellung der einzelnen Konstruktionsteile, nach den Achsen der Stangen, wie es Fig. 148 zeigt. Wird dagegen eine beiderseits eingelenkte Stange (Fig. 149) von einer Kraft $[K]$ nicht in einem der Gelenke getroffen, so zerlegt sie sich bei symmetrischer Gestaltung der einzelnen Konstruktionsteile in zwei Kräfte $[K_1]$ und $[K_2]$, die in den Gelenkmitten angreifen. Dabei müssen $[K_1]$ und $[K_2]$ der Kraftzerlegung der Fig. 149 b entsprechen, so daß durch Verschiebung nach O in Fig. 149 a eine Parallelogrammzerlegung entsteht. Im übrigen ist aber die Lage von $[K_1]$ und $[K_2]$ in theoretischer Hinsicht völlig unbestimmt, erst die Erfahrung entscheidet, welches der unzählig vielen möglichen Dreiecke über K die thatsächliche Zerlegung darstellt.

Fig. 148.

Fig. 149 a.

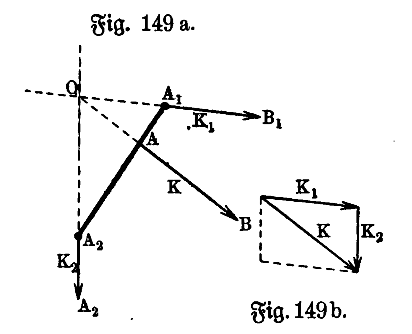
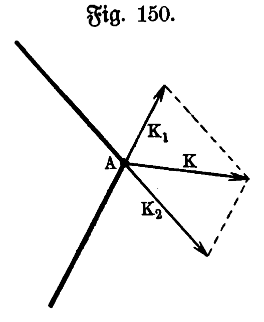


Fig. 149 b.

Fig. 150.

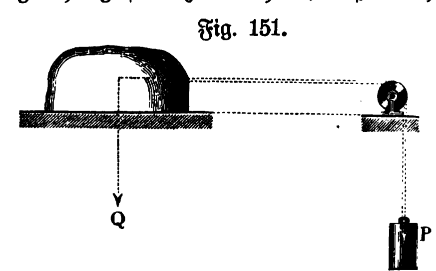


Bei einem Seile, das als vollkommen biegsam vorausgesetzt wird, fallen die beiden, eben für Stangen betrachteten Kraftzerlegungen zusammen, falls sich an der Angriffsstelle wieder ein neuer Knoten bilden kann; die Seilrichtungen stimmen dann mit den Kraftrichtungen überein, wie es Fig. 150 (a. v. S.) zeigt.

Bei Flächen, welche sich berühren, folgt die Kraftzerlegung der Normale bezw. der Normalrichtung der Berührungsstelle, so daß eine Komponente in diese Richtung fällt und sich die andere oder die anderen Komponenten senkrecht dazu bilden. Besonders zu beachten ist noch, daß durch eine Rolle [1]), über welche ein Faden oder ein Seil zum Zwecke der Kraftübertragung geht, nur die Richtung der Kraft geändert wird, solange alle Widerstände vernachlässigt werden.

c) **Die Masse der treibenden und der übertragenden Körper.** Werden Verschiebungen eines starren materiellen Körpers durch Gewichte von Belastungskörpern bewirkt, so ist bei der Verwendung der dynamischen Grundgleichung stets zu beachten, daß durch das Gewicht auch die Masse des Körpers, dem es entspricht, in Bewegung gesetzt wird. Beim freien Falle bewegt ja das Gewicht auch die Masse des Körpers, dem es angehört, und zwar nur diese. Zur Erläuterung betrachten wir den, durch Fig. 151 dargestellten Vorgang. Hier ist P und Q nebst deren Verbindung als ein starrer Körper aufzufassen, den das Gewicht von P, welches selbst P heißen mag, treibt. Die zu bewegende Masse ist hier $\frac{P+Q}{g}$, falls das Gewicht von Q auch einfach durch Q bezeichnet wird. Man hat also nach der dynamischen Grundgleichung:

Fig. 151.



$$j = \frac{P}{\frac{P+Q}{g}} = g\,\frac{P}{P+Q}.$$

Ruht Q bei Beginn der Bewegung, so entsprechen der konstanten Beschleunigung j die Gleichungen $s = \frac{1}{2} j t^2$, $v = j t$ und $\frac{1}{2} v^2 = j s$, deren Richtigkeit an einer horizontalen Meßlatte für Q und das eine Seilstück, an einer vertikalen Meßlatte für P und das andere Seilstück geprüft werden kann.

Bei einer genauen Betrachtung muß auch noch die Masse des verbindenden Seiles in Rechnung gestellt werden.

Das Beispiel zeigt uns aber noch mehr, da neben der Masse des treibenden Körpers P auch noch die Masse eines, der Übertragung dienenden Körpers, nämlich der Rolle, mit bewegt wird. Um deren Einfluß zu be-

[1]) Sie ist als eine gleicharmige Hebelwage anzusehen.

stimmen, reduziert man die Rolle auf einen materiellen Punkt R, der auf der Berührungsfläche von Seil und Rolle liegt, so daß man diesen Punkt R gewissermaßen in das Seil eingeknotet und dann mit bewegt denken kann. Wird der Abstand des Punktes R von der Achse der Rolle, die das Trägheitsmoment $\mathfrak{Tr}$ haben mag, r genannt, so muß man R eine Masse m zuschreiben, so daß $m r^2 = \mathfrak{Tr}$ ist, d. h. man hat $m = \frac{\mathfrak{Tr}}{r^2}$.

Demgemäß gilt genauer:

$$j = \frac{P}{\frac{P+Q}{g} + m} = g \frac{P}{P + Q + \frac{g \,.\, \mathfrak{Tr}}{r^2}}.$$

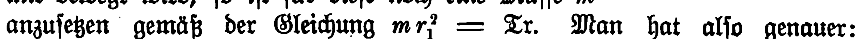
Die thatsächlich vorhandenen Reibungen von Q auf der Unterlage und der Rollenachse in ihren Lagern, sowie die Seilsteifigkeit fordern noch weitere Verbesserungen der Formel.

Wir betrachten noch die Bewegung, welche Fig. 152 darstellt, unter der Voraussetzung, daß $P > Q$ ist. Hier ist P und Q nebst deren Verbindung als ein starrer Körper aufzufassen. Denkt man sich im obersten Punkte der Figur eine Tangente an den Kreis, so zieht in dieser P nach links und Q nach rechts, so daß hier die Kraft $P - Q$, nach links gerichtet, als bewegende Kraft übrig bleibt. Man hat also:

$$j = \frac{P - Q}{\frac{P+Q}{g}} = g \frac{P - Q}{P + Q}.$$

Fig. 152.

Da die Rolle vom Radius r_1, welche das Trägheitsmoment $\mathfrak{Tr}$ haben mag, als übertragender Körper mit bewegt wird, so ist für diese noch eine Masse m anzusetzen gemäß der Gleichung $m r_1^2 = \mathfrak{Tr}$. Man hat also genauer:



$$j = g \frac{P - Q}{P + Q + \frac{g \,.\, \mathfrak{Tr}}{r_1^2}}.$$

Im übrigen gelten entsprechende Bemerkungen wie für Fig. 151.

2. Die dynamische Bedeutung des Newtonschen Gesetzes. Es wurde bereits erwähnt (vergl. S. 160), daß die Kepplerschen Gesetze nur die Relativbewegung der Planeten zur Sonne beschreiben. Wäre nur die Sonne S und ein Planet P im Weltenraum vorhanden, so würde gemäß dem Principe der Paarwirkung nicht die Sonne in Ruhe verharren, sondern der Massenmittelpunkt M des Systems, welches die Sonne und der Planet bilden.

Bezeichnet man die Entfernung zwischen den Mittelpunkten S und P beider Körper, in denen man ihre Massen m_s und m_p verdichtet denken darf, mit l, so wird diese Entfernung durch den Massenmittelpunkt im umgekehrten

Massenverhältnis geteilt (vergl. S. 237). Demnach ist $SM = \frac{m_p}{m_s + m_p} \cdot l$ und $PM = \frac{m_s}{m_s + m_p} \cdot l$. Die Kepplerschen Gesetze setzen $PS = l$ an die Stelle von PM, so daß die ihnen entsprechende Entwickelung (S. 157 u. f.) alle Lineargrößen der Wirklichkeit gegenüber im Verhältnisse $l : l \frac{m_s}{m_s + m_p}$ vergrößert darstellt. Demgemäß ist auch die Beschleunigung $[j_G]$, welche (S. 160) erhalten wurde, im Verhältnisse $m_s : (m_s + m_p)$ zu verkleinern, wenn man die Beschleunigung der absoluten Bewegung erhalten will. Sie ist demnach für diese:

$$\frac{4\pi^2}{r^2} \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{m_s}{m_s + m_p}.$$

Wäre nun das dritte Gesetz Kepplers in aller Strenge richtig, so würde diese Beschleunigung auch von der Masse der Planeten m_p abhängen und könnte demnach nicht für alle Planeten auf die Form $K \cdot \frac{1}{r^2}$ gebracht werden, es würde vielmehr für jeden Planeten ein besonderer Wert von K eintreten.

Bezeichnen wir die Größen T und a für einen bestimmten Planeten durch T_p und a_p, so würde die alte Beziehung erhalten bleiben, wenn $\frac{a_p^3}{T_p^2 (m_s + m_p)}$ von Planeten zu Planeten konstant wäre, d. h. wenn das dritte Kepplersche Gesetz lautete: Für je zwei Planeten verhalten sich die Produkte aus den Quadraten der Umlaufszeiten und den Summen von Sonnenmasse und Planetenmasse wie die Kuben ihrer mittleren Sonnenentfernungen.

Beziehen wir dieses Gesetz auf die Erde, für welche die betr. Größen durch T_e, a_e und m_e bezeichnet werden mögen, so gälte demnach:

$$\frac{T_p^2 (m_s + m_p)}{T_e^2 (m_s + m_e)} = \left(\frac{T_p}{T_e}\right)^2 \frac{1 + \frac{m_p}{m_s}}{1 + \frac{m_e}{m_s}} = \left(\frac{a_p}{a_e}\right)^3.$$

Für $m_p < m_e$ ist die Korrektur ein echter Bruch, für $m_p > m_e$ ist die Korrektur ein unechter Bruch, so daß für die Planeten, deren Masse kleiner ist als die der Erde, $\left(\frac{a_p}{a_e}\right)^3 < \left(\frac{T_p}{T_e}\right)^2$ und für die Planeten, deren Masse größer ist als die der Erde, sich $\left(\frac{a_p}{a_e}\right)^3 > \left(\frac{T_p}{T_e}\right)^2$ ergeben müßte.

Nun gilt folgende Tabelle:

	$\left(\frac{a_p}{a_e}\right)^3 - \left(\frac{T_p}{T_e}\right)^2$	
Merkur	$-0{,}0000003$	$m_p < m_e$
Venus	$-0{,}000002$	
Mars	$-0{,}00001$	
Jupiter	$+0{,}131$	$m_p > m_e$
Saturn	$+0{,}256$	
Uranus	$+0{,}37$	
Neptun	$+1{,}6$	

Da unsere theoretische Betrachtung voraussetzte, daß nur ein Planet neben der Sonne im Weltenraume vorhanden wäre, so bestätigt diese Tabelle im Hinblick auf die gegenseitigen Beeinflussungen der Sonne und der verschiedenen Planeten und dieser unter sich mit hinreichender Deutlichkeit, daß die besprochene Korrektur geboten ist. Setzt man also in die Formel für die Beschleunigung für

$$4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2(m_s + m_p)}$$

eine Konstante k ein, so geht diese über in

$$\frac{k \cdot m_s}{r^2},$$

und demgemäß ist die entsprechende Kraft, mit welcher der Planet von der Sonne angezogen wird:

$$\frac{k \cdot m_p \cdot m_s}{r^2}.$$

Nach dem Principe der Paarwirkung ist dies zugleich die Kraft, mit welcher der Planet die Sonne anzieht.

Geht man von diesem Ansatze für die Kraft aus, so kann man auch rückwärts die Korrektur der Kepplerschen Gesetze wieder leicht gewinnen.

Nach der dynamischen Grundgleichung sind nämlich die gegeneinander gerichteten Beschleunigungen für das Sonnencentrum und für das Planetencentrum bezw. $\frac{k\,m_p}{r^2}$ und $\frac{k\,m_s}{r^2}$, so daß die Relativbeschleunigung für eines der Centren, wenn man das andere ruhend denkt (vergl. zwei einander entgegenfahrende Eisenbahnzüge), den Wert

$$\frac{k\,m_p}{r^2} + \frac{k\,m_s}{r^2} = \frac{k(m_p + m_s)}{r^2}$$

erhält.

Die für das ruhende Centrum abgeleitete (vergl. S. 157 u. f.) Beschleunigung ist thatsächlich als Relativbeschleunigung in Bezug auf dieses Centrum aufzufassen, d. h. man hat:

$$\frac{4\pi^2}{r^2} \cdot \frac{a^3}{T^2} = \frac{k(m_p + m_s)}{r^2}$$

und erhält wieder

$$k = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2(m_p + m_s)}.$$

Die für die Kraft der gegenseitigen Einwirkung der Sonne und eines Planeten gewonnene Formel

$$\frac{k \,.\, m_p \,.\, m_s}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 84)$$

stellt nun das Newtonsche Gesetz in seiner vollständigen Gestaltung dar.

Newton that den großen Schritt, dieses Gesetz für **Elemente der Materie** (Atome) als streng-gültig anzusehen und daraus seine Gültigkeit für bestimmte dynamische Centren bestimmter Körper herzuleiten. Er wies vor allem nach, daß die Mittelpunkte der Himmelskörper thatsächlich für deren Außenraum als dynamische Centren, in denen ihre Masse verdichtet erscheint, angesehen werden dürfen, falls man sie als homogene oder als concentrisch-homogen-geschichtete Kugeln auffassen darf.

Für zwei Atome von den Massen μ und μ' erhält Newtons Gesetz die Form

$$\frac{k\,\mu\,\mu'}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 85)$$

d. h. die beiden Kräfte, welche der gegenseitigen Einwirkung zweier Atome entsprechen, sind deren Massen und dem reziproken Quadrate ihrer Entfernung proportional.

Aus diesem Gesetze folgt als Lehrsatz, daß u. a. statt der Atome die Mittelpunkte homogener oder concentrisch-homogen-geschichteter Kugeln eintreten können, falls man deren Massen in ihrem Mittelpunkte verdichtet denkt.

Ersetzt man das Kraftgesetz Newtons durch irgend ein anderes, z. B. durch

$$\frac{k\,\mu\,\mu'}{r^n}$$

für $n \gtrless 2$, so bleiben zwar die Mittelpunkte solcher Kugeln insofern dynamische Centren, als man in ihnen die Masse verdichtet denken darf, aber die ganze Kugel übt nun im allgemeinen auf Punkte des Außenraumes eine andere Kraft aus als das einzelne Atom.

Nur für $n = -1$ und für $n = 2$, d. h. für die Atomkräfte

$$k\,\mu\,\mu' \,.\, r \quad \text{und} \quad \frac{k\,\mu\,\mu'}{r^2}$$

übt das Centrum einer solchen Kugel von der Masse m auf einen materiellen Punkt von der Masse μ' in der Entfernung r bezw. die Kräfte

$$k\,m\,\mu' \,.\, r \quad \text{und} \quad \frac{k\,m\,\mu'}{r^2}$$

aus, während z. B. bei der Atomkraft

$$k\,\mu\,\mu'\,r^2$$

das Centrum einer homogenen Kugel vom Radius R die Kraft

$$k m \mu' r^2 \left(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2} - \frac{1}{35}\frac{R^4}{r^4}\right)$$

entwickelt [1]).

Die Konstante k des Newtonschen Gesetzes ist leicht zu bestimmen. Giebt man ihm für zwei Massen m_1 und m_2 die Form

$$K = \frac{k\, m_1\, m_2}{r^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 86)$$

so ist $K = k$ für $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $r = 1$, d. h. k bedeutet die Kraft der gegenseitigen Einwirkung zweier Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung.

Natürlich hängt der Zahlenwert von k ab von den gewählten Einheiten. Im technischen Maßsysteme (Kraft-Kilo, Meter, Sekunde) ist:

$$10^{10}\, k = 6{,}4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 87)$$

Wählt man nämlich die Masse der Erde als m_1 und als m_2 irgend eine Kugel in der Nähe der Erdoberfläche, so ist die Kraft der gegenseitigen Einwirkung durch das Gewicht $m_2 g$ gegeben, d. h. man hat, falls R den Radius der Erde bezeichnet,

$$\frac{k\, m_1\, m_2}{R^2} = m_2\, g,$$

d. h.:

$$k = \frac{g \,.\, R^2}{m_1}.$$

Nimmt man 5,6 als Dichtigkeit [2]) der Erde, bezogen auf Wasser, so ist im technischen Maßsysteme

$$m_1 = \frac{\frac{4}{3} R^3 \pi \,.\, 5600 \text{ Kraftkilo}}{g},$$

weil R in Metern gemessen werden muß und 1 Kubikmeter Wasser 1000 Kilo, also 1 Kubikmeter der Erde im Mittel 5600 Kilo an Gewicht hat.

Man hat also:

$$k = \frac{3\, g^2}{4\, R \pi \,.\, 5600} = \frac{3 \,.\, (9{,}81)^2}{80\,000\,000 \,.\, 5600} = \frac{6{,}444}{10^{10}}.$$

Im physikalischen, den technischen Verhältnissen angepaßten Maßsysteme (Massen-Kilo, Meter, Sekunde) ist

$$k = \frac{3\, g}{4\, R \pi \,.\, 5600} = \frac{6{,}569}{10^{11}}.$$

Hier hat k die Dimension $m^{-1}\, l^3\, t^{-2}$.

Geht man also zum gewöhnlichen Maßsysteme der Physik (Gramm, Centimeter, Sekunde) über, so ist

$$k = \frac{6{,}569}{10^8}.$$

---

[1]) Vergl. die Anmerkung auf S. 157.

[2]) Vergl. v. Jolly, Wiedemanns Annalen 1881.

Auf der allgemeinen Gültigkeit des Newtonschen Elementargesetzes, wonach k für je zwei Atome denselben Wert hat, beruht auch die Massenbestimmung der Weltkörper. Vergleicht man die Bewegung eines Planeten in Bezug auf die Sonne mit einer Bewegung eines Mondes desselben Planeten in Bezug auf diesen, so erhält man das Verhältnis der Masse von Sonne (m_s) und Planeten (m_p).

Bei kreisförmigen Bahnen hat die Centripetalbeschleunigung des Mondes für einen Kreis vom Radius r_m und einer Umlaufszeit T_m den Wert:

$$\frac{4\pi^2}{T_m^2} \cdot r_m$$

und dieses ist zugleich die Beschleunigung, welche der Planet nach dem Gesetze Newtons dem Monde erteilt, d. h. $\frac{k\, m_p}{r_m^2}$.

Man hat also:

$$\frac{4\pi^2 \cdot r_m^3}{T_m^2} = k\, m_p.$$

Für Planet und Sonne gilt ebenso:

$$\frac{4\pi^2 \cdot r_p^3}{T_p^2} = k\, m_s.$$

Demgemäß gilt:

$$m_s : m_p = \frac{r_p^3}{r_m^3} \cdot \frac{T_m^2}{T_p^2}.$$

Nimmt man zunächst die Erde als Planeten, so erhält man die Sonnenmasse (355000 Erdmasse). Aus dieser folgt dann für andere Planeten nach derselben Gleichung deren Masse. Für die Planeten, welche keinen Mond haben, und für die Monde müssen die Massen auf ziemlich umständlichem Wege aus ihren Störungen erschlossen werden; für den Mond der Erde bietet die Erscheinung der Ebbe und Flut überdies ein Mittel für seine Massenberechnung.

3. Das Potential des freien Falles und der Centralbewegung. Die beiden Formen der Kraft (vergl. S. 278), für welche bei homogenen oder concentrisch-homogen-geschichteten Kugeln deren Mittelpunkt als dynamisches Centrum angesehen werden darf, entsprechen den beiden Beschleunigungsgesetzen, welche früher (vergl. S. 162 u. f.) für Punkte des Erdinnern und für Punkte in deren Außenraum behandelt wurden. Ist die gegenseitige Einwirkung zweier Punkte durch das Newtonsche Gesetz bestimmt, so gilt dasselbe Gesetz für den Mittelpunkt einer solchen Kugel, in dem man die Masse der Kugel verdichtet zu denken hat, und für einen materiellen Punkt in ihrem Außenraume, während für einen materiellen Punkt im Innern der Kugel, falls sie homogen ist, die andere Form der Kraft in Geltung ist.

Man hat also bei Gültigkeit des Newtonschen Gesetzes für Atome die Kraft der gegenseitigen Einwirkung des mit der Erdmasse behafteten Mittelpunktes der Erde und eines materiellen Punktes von der

Masse m (Mittelpunkt einer homogenen Kugel von der Masse m) dargestellt durch

a. $m \cdot \frac{\varrho}{R} \cdot g_R$ für einen materiellen Punkt im Innern der Erde ($\varrho < R$).

b. $m \cdot \frac{R^2}{\varrho^2} \cdot g_R$ für einen materiellen Punkt im Außenraum der Erde ($\varrho > R$).

c. $m \,.\, g_R$ für einen materiellen Punkt an der Oberfläche ($\varrho = R$).

Die Beschleunigung-Weglinien der Figuren 102 und 103 stellen diese Kraft für $m = 1$ unmittelbar dar, sie gehen in die entsprechenden Kraft-Weglinien für die Masse m über, wenn ihre Ordinaten im Verhältnisse $m:1$ verändert werden.

Die dort entwickelten Gleichungen für v^2 gehen durch Multiplikation mit m bezw. über in

a. $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m g_R}{R} (\varrho_0^2 - \varrho^2)$ für $\varrho_0 < R$ und $\varrho < R$,

b. $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m g_R R^2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)$ für $\varrho_0 > R$ und $\varrho > R$,

während dem Falle c. die früher entwickelte Gleichung (S. 252)

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m g \,.\, h$$

entspricht, in welcher h eine Hebung oder Senkung in der Nähe der Erdoberfläche bedeutet.

Nach der allgemeinen Betrachtung auf S. 247 stellt die rechte Seite dieser Formeln den Wert der Arbeit dar, welcher den Übergängen $0 \ldots t$ oder $t \ldots 0$ entspricht. Es liegt hier der Fall vor, in dem sich diese Arbeit in der Form $-(U - U_0)$ darstellen läßt, und zwar so, daß U, abgesehen von Konstanten, nur von der zur Zeit t vorhandenen Stellung des materiellen Punktes zu den mit ihm in gegenseitiger Einwirkung stehenden Massen, d. h. hier von ϱ abhängt. Man hat nämlich für $E \doteq \frac{1}{2} m v^2$ und

a. für $+U = \frac{1}{2} \frac{m g_R}{R} \varrho^2$:

$$E - E_0 = -(U - U_0)$$

und b. für $-U = \frac{m g_R R^2}{\varrho}$:

$$E - E_0 = -(U - U_0),$$

d. h. in beiden Fällen:

$$E + U = E_0 + U_0 = constans.$$

Hier ist also ein Potential U vorhanden, so daß die Summe der Bewegungsenergie E und der Spannungsenergie U zu jeder Zeit einen konstanten Wert behält.

In beiden Fällen hängt das Potential nur von ϱ ab, so daß die Niveauflächen hier Kugelflächen sind, deren Mittelpunkt das Centrum der Erde ist.

Da die Arbeit des Überganges $0 \ldots t$ oder $t \ldots 0$ hier als Differenz der Potentialwerte für 0 und t oder für t und 0 erscheint, so ist das Potential selbst, wie auch die Dimension des Ausdrucks zeigt, als Arbeit anzusehen.

Um diese Arbeit zu veranschaulichen, hat man nur $U_0 = 0$ zu setzen, was bei a. für $\varrho_0 = 0$ und bei b. für $\varrho_0 = \infty$ eintritt.

Im Falle a. bezeichnet das Potential für ϱ den Wert der Arbeit, welche dem Übergange vom Mittelpunkte der Erde bis zur Stelle ϱ entspricht, oder dem umgekehrten Übergange.

Im Falle b. bezeichnet das Potential für ϱ den Wert der Arbeit, welche dem Übergange von der Stelle ϱ bis ins Unendliche entspricht, oder dem umgekehrten Übergange.

Da es sich um eine Anziehung handelt, so entspricht die Arbeit im Sinne der Kraft, welche als positiv bezeichnet werden sollte, der Bewegung zum Erdmittelpunkt hin.

Im Falle a. ist U positiv, so daß hier das Potential dem Übergange von der Stelle ϱ bis zum Erdmittelpunkt entspricht; im Falle b. ist U negativ, so daß hier das Potential dem Übergange von der Stelle ϱ bis ins Unendliche entspricht.

Führt man die Konstante k des Newtonschen Gesetzes ein, so gilt für den Außenraum der Erde, deren Masse wieder durch m_e bezeichnet werden mag, da $k = \frac{R^2 \cdot g_R}{m_e}$ ist,

$$U = -\frac{k m_e \cdot m}{\varrho}$$

und demnach allgemein für Anziehungen nach dem Newtonschen Gesetze (bei Beschränkung auf den Außenraum):

$$U = -\frac{k m_1 m_2}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 88)$$

Will man für das Innere der Erde eine ähnliche Formel gewinnen, so muß man $k' = \frac{1}{R} \cdot \frac{g_R}{m_e}$ einführen; man erhält dann:

$$U = +\tfrac{1}{2} k' m_e \cdot m \cdot \varrho^2$$

und demnach allgemein:

$$U = +\tfrac{1}{2} k' m_1 m_2 \cdot \varrho^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 89)$$

Man bemerkt leicht, daß die Ableitung von U für ϱ im zweiten Falle den Wert der Kraft $k' m_1 m_2 \varrho$ giebt, dasselbe gilt auch im ersten Falle, da die Ableitung von $\frac{1}{\varrho} = \varrho^{-1}$ den Wert $-\varrho^{-2}$ hat.

Die Bedeutung der Ableitung bestand darin, die Differenz der Werte einer Funktion für ϱ' und ϱ zu der Differenz von ϱ' und ϱ selbst ins Verhältnis zu setzen und gegebenenfalls den Grenzwert dieses Verhältnisses zu bestimmen. Hier hat man also:

$$\text{Durchschnittskraft} = \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Änderung der Entfernung vom Centrum}}.$$

Dasselbe Ergebnis zeigt auch unmittelbar die graphische Darstellung der Figuren 102 und 103, welche auch darthut, daß die Kraft selbst als der Grenzwert obigen Verhältnisses erscheint.

Dies wird von Bedeutung, wenn man noch die Niveauflächen für die beobachteten Potentiale heranzieht.

Allgemein gilt hier folgendes:

Da $E + U = constans$ ist, so entspricht jeder Niveaufläche (Kugelfläche um den Erdmittelpunkt) ein bestimmtes E, d. h. eine bestimmte Geschwindigkeit. Bewegt sich also der materielle Punkt in einer Niveaufläche, so ändert sich seine Geschwindigkeit durch die zu U gehörige Kraft nicht; diese leistet also bei dieser Bewegung keine Arbeit und steht demnach senkrecht zur Bahn, d. h. senkrecht zur Niveaufläche. Zieht man von einer Niveaufläche, senkrecht zu dieser, zu einer benachbarten Niveaufläche ein Linienelement u. s. f., so ist die U entsprechende Kraft stets Tangente an die entstehende Bahn, welche deshalb Kraftlinie heißt.

Geht der materielle Punkt von einer Niveaufläche (U_1) zu einer anderen (U_2) über, so ist die Arbeitsleistung für diesen Übergang stets dieselbe, da $E_1 - E_2 = -(U_1 - U_2)$ ist, d. h. sie ist unabhängig von dem Wege, so daß dieser Weg z. B. auch durch den Weg auf einer Kraftlinie zwischen U_1 und U_2 ersetzt werden kann.

Jedem Punkte P des Raumes entspricht also hier ein bestimmter Wert des Potentials, und die Arbeitsleistung für einen Übergang auf irgend einem Wege von P_1 nach P_2 hängt nur von den Potentialwerten in P_1 und P_2 ab.

In unserem Falle sind die Niveauflächen, welche für ein konstantes g Ebenen (vergl. S. 252) waren, concentrische Kugelflächen, die Kraftlinien also Strahlen (Gerade) aus dem Centrum.

Man kann die beiden Potentiale, welche hier behandelt wurden, natürlich auch in graphischer Darstellung unmittelbar veranschaulichen, indem man ϱ auf der Abscissenachse und U als Ordinaten dazu aufträgt. Dabei erhält man für das Potential der inneren Punkte eine Parabel, für das Potential der äußeren Punkte eine gleichseitige Hyperbel.

Wenn die Kraft der gegenseitigen Einwirkung zweier materieller Punkte, abgesehen von Konstanten, nur von der Entfernung ϱ abhängt, so ist übrigens stets ein Potential vorhanden und zwar giebt dessen Ableitung nach ϱ stets die entsprechende Kraft. Man weist dies, entsprechend dem Verfahren für Fig. 102 und 103, nach, indem man für ganze positive n die Beschleunigung $C \,.\, \varrho^n$ und die Beschleunigung $C \cdot \frac{1}{\varrho_n}$ behandelt, womit auch die Frage für die Beschleunigung:

$$\frac{a_m}{\varrho^m} \cdots + \frac{a_3}{\varrho^3} + \frac{a_2}{\varrho^2} + \frac{a_1}{\varrho} + b + c_1 \varrho + c_2 \varrho^2 + c_3 \varrho^3 + \cdots c_n \varrho^n$$

für ein endliches m und n erledigt ist.

Von diesem Ergebnisse aus muß man den Übergang zu entsprechenden Potenzreihen (mit unendlich-vielen Gliedern) bewerkstelligen.

Die Beziehung dieser Betrachtungen zu den Centralbewegungen,

bei welchen die Beschleunigung von dem Abstande des beweglichen Punktes vom Centrum abhängt, ist ersichtlich.

4. **Die Energie der Geschosse.** Aus der Aufschlaggeschwindigkeit v am Ziele Z läßt sich bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes die Energie eines Geschosses ohne weiteres nach der Formel $\frac{1}{2} m v^2$ berechnen. Bei Berücksichtigung dieses Widerstandes muß die Konstante k der Formeln auf S. 164 u. f. eingeführt werden. Für sie gilt erfahrungsmäßig der Ansatz:

$$k = \sqrt{\frac{\zeta \,.\, F}{G} \cdot \frac{\delta}{2\,g}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 90)$$

in welchem F den größten Querschnitt des bewegten Körpers, senkrecht zur Richtung der Bewegung, G dessen Gewicht und ζ eine von der Form der Oberfläche abhängige Konstante bezeichnet, während δ das Gewicht von 1 cbm des widerstehenden Mittels darstellt.

Für Kugeln ist $\zeta = 0{,}5$.

Für Luft kann man im Mitel $\delta = 1{,}29$ setzen.

Aus der Anfangsgeschwindigkeit c berechnet sich beim senkrechten Schusse nach oben die Aufschlaggeschwindigkeit nach der Formel:

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2 k}}\,.$$

Für die Dauer des Falles vom höchsten Punkte gilt die Formel:

$$\frac{1}{2\,g\sqrt{k}}\ log\ nat.\ \frac{1 + v\sqrt{k}}{1 - v\sqrt{k}}\,.$$

Beim rasanten Schusse ist, für x als Horizontalstrecke

$$v = c \,.\, e^{-g\,k\,.\,x}$$

zu setzen.

5. **Die harmonische Schwingung bei konstanter Belastung in Richtung der Schwingungen.** Die Beschleunigung, welche der harmonischen Schwingung entspricht, hatte (vergl. S. 173) den Wert $j = -k\,.\,x$, so daß sich die entsprechende Kraft für einen schwingenden materiellen Punkt von der Masse m als $-k\,.\,m\,.\,x$ darstellt. Ist außerdem in der Richtung der Schwingungen das Gewicht der Masse m oder eine andere konstante Kraft K zu berücksichtigen, so ist in Fig. 153 für $OP = x$ die Kraft

$$-kmx + K$$

einzuführen, welche an der Stelle $x = \frac{K}{mk}$ den Wert 0 hat. Nimmt man Punkt O', der vom Mittelpunkt O der unbelasteten Schwingung den Abstand $\frac{K}{mk}$ hat, als neuen Mittelpunkt, so ist für $O'P = x'$:

$$x = OP = O\,O' + x' = \frac{K}{mk} + x'$$

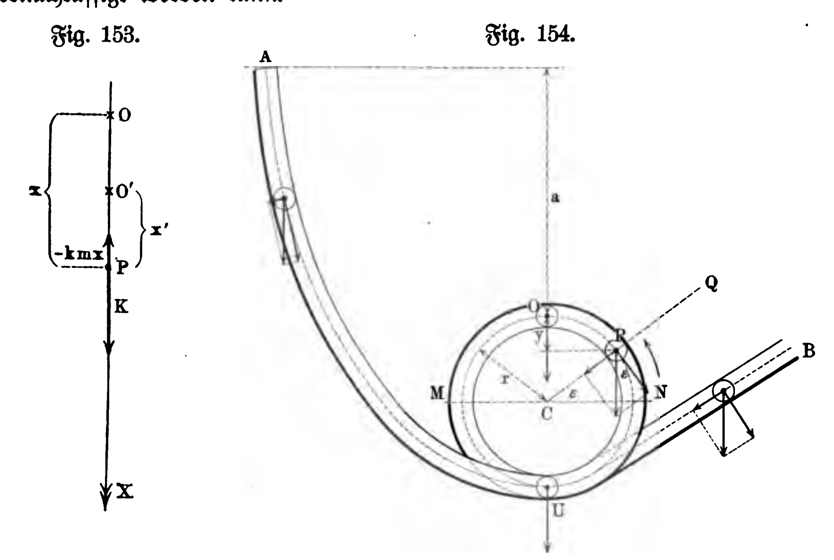
und demgemäß ist die Kraft

$$-kmx + K = -K - kmx' + K = -kmx'.$$

Demnach entsteht unter dem Einflusse der Kraft K eine Schwingung, welche mit der gegebenen Schwingung genau übereinstimmt, nur ist ihr Mittelpunkt O' gegen den früheren Mittelpunkt O um die Strecke $\frac{K}{mk}$ verschoben.

Diese Betrachtung gilt vielfach für elastische Schwingungen, bei denen die Masse des schwingenden Körpers gegenüber der angehängten Belastung vernachlässigt werden kann.

Fig. 153. Fig. 154.



6. Die Centrifugalbahn. Eine Kugel bewege sich, wie Fig. 154 andeutet, in einer gebogenen Röhre von A über U und N nach O und von O über M und U nach B und zwar unter der Voraussetzung, daß der mittlere Teil der Röhre kreisförmig gebogen ist. Es ist der Zwang Z für die Bahn des Kugelmittelpunktes zu untersuchen, falls von dem Einflusse der Reibung abgesehen wird. Zerlegt man das Gewicht der Kugel nach Tangente und Normale der Bahn ihres Mittelpunktes, so stellt die Normalkomponente stets den Druck auf die Röhre dar, den diese durch ihre Reaktion aufzuheben hat. Denkt man sich die Röhre senkrecht zur Ebene der Zeichnung in der Bahn des Kugelmittelpunktes zerschnitten, so kann man den einen Teil die äußere, den anderen die innere Röhrenhälfte nennen. Auf der Linie AUN und dann wieder auf der Linie MUB hat die äußere Röhrenhälfte die Normalkomponente des Gewichts zu überwinden, auf der Linie NOM hat das dagegen die innere Röhrenhälfte zu thun, falls die Kugel an jeder Stelle der Bahn ruhend gedacht wird. Da die Kugel thatsächlich in Bewegung ist, so hat ihr die Röhre, und zwar lediglich durch die äußere Hälfte, außerdem die nötige Centripetalbeschleunigung zu liefern. Demgemäß ist der

Zwang der Röhre, abgesehen von der Linie NOM, für alle Stellen leicht zu bestimmen. Auf der Linie NOM würde die innere Hälfte der Röhre durch ihre Reaktion die Normalkomponente des Gewichts der ruhenden Kugel aufheben, während für die bewegte Kugel die äußere Hälfte deren Centripetalbeschleunigung zu liefern hat. Es fragt sich, welche Beziehungen hier für die ohne Reibung sich bewegende Kugel thatsächlich auftreten. Dazu betrachten wir die Kugel in der Stellung P, welche gegen die Stellung N um $\measuredangle\, PCN = \varepsilon$ abweicht. Hier gilt:

$$\left[\frac{m v^2}{r}\right] = [Z] + [m g \sin \varepsilon].$$

Da alle zu betrachtenden Kräfte in derselben Geraden CQ liegen, so gilt, wenn die Richtung QC als positiv angenommen wird, auch

$$\frac{m v^2}{r} = Z + m g \sin \varepsilon,$$

d. h. man hat $Z = \frac{m v^2}{r} - m g \sin \varepsilon$ und zwar stellt Z bei positivem Vorzeichen eine Kraft dar, die von der äußeren Hälfte, bei negativem Vorzeichen eine Kraft dar, die von der inneren Hälfte der Röhre ausgeht. Wird die Geschwindigkeit in P durch v bezeichnet, so gilt, wenn die Geschwindigkeit in A den Wert 0 hat:

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m\, 0^2 = \text{Arbeit für } AUNP.$$

Die Arbeit der Effektivkraft, welche die Resultante von Kugelgewicht und Zwang ist, ist hier gleich der Arbeit des Kugelgewichtes, da der Zwang stets senkrecht zur Bahn steht und also keine Arbeit leistet. Diese Arbeit entspricht der Senkung von P gegen A, welche $a + y$ beträgt, so daß also gilt:

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = m g (a + y).$$

Für $y = r - r \sin \varepsilon$ erhält man:

$$v^2 = 2 g (a + r - r \sin \varepsilon)$$

und demnach:

$$Z = 2 m g \left(\frac{a}{r} + 1 - \frac{3}{2} \sin \varepsilon\right).$$

Soll nun Z stets positiv sein, so muß für den größten Wert von $\sin \varepsilon$

$$\frac{a}{r} + 1 > \frac{3}{2} \sin \varepsilon$$

gelten, d. h. man hat:

$$\frac{a}{r} + 1 > \frac{3}{2} \text{ oder } \frac{a}{r} > \frac{1}{2} \text{ oder } a > \frac{r}{2}.$$

Ist also die Röhre so konstruiert, daß $a > \frac{r}{2}$ ist, so ist Z stets positiv, d. h. in der Richtung QC gelegen, so daß in diesem Falle die äußere Hälfte der Röhre allein den Zwang ausübt.

In diesem Falle kann man die innere Hälfte der Röhre ganz fort-

nehmen. Ersetzt man die äußere Hälfte durch einen entsprechend gebogenen Blechstreifen, so entsteht die (auch als Kinderspielzeug) bekannte Centrifugalbahn, bei der ein Wagen auch das Bahnstück $N\,O\,M$ durchläuft, ohne abzufallen.

7. **Das Cykloidenpendel.** Um die Schwingung (vergl. Fig. 155) auf der Cykloide zu untersuchen, hat man den Wert von $[j_T]$ für eine bestimmte Stellung P des materiellen Punktes mit der Länge des Bogens $S\,P$ zu vergleichen (vergl. S. 176), der den tiefsten Punkt S der Cykloide (Ruhelage) mit P verbindet. Ist die Lage des erzeugenden Kreises für P durch den Wälzungswinkel ε bestimmt, so bildet $[g]$ in P mit der Tangente den Winkel $\frac{\varepsilon}{2}$, so daß

Fig. 155.

$$[j_T] = \left[g \cos\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

ist. Um $S\,P$ zu bestimmen, denken wir uns die Cykloide durch ein gleichförmiges Abrollen des erzeugenden Kreises bestimmt, so daß ε der Zeit t proportional (p) ist. Ist die Stellung des erzeugenden Kreises zur Zeit t durch ε und zur Zeit $t'' = t + \tau$ durch ε'' bestimmt, so läßt sich der entsprechende, in der Zeit τ erzeugte Bogen $\widehat{P\,P''}$ für $\lim \tau = 0$ als ein Kreisbogen aus dem Mittelpunkte des Krümmungskreises auffassen. Die Normalen von P und P'' bilden mit den Vertikalen bezw. die Winkel $90^0 - \frac{\varepsilon}{2}$ und $90^0 - \frac{\varepsilon''}{2}$, so daß der Winkel zwischen diesen Normalen $\frac{\varepsilon'' - \varepsilon}{2} = \frac{p t'' - p t}{2} = \frac{1}{2} p \tau$ ist. Da der Mittelpunkt des Krümmungskreises der Schnittpunkt benachbarter Normalen ist, so ist $\lim \widehat{P\,P''}$ ein Kreisbogen mit dem Radius $\rho = 2\,P\,M = 4\,r \sin\frac{\varepsilon}{2}$ $= 4\,r \sin\frac{p\,t}{2}$ vom Centrumswinkel $\frac{1}{2} p\,\tau$ für $\lim \tau = 0$. Demgemäß ist die Erzeugungsgeschwindigkeit w der Cykloide bestimmt als

$$w = \lim\left[\frac{\widehat{P\,P''}}{\tau}\right] = 4\,r \cdot \frac{p}{2} \cdot \sin\frac{p\,t}{2}.$$

Demnach ist die zugehörige Stellungsgleichung (vergl. S. 73):

$$s = \text{Konstante} - 4\,r \cos \frac{p\,t}{2}.$$

Da für $t = 0$, falls man die Stellung in A zu zählen beginnt, $s = 0$ ist, so gilt:

$$0 = \text{Konstante} - 4\,r \quad \text{oder} \quad \text{Konstante} = 4\,r,$$

d. h. man hat:

$$s = A\,P = 4\,r - 4\,r \cos \frac{p\,t}{2}.$$

Daraus folgt $A\,S = 4\,r$ für $\varepsilon = p\,t = 180^0 = \pi$, d. h. für:

$$\frac{\varepsilon}{2} = \frac{p\,t}{2} = 90^0 = \tfrac{1}{2}\,\pi,$$

d. h. man hat:

$$P\,S = A\,S - A\,P = 4\,r \cos \frac{p\,t}{2} = 4\,r \cos \frac{\varepsilon}{2}.$$

Versucht man den Ansatz

$$j_T = -k\,.\,S\,P,$$

so erhält man:

$$j_T = -\frac{g}{4\,r} \cdot S\,P,$$

d. h. j_T ist in aller Strenge zu $S\,P$ proportional.

Aus $k = \frac{g}{4\,r}$ folgt ohne weiteres (vergl. S. 174):

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{4\,r}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 91)$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeit des materiellen Punktes in P mit v, so gilt für den Zwang $[Z]$ der Bahn, falls keine Reibung vorhanden ist:

$$Z = \frac{m\,v^2}{\varrho} + m\,g \sin \frac{\varepsilon}{2}$$

und zwar hat $[Z]$ die Richtung $P\,M$.

Beginnt die Bewegung in A, so ist die Geschwindigkeit v in P bestimmt durch die Formel

$$\tfrac{1}{2}\,m\,v^2 - O = \text{Arbeit für } A\,P.$$

Da der Zwang der Bahn zu dieser senkrecht steht und also keine Arbeit leistet, so ist nur die Arbeit von $m\,g$ für die Senkung h von A nach P in Rechnung zu stellen, d. h. man hat:

$$\tfrac{1}{2}\,m\,v^2 = m\,g\,h = m\,g\,.\,P\,M \sin \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demnach ist:

$$\frac{m\,v^2}{\varrho} = \frac{2\,m\,g\,.\,P\,M\,.\,\sin \frac{\varepsilon}{2}}{2\,P\,M} = m\,g \sin \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$Z = 2\,m\,g\,sin\,\frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $sin\,\frac{\varepsilon}{2}$ kann man auch $\sqrt{\frac{h}{2\,r}}$ setzen.

Für $sin\,\frac{\varepsilon}{2} = 1$, d. h. für $\varepsilon = 180^0$ im Punkte S hat Z sein Maximum.

Beginnt die Bewegung in A', so gilt für P:

$$\tfrac{1}{2}\,m\,v^2 = m\,g\,(h - h')$$

und

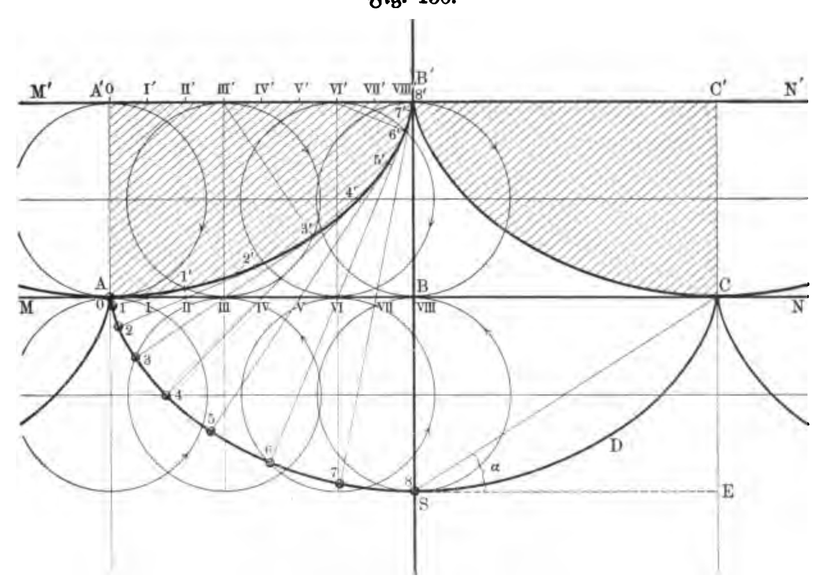
$$Z = 2\,m\,g\left(sin\,\frac{\varepsilon}{2} - \frac{h'}{4\,r\,sin\,\frac{\varepsilon}{2}}\right) = m\,g\,\frac{2\,h - h'}{\sqrt{2\,r\,h}},$$

d. h. auch jetzt hat Z sein Maximum in S.

Dies gilt für Schwingungen einer Kugel in einer cykloidischen Rinne oder für eine durchbohrte Kugel auf einem cykloidisch-gebogenen Drahte, bei Vernachlässigung jeder Reibung.

Außerdem kann man auch Fadenpendel konstruieren, für welche der Mittelpunkt der Kugel auf einer Cykloide schwingt. Es beruht dies auf der

Fig. 156.



bemerkenswerten Eigenschaft der Cykloide, daß der geometrische Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte wiederum eine Cykloide ist, wie es Fig. 156 zeigt, in welcher der Kreis unterhalb der Geraden $M\,N$ die Cykloide $A\,S\,C$ erzeugt,

deren Krümmungsmittelpunkte dann die Cykloide $A B' C$ bilden, für welche $M' N'$ die feste Polbahn ist ($11' = 2 . 1$ I, $22' = 2 . 2$ II u. s. w.).

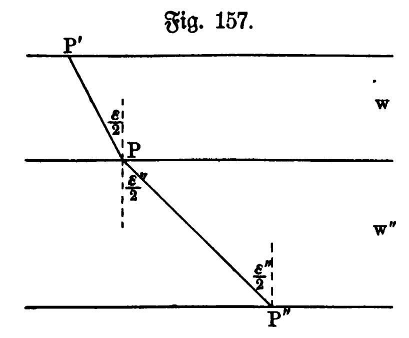
Faßt man $B' S = 4 r$ als ein Fadenpendel auf, so wickelt sich dessen Faden bei einer Schwingung nach links stetig auf der Cykloide $B' A$ auf, während der Mittelpunkt der Kugel die Cykloide $S A$ beschreibt.

Nennt man den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve deren Evolute und die Kurve selbst in Bezug auf diese deren Evolvente, so läßt sich die Evolvente stets darstellen durch ein derartiges Aufwickeln eines Fadens auf die Evolute, nur sind im allgemeinen Evolute und Evolvente höchst verschiedene Kurven.

Um diesen Gedanken praktisch auszuführen, hat man ein Fadenpendel zwischen zwei cylindrischen Backen vom Schnitte $B' A$ und $B' C$ aufzuhängen, wie es Fig. 156 andeutet.

Weil die Zeit für die Schwingungen auf der Cykloide vom Ausschlage $S P$ völlig unabhängig ist, was beim Kreispendel nur angenähert für geringe Ausschläge gilt, so wird jeder Bogen PS in derselben Zeit durchlaufen, falls die Geschwindigkeit in P den Wert 0 hat. Man nennt deshalb diese Schwingungen isochron (von gleicher Zeitdauer) und bezeichnet die Cykloide selbst als Tautochrone (Linie gleicher Fallzeit). Unter allen ebenen Kurven ist die Cykloide die einzige Tautochrone; wickelt man deren Ebene auf Cylinder auf, so entstehen gewundene Tautochronen. Eine andere bemerkenswerte Eigenschaft der Cykloide folgt noch aus dem Ausdrucke für ihre Erzeugungsgeschwindigkeit [w], da diese mit den Vertikalen den Winkel $\frac{\varepsilon}{2}$ bildet und den Wert $2 r p \sin \frac{\varepsilon}{2}$ hat. Betrachtet man nämlich drei benachbarte Punkte $P' P P''$ der Cykloide in erster Annäherung, so sind $P' P$ und $P P''$ proportional zu den Geschwindigkeiten w und w'' in P und P'', und demnach entspricht die Gleichung:

Fig. 157.



$$\frac{P' P}{P P''} = \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\sin \frac{\varepsilon''}{2}}$$

dem Brechungsgesetze des Lichtes, wie Fig. 157 zeigt, bei dem Übergange aus einem Medium, für das die Geschwindigkeit des Lichtes w ist, zu einem Medium, für das die Geschwindigkeit des Lichtes w'' ist. Wenn sich also in einem Medium die Geschwindigkeit des Lichtes senkrecht zu einer Ebene proportional zu w ändert, so sind die Bahnen des von einem leuchtenden Punkte jener Ebene ausgehenden Lichtes Cykloiden, deren Ebenen auf jener Ebene senkrecht stehen.

Da nun für das Licht das Princip der schnellsten Ankunft gilt, wonach die thatsächliche vorhandene Bahn des Lichtes von einem Punkte zu einem anderen unter allen zwischen ihnen denkbaren

Bahnen die geringste Zeit beansprucht; so wird die Cykloide bei der gegebenen Geschwindigkeit w rascher durchlaufen als irgend eine andere Linie (einschließlich der Geraden), die man zwischen zweien ihrer Punkte zeichnen kann.

Da nun aber die Erzeugungsgeschwindigkeit w der Cykloide proportional ist zu der Geschwindigkeit v, mit der ein schwerer Punkt aus der Ruhelage auf ihr fällt, so gilt diese Betrachtung auch für den Fall auf der Cykloide, d. h. ein Punkt fällt auf der Cykloide von einer Stelle P_1 zu einer Stelle P_2 rascher, als wenn man P_1 und P_2 durch irgend eine andere Linie verbindet. Fällt der Punkt auf der Cykloide (vergl. Fig. 155) aus der Ruhelage A nach P, so hat er in P die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g \,.\, PM \sin\frac{\varepsilon}{2}} = 2\sqrt{gr} \,.\, \sin\frac{\varepsilon}{2},$$

so daß $w = v$ ist für $2rp = 2\sqrt{gr}$, d. h. für $p = \sqrt{\frac{g}{r}}$.

Man nennt die Cykloide wegen der entwickelten Eigenschaft **Brachystochrone** (Linie der kürzesten Fallzeit).

Will man diese Eigenschaft ableiten, ohne sich auf die Lichtbewegung zu beziehen, so kann man folgendermaßen verfahren. In drei benachbarten Punkten P', P, P'' einer Kurve (vgl. Fig. 158) sei die Geschwindigkeit eines auf ihr fallenden Punktes bezw. v', v, v'', so daß in **zweiter Annäherung**

$$P'P = \frac{v' + v}{2}\tau$$

und

$$PP'' = \frac{v + v''}{2} \cdot \tau$$

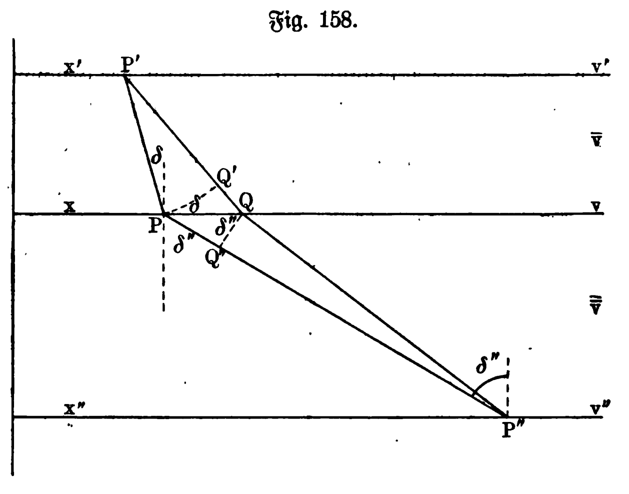
ist. Für

$$\frac{v' + v}{2} = \bar{v}$$

und

$$\frac{v + v''}{2} = \bar{\bar{v}}$$

Fig. 158.



ist also die Zeit, welche das Durchlaufen von $P'PP''$ erfordert,

$$\frac{P'P}{\bar{v}} + \frac{PP''}{\bar{\bar{v}}}.$$

Giebt man P' und P'' die festen Koordinaten x' und x'' und P die veränderliche Koordinate x, so ist diese Zeit eine Funktion von x, die sich für $\lim \tau = 0$ leicht als $f(x)$ bestimmen läßt, was aber nicht erforderlich ist.

Da für den freien Fall die Niveauflächen horizontal liegen, so gilt für eine andere Kurve, welche durch P', Q, P'' geht, dasselbe System der Ge-

schwindigkeiten, falls sie statt der ersten unter sonst gleichen Umständen die Bahn eines fallenden materiellen Punktes ist. Die Zeit, welche auf dieser Kurve für die Bahn $P'QP''$ nötig ist, hat für $PQ = \xi$ den Wert $f(x + \xi)$, dem auch der Ausdruck

$$\frac{P'Q}{\bar{v}} + \frac{QP''}{\bar{\bar{v}}}$$

gegeben werden kann.

Soll diese Zeit ein Minimum sein, so muß die Ableitung von $f(x)$ verschwinden, d. h. es muß

$$lim\left[\frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi}\right]_{\xi=0} = 0$$

sein. Der Ausdruck in der Klammer hat die Gestalt

$$\frac{P'Q - P'P}{\bar{v}\,.\,PQ} - \frac{PP'' - QP''}{\bar{\bar{v}}\,.\,PQ}$$

und nimmt für $P'Q' = P'P$ und $P''Q'' = P''Q$ an der Grenze die Form

$$\frac{QQ'}{\bar{v}\,.\,PQ} - \frac{PQ''}{\bar{\bar{v}}\,.\,PQ} = \frac{\sin\delta}{\bar{v}} - \frac{\sin\delta''}{\bar{\bar{v}}}$$

an. Demgemäß gilt für die Grenze $lim\,\xi = 0$:

$$\frac{\bar{v}}{\bar{\bar{v}}} = \frac{\sin\delta}{\sin\delta''},$$

d. h. das gesuchte Minimum tritt ein, wenn der Geschwindigkeitswert stets dem Sinus zwischen Tangente und Vertikale proportional ist, d. h. für die Cykloide.

8. **Der Schwungkugelregulator.** In Fig. 159 stelle OX eine Drehungsachse und ON die Mittellinie eines geraden, mit der Achse fest ver-

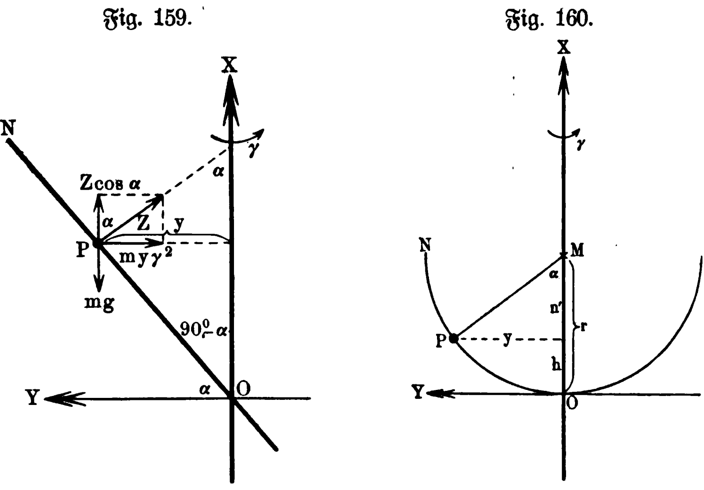


Fig. 159. Fig. 160.

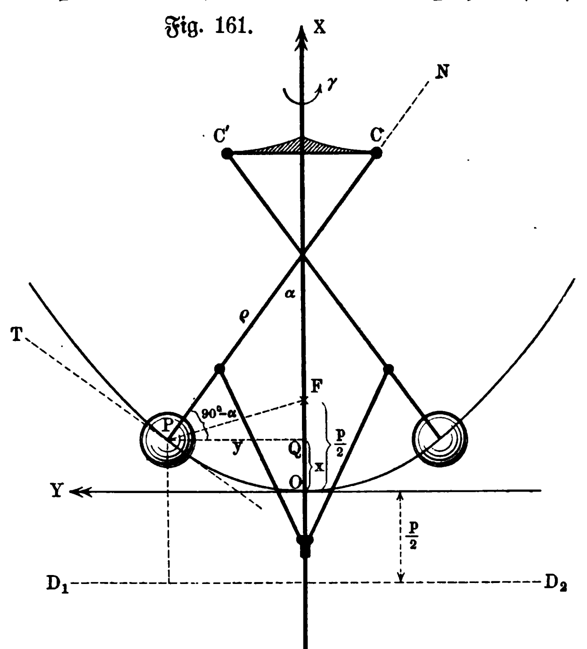
bundenen Drahtes dar, welcher dem Mittelpunkte einer Kugel von der Masse m als Führung dient. Es ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen

die Kugel für eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit γ relativ zur Führung in Ruhe ist, falls keine Reibung in Frage kommt. Ist die Kugel an der Stelle P in relativer Ruhe, so muß der Zwang der Führung einerseits die Centripetalkraft $m y \gamma^2$ liefern und anderseits das Gewicht $m g$ aufheben, so daß $Z \sin \alpha = m y \gamma^2$ und $Z \cos \alpha = m g$ und demnach $y = \frac{g}{\gamma^2} \cdot \operatorname{tang} \alpha$ ist. Demnach giebt es nur eine Stelle, für welche der Kugelmittelpunkt in relativer Ruhe zu ON bleibt. Wächst γ, so wächst auch $m y \gamma^2$ und demnach Z, so daß $Z \cos \alpha > m g$ wird, d. h. die Kugel gleitet aufwärts; nimmt γ ab, so gleitet die Kugel abwärts.

Ersetzt man die Gerade ON durch eine ebene Kurve (vergl. Fig. 160), in deren Ebene die Drehungsachse liegt, so ist $n' = y \operatorname{cotg} \alpha = \frac{g}{\gamma^2}$, d. h. die Subnormale für eine Stelle P erhält einen bestimmten Wert. Für den Kreis ist z. B. die Höhe h des Kugelmittelpunktes über O gegeben als $r - n' = r - \frac{g}{\gamma^2}$, falls relative Ruhe eintreten soll.

Da die Parabel $y^2 = 2px$ die **konstante** Subnormale p hat, so ist $y^2 = 2 \frac{g}{\gamma^2} x$ die Gleichung einer Parabel, auf der die Kugel an **jeder** Stelle in relativer Ruhe ist.

Fig. 161.



Macht die Parabel n Umdrehungen in der Minute, so ist

$$y^2 = \frac{1790}{n^2} x$$

(für $n = 40$ ist z. B. $y^2 = 1{,}12 x$), d. h. die **eine**, durch diese Gleichung dargestellte Parabel entspricht der Tourenzahl n. Daß die Parabel die entwickelte Eigenschaft hat, kann man auch folgendermaßen ableiten. Soll die Kugel auf einer Kurve an jeder Stelle in relativer Ruhe sein, so erhalten in der Gleichung (vergl. S. 265)

$$m[j_r] \overset{\times}{=} m[j_G] \overset{\times}{+} m[\overline{j_f}] \overset{\times}{+} m[\overline{j_d}]$$

die Größen $[j_r]$ und $\overline{[j_d]}$ den Wert 0.

Da nun $m[j_G]$ die Resultante aus $[m\,g]$ und $[Z]$ ist, während $[\bar{j}_f]$ die fingierte Centrifugalkraft vom Werte $m\,y\,\gamma^2$ darstellt, so zerstören sich diese drei Kräfte gegenseitig, ihre Arbeitsleistung für eine beliebige virtuelle Verrückung ist also Null. Benutzt man das Bahnstück $O\,P$ als virtuelle Bahn, so leistet $[Z]$ keine Arbeit, da es stets senkrecht zu den Elementen von $O\,P$ steht, und es muß also die Summe der Arbeit von $[m g]$ und $[m\bar{j}_f]$ für $O\,P$ als Bahn den Wert 0 haben. Die Arbeit von $[m\,g]$ ist $-m\,g\,x$, da eine Hebung vom Werte x vorliegt; die Arbeit von $[m\bar{j}_f]$ ist $+\frac{1}{2}m\,y^2\gamma^2$, weil $m\bar{j}_f$ von 0 bis $m\,y\,\gamma^2$ wächst und die Summe der Projektionen der Bahnelemente auf die Kraftrichtung den Wert y hat, und weil die Verrückungen im Sinne der Kraft erfolgen.

Man hat also:

$$-m\,g\,x + \tfrac{1}{2}m\,y^2\gamma^2 = 0, \text{ d. h. } y^2 = 2\frac{g}{\gamma^2}x.$$

Da eine Kugel, welche in der parabolischen Führung für ein bestimmtes γ in Ruhe ist, bei Vergrößerung von γ steigt und bei der Verkleinerung von γ sinkt, so kann man dieses Steigen und Sinken benutzen, um die Drehung einer Achse, welche eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit γ haben soll, zu regulieren. Bei einer Dampfmaschine z. B. muß das Steigen der Kugel den Zutritt des Dampfes hemmen, das Sinken ihn erleichtern. Da in solchen Fällen der Selbstregulierung nur ein sehr kleiner Bogen der Parabel beschrieben wird, so kann man diesen Parabelbogen durch einen Kreisbogen ersetzen, der aus dem entsprechenden Krümmungsmittelpunkt der Parabel beschrieben ist.

Liegt in Fig. 161 (a. v. S.) für P der Krümmungsmittelpunkt in C, so wird für den skizzierten Regulator die Führung durch die Parabel überflüssig. Man hat $\frac{1}{2}C'\,C = P\,C\sin\alpha - y$, wobei $P\,C = \varrho$, α und y durch die Parabel $y^2 = 2\frac{g}{\gamma^2}x$ und die Lage von P auf ihr gegeben sind. Hat man für eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit γ, welche die Drehung haben soll, die entsprechende Parabel konstruiert und auf ihr die Stelle P willkürlich gewählt, so ist damit C und also auch das Konstruktionsstück $C'\,C$ gegeben.

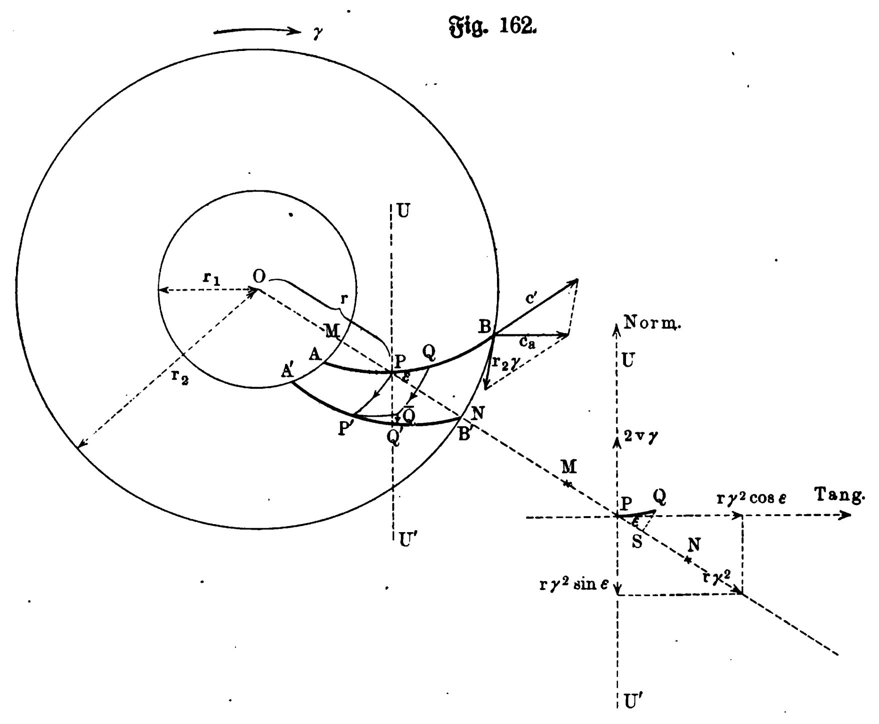
Denkt man sich Fig. 161 um 180° gedreht, so kann man die Parabel als die Bahn eines in O entspringenden Horizontalwurfes von der Geschwindigkeit c ansehen und für diese die Normalbeschleunigung in P bestimmen, um ϱ zu erhalten. Man findet zunächst aus $y = c\,t$ und $x = \frac{1}{2}g\,t^2$ die Gleichung $y^2 = \frac{2\,c^2}{g}x$, so daß $c = \frac{g}{\gamma}$ zu setzen ist, dann $v^2 = c^2 + g^2t^2 = c^2 + 2\,g\,x$, ferner $\cos\alpha = \frac{c}{v}$ und $\sin\alpha = \frac{g.t}{v} = \frac{g\,y}{v\,c}$ und schließlich $\varrho = \frac{v^2}{g\cos\alpha}$. Vgl. S. 170.

Fig. 161 entspricht den Angaben $n = 50$, d. h. $\gamma \sim 5$, $c \sim 2\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $p = \frac{c^2}{g} \sim 0{,}4\,\text{m}$. Willkürlich gewählt ist $y = 0{,}3\,\text{m}$ für die Ruhelage von P, der außerdem $x = 0{,}1125$ entspricht, so daß nun $v^2 \sim 6{,}25$ und $\alpha \sim 36^0\,52'$ und $\varrho \sim 0{,}78\,\text{m}$ wird.

9. Die Radialturbine. Eine Kugel soll die Rinne AB der horizontal gelagerten Scheibe, die Fig. 162 darstellt, ohne Reibung durchlaufen, während sich die Scheibe selbst mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit γ um eine vertikale Achse durch O dreht. Es ist der Zwang für die Bewegung des Kugelmittelpunktes zu bestimmen.

Zur Zeit t mag die (absolute) Lage der Rinne durch AB und die Lage des Kugelmittelpunktes W in ihr, der die Geschwindigkeit v haben mag, durch P dargestellt werden. Innerhalb der Zeit $t \ldots t + \tau$ bewege sich W von P bis Q in der Rinne, während diese aus der (absoluten) Lage AB in die

Fig. 162.



(absolute) Lage $A'B'$ gelangt. Für die Beschleunigung $[j_r]$ des Kugelmittelpunktes in der Rinne gilt dann (vergl. S. 265):

$$[j_r] \overset{\times}{=} [j_G] \overset{\times}{+} [\overline{j_f}] \overset{\times}{+} [\overline{j_d}].$$

Da das Gewicht der Kugel durch die Reaktion der Unterlage stets aufgehoben wird, so können wir es außer Betracht lassen, so daß $[j_G]$ allein durch den Zwang Z, den die Röhre in normaler Richtung ausübt, bestimmt wird. Die Beschleunigung der Verschiebung der Führung für die Zeit τ ist die Centripetalbeschleunigung, die zu dem Bogen PP' gehört, für $\lim \tau = 0$, d. h. $r\gamma^2$, so daß also $[j_f] \overset{\times}{=} [r\gamma^2]$ ist und die Richtung PO hat. Die Beschleunigung $[j_d]$ entspricht der Bewegung auf dem Bogen $\widehat{QQ'}$, sie hat den Wert $2v\gamma$ und die Richtung von $\widehat{QQ'}$ für $\lim \tau = 0$.

Wird nun die Röhre AB bei A mit der Geschwindigkeit c betreten, so gilt für die Stellen A und P:

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}c^2 = F_A^B(j \perp w).$$

Um die rechte Seite auszuwerten, bedenken wir, daß j hier die tangentiale Komponente der Relativbeschleunigung $[j_r]$ bezeichnet, welche durch $j_f \cos\varepsilon = r\gamma^2 \cos\varepsilon$ dargestellt wird. Für $\lim \tau = 0$ entspricht also dem Bahnstücke PQ das Rechteck $PQ \cdot r\gamma^2 \cos\varepsilon = r\gamma^2 (PQ \cos\varepsilon)$. Da nun, wie Fig. 162 zeigt, $PQ \cos\varepsilon = PS$ für $\lim\tau = 0$ ist, so kann dieses Rechteck auch als $r\gamma^2 \cdot PS$ dargestellt werden. Dem Wege AB, von dem PQ ein Teil ist, entspricht der Weg MN, von dem PS der entsprechende Teil ist, so daß die gesuchte Fläche gewonnen wird, wenn man senkrecht zu MN Lote vom Werte $r_1\gamma^2$ bis zum Werte $r\gamma^2$ aufträgt.

Es entsteht ein Trapez vom Inhalte

$$\frac{r_1\gamma^2 + r\gamma^2}{2} \cdot MN = \tfrac{1}{2}\gamma^2(r_1^2 - r^2)$$

und demgemäß ist

$$v = \sqrt{c^2 + \gamma^2(r_1^2 - r^2)}.$$

Die normale Komponente der Relativbeschleunigung $[j_r]$ ist für die Stelle P einerseits $\frac{v^2}{\varrho}$, falls der Krümmungsradius von AB in P den Wert ϱ hat, während sie anderseits durch die Vereinigung der Normalkomponenten von $[j_G]$, $[\bar{j}_f]$ und $[\bar{j}_d]$ gebildet werden kann. Demnach gilt, falls Z nach dieser Komponente gerichtet ist:

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{Z}{m} - r\gamma^2 \sin\varepsilon + 2v\gamma.$$

Man hat also:

$$Z = m\left(\frac{v^2}{\varrho} + r\gamma^2 \sin\varepsilon - 2v\gamma\right).$$

Aus der Gestalt der Kurve AB folgt für jeden Punkt P der Wert von ϱ und ε, so daß auch Z mit Hülfe von v für jeden Punkt von AB bestimmt ist. Die Reaktion der Kugel gegen die Röhre stellt die Gegenkraft $\bar{Z}$ von Z dar, sie liegt in der Richtung PU', wenn Z die Richtung PU hat.

Solange Z positiv ist, hat es die Richtung der Centripetalbeschleunigung der Relativbewegung, d. h. die Richtung PU, der dann PU' für $\bar{Z}$ entspricht, so daß in diesem Falle die hintere Röhrenwand (im Sinne der Bewegung γ) überflüssig ist.

Ersetzt man die ganze Röhre bei positivem Z durch ihre Vorderwand, so stellt sie angenähert eine Schaufel einer Radialturbine dar, für welche die betrachtete Kugel durch ein Wasserteilchen zu ersetzen ist. Soll also umgekehrt die Reaktion Z, d. h. der Druck des Wassers, welcher die treibende Kraft bildet, stets auf die Schaufel wirken, so muß $Z > 0$ sein.

Verläßt die Kugel die Scheibe bei B mit einer bestimmten Relativgeschwindigkeit $[c']$, so erwächst deren absolute Geschwindigkeit $[c'_a]$ aus $[c']$ und $[r^2\gamma]$. Für den Eintritt bei A gilt Entsprechendes.

10. Die östliche Abweichung des freien Falles. Wenn eine Kugel von der Masse m in einer geraden senkrechten Röhre ohne Reibung fällt, so ist deren relative Bahn eine Gerade, während die Achse der Röhre selbst infolge der Erddrehung von der Winkelgeschwindigkeit ω einen Kegelmantel beschreibt, der die Öffnung $90^0 - \beta$ hat, wenn der Ort der Beobachtung die Breite β hat.

Zerlegt man für ein Element der Röhrenachse die Bewegung auf dem Kegelmantel in eine Verschiebung und in eine Drehung, so ist $90^0 - \beta$ der Winkel zwischen Element und Drehungsachse, so daß die nach Osten gerichtete Beschleunigung $[j_d]$ für die Geschwindigkeit w den Wert

$$2\, w\, \omega \sin(90^0 - \beta) = 2\, w\, \omega \cos\beta$$

hat.

Die Beschleunigung j_f ist 0, wenn man der Röhre von vornherein die Richtung der beobachteten Erdschwere giebt.

Da $[j_G]$ aus $[g]$ und aus dem Zwange erwächst, so sind für die Relativbewegung, senkrecht zur relativen Bahn nur die Kräfte Z und $m[\bar{j_d}]$ vorhanden.

Da die relative Bahn gerade ist, so gilt:

$$Z = m\,[\bar{j_d}],$$

d. h. der Zwang besteht in einem Drucke $m[\bar{j_d}]$ nach Westen, dem als Reaktion der Druck der Kugel $m\,[j_d]$ nach Osten entspricht.

Demnach ist die Bewegung der Kugel, nach Beseitigung der Röhre, durch die Beschleunigungen $[g]$ und $[j_d]$ bestimmt.

Für $[g]$ gilt $v = g\,t$ und $s = \frac{g}{2}\,t^2$, falls man g als Konstante betrachtet. Um aus $j_d = 2\, w\, \omega \cos\beta$ die zugehörigen Werte von v und s abzuleiten, müßte man die Geschwindigkeit w auf der relativen Bahn kennen.

Innerhalb der gewählten Annäherung, bei der g als Konstante betrachtet und der Luftwiderstand vernachlässigt wird, kann man w durch v ersetzen.

Unter dieser Voraussetzung ist

$$j_d = 2\, g\, \omega \cos\beta\, .\, t$$

und demnach ist die zugehörige Geschwindigkeit $g\, \omega \cos\beta\, t^2$ und der zugehörige Weg

$$a = \tfrac{1}{3}\, g\, \omega \cos\beta\, t^3.$$

Für eine mäßige Fallhöhe h ist $t^2 = \frac{2\,h}{g}$, so daß

$$a = \tfrac{2}{3}\, \omega \cos\beta \cdot h \cdot \sqrt{\frac{2\,h}{g}} \quad \cdots\cdots \quad 92)$$

ist.

Die berühmten Versuche im Schachte von Freiberg ($\beta = 51^0$) ergaben für $h = 158{,}5$ m:

$$a = 0{,}0283 \text{ m}.$$

Die Rechnung für sie liefert bei der hier gewählten Annäherung:

$$a = 0{,}0276\,\mathrm{m}.$$

Der geringe Unterschied entspricht durchaus der Art der Annäherung, da die Fallzeit wegen des Luftwiderstandes thatsächlich größer ist als t in unserer Formel, so daß die Versuche als Bestätigung der Achsendrehung der Erde gelten dürfen.

Übungen zur Lehre vom materiellen Punkte.

---

1. Auf einen Punkt wirken teils nach derselben, teils nach der gerade entgegengesetzten Richtung die Kräfte + 130 kg, — 50 kg, — 70 kg, — 320 kg, + 75 kg, + 400 kg, deren Resultante der Größe und Richtung nach bestimmt werden soll.

$R = +165$ kg.

2. Auf einen Punkt wirken die Kräfte von 35 kg und 87 kg unter einem rechten Winkel. Es ist die Resultante der Größe und Richtung nach zu bestimmen.

$R = 93{,}77$ kg.

$68^0\,5'$ mit der Kraft von 35 kg.

3. Man soll die auf einen Punkt wirksame Kraft von 120 kg in zwei aufeinander rechtwinkelig stehende Kräfte zerlegen, von denen

a die eine gleich 75 kg sein mag,

b. die eine einen Winkel von $34^0\,7'\,3''$ mit der Resultante bilden soll.

a. $51^0\,19'\,3{,}75''$ mit der Kraft von 75 kg.
93,65 kg.

b. 99,343 kg an dem gegebenen Winkel liegend.
67,306 kg.

4. Auf einen Punkt wirken drei Kräfte gleich 35, 67 und 98 kg, die nicht in einer Ebene liegen und wechselseitig aufeinander rechtwinkelig stehen. Es ist die Größe und Richtung der Resultante zu bestimmen.

123,766 kg
$73^0\,34'\,24''$
$57^0\,13'\,30''$
$37^0\,38'\,42''$

5. Auf einen Punkt wird ein Druck von 550 kg ausgeübt, der nach drei aufeinander normalen Richtungen zerlegt werden soll.

a. Zwei der Komponenten seien 100 und 230 kg.

b. Eine der Komponenten habe eine Größe von 120 kg und die gegebene Kraft bilde mit einer zweiten Komponente den Winkel $15^0\,6'\,14''$.

c. Die gegebene Kraft bilde mit zweien der Komponenten die Winkel 87° 13′ 12″ und 54° 17′ 8″.

a. { 489,49 kg
79° 31′ 27″
65° 16′ 49″
27° 7′ 43″.

b. { 120,00 kg mit 77° 23′ 51″
531,02 „ „ 15° 6′ 14″
78,2 „ „ 81° 49′ 32″
36° 23′ 48″.

c. { 445,7 kg
321,06 „
26,676 „

6. Auf einen Punkt wirken zwei Kräfte von 115 und 89 kg, die miteinander den Winkel 147° 8′ 3″ bilden.

a. Wie groß ist die Resultante der Größe und Richtung nach?

b. Wie groß ist der Winkel, den die gegebenen Kräfte bilden, wenn die Resultante gleich der kleineren oder gleich der größeren der gegebenen Kräfte werden soll?

a. { 62,865 kg, mit der Komponente
von 89 kg den Winkel 83° 4′ bildend.

b. { 130° 14′ 44″
112° 45′ 54″.

7. Die Kraft von 775 kg, an einem Punkte wirksam, soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden.

a. Wenn die Komponenten mit der gegebenen Kraft die Winkel 35° 7′ 11″ und 52° 9′ 8″ bilden.

b. Wenn eine der Komponenten einen Wert von 505 kg erhalten und einen Winkel von 36° 8′ 6″ mit der gegebenen Kraft bilden soll.

c. Wenn eine der Komponenten gleich 600 kg genommen werden soll, und die andere noch zu bestimmende Komponente mit der gegebenen Kraft einen Winkel von 47° 10′ 11″ bilden muß.

d. Wenn die beiden Komponenten der Größe nach gleich 462 und 350 kg gegeben sind.

a. { 612,65 kg
446,34 „

b. { 472,7 kg
39° 2′ 3″.

c. { 718,8 oder 334,8 kg
61° 28′ 17″ oder 24° 9′ 4″.

d. Die beiden Komponenten bilden die Winkel 35° 4′ und die Resultante mit der Kraft 462 kg den Winkel 15° 2′ 18″.

8. Drei Kräfte von 32, 45 und 50 kg sollen in einer Ebene so an einen Punkt gelegt werden, daß sie sich das Gleichgewicht halten. Wie groß sind die Winkel, welche die Kräfte miteinander bilden?

Der Winkel zwischen 32 und 45 $= 100^\circ 59' 22''$
" " " 32 " 50 $= 117^\circ 55' 58''$
" " " 45 " 50 $= 141^\circ\ 4' 40''$.

9. Die Summe dreier Kräfte, die in einer Ebene an einem Punkte wirksam sind und sich das Gleichgewicht halten, ist 478,75 kg. Die Kräfte mögen miteinander die Winkel

$$147^\circ 19',\ 65^\circ 13',\ 147^\circ 28'$$

bilden. Welche Größe hat jede der Kräfte?

130,195 kg
129,66 "
218,895 "

10. Es ist ein Dreieck ABC gegeben. Man soll innerhalb desselben den Punkt X bestimmen, so daß die Verbindungslinien XA, XB, XC der Größe und Lage nach drei Kräfte darstellen, die sich an X das Gleichgewicht halten.

Jede der Strecken muß, verlängert, Mittellinie für das Dreieck werden.

11. Auf einen Punkt wirken acht Kräfte, die im Raume liegen und der Größe und Richtung nach in einem beliebig gewählten rechtwinkeligen Koordinatensysteme gegeben sind. Es ist die Größe und Richtung derjenigen Kraft zu bestimmen, die, an den Punkt versetzt, Gleichgewicht hervorbringt.

$P_1 = 75$ kg; $\alpha_1 = 63^\circ 27'$; $\beta_1 = 48^\circ 36'$; $\gamma_1 =$ spitz,
$P_2 = 80$ " $\alpha_2 = 153^\circ 44'$; $\beta_2 = 67^\circ 13'$; $\gamma_2 =$ stumpf,
$P_3 = 95$ " $\alpha_3 = 76^\circ 14'$; $\beta_3 = 147^\circ 12'$; $\gamma_3 =$ stumpf,
$P_4 = 135$ " $\alpha_4 = 115^\circ\ 7'$; $\beta_4 = 137^\circ\ 9'$; $\gamma_4 =$ stumpf,
$P_5 = 670$ " $\alpha_5 = 76^\circ\ 3'$; $\beta_5 = 35^\circ\ 3'$; $\gamma_5 =$ spitz,
$P_6 = 37$ " $\alpha_6 = 145^\circ\ 7'$; $\beta_6 = 78^\circ\ 3'$; $\gamma_6 =$ spitz,
$P_7 = 95$ " $\alpha_7 = 62^\circ 10'$; $\beta_7 = 149^\circ\ 8'$; $\gamma_7 =$ spitz,
$P_8 = 140$ " $\alpha_8 = 123^\circ 58'$; $\beta_8 = 127^\circ 56'$; $\gamma_8 =$ stumpf.

$$X = \Sigma P \cos\alpha = +24{,}393 \text{ kg};\quad Y = \Sigma P \cos\beta = +290{,}290 \text{ kg};$$
$$Z = \Sigma P \cos\gamma = +221{,}295 \text{ kg}.$$

$$R = 365{,}84;\quad \alpha = 86^\circ 10' 36'';\quad \beta = 37^\circ 29' 14'';\quad \gamma = 52^\circ 46' 43''.$$

Die Resultante der Kräfte liegt im ersten Raume, die entgegengesetzte Resultante also im achten Raume, und die Winkel, welche die letztere mit den Achsen bildet, sind sämtlich stumpf und zwar:

$$\bar{\alpha} = 93^\circ 49' 24'';\quad \bar{\beta} = 142^\circ 30' 46'';\quad \bar{\gamma} = 127^\circ 13' 17''.$$

12. Die Strebe eines Dachbinders übt in der Richtung ihrer Achse auf eine horizontale Mauer einen Druck von 10 000 kg aus, der sich parallel

(Schub) und senkrecht (Vertikaldruck) zur Mauer zerlegt. Wie groß ist der Schub und der Vertikaldruck, wenn die Strebe einen Winkel von 30° mit der Horizontalen bildet?

8660 kg und 5000 kg.

13. Bei einer Dampfmaschine (vergl. Fig. 124) zerlegt sich der Druck P, den die Kolbenstange KA auf den Kreuzkopf A überträgt, senkrecht zur Gleitbahn des Kreuzkopfes und nach der Richtung der Schubstange AB. Wie groß sind die beiden Komponenten, wenn die Kurbel OB rechtwinkelig zur Schubstange steht?

Kurbelradius $r = 40$ cm, Schubstange $l = 2000$ cm, $P = 6000$ kg.

$$P_1 = 1200 \text{ kg},$$
$$P_2 = 6119 \text{ kg}.$$

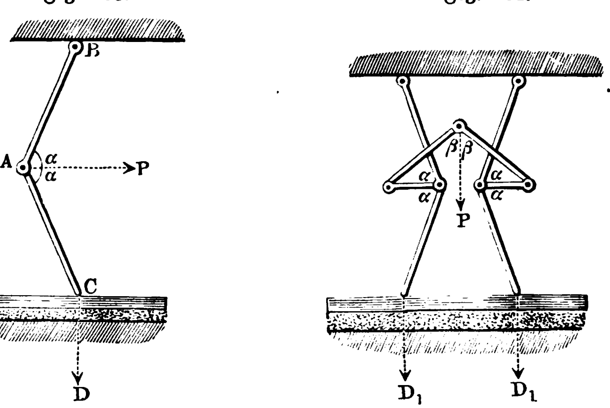
14. Zwei Stangen AB und AC (Fig. 163) sind bei A durch ein Gelenk miteinander verbunden. An A ist eine Kraft $P = 50$ kg wirksam, deren Richtung mit den Stangen die Winkel α bildet. Ist der Punkt B festgemacht, während sich C gegen ein nachgiebiges Stück stützt, so wird bei Einwirkung von P in C ein normaler Druck D hervorgerufen, der berechnet werden soll. Der Apparat heißt die einfache Kniehebelpresse.

$$D = \tfrac{1}{2} P \operatorname{tang} \alpha.$$

Für welchen Winkel α wird $D = P$?

$\alpha =$	$D =$
15°	6,7 kg.
35°	17,5
63° 26′	50
65°	53,6
85°	285,7
90°	∞

Fig. 163. Fig. 164.



15. Es ist der ausgeübte Druck bei der zusammengesetzten Kniehebelpresse (Fig. 164) zu bestimmen, wenn P, α und β gegeben sind.

$$P = 50 \text{ kg}, \ \alpha = \beta = 76^0,$$
$$D_1 = \tfrac{1}{4} P \tan \alpha \tan \beta.$$
$$= 201{,}08 \text{ kg}.$$

16. Zwei Stangen (vergl. Fig. 148) sind unter $40^0\,35'$ durch ein Gelenk verbunden, auf welches eine Kraft von 940,5 kg wirkt, die mit den beiden Stangen bezw. die Winkel $24^0\,31'$ und $16^0\,4'$ bildet. Welche Zerlegung tritt ein?

400 kg und 599 kg.

17. Eine beiderseits eingelenkte Stange (vergl. Fig. 149) wird in einem Punkte A, für den $A_1 A : A A_2 = 1 : 1$ gilt, durch eine Kraft von 4000 kg unter $\measuredangle\, B A A_2 = 60^0$ angegriffen. Welche Komponenten wirken in den Gelenken, wenn $\measuredangle\, B_1 A_1 A_2 = 120^0$ ist?

$$K_1 = 2000 \text{ kg},$$
$$K_2 = 3464{,}1 \text{ kg}.$$

18. Die Enden eines Seiles, das über zwei Rollen läuft, sind bezw. mit 3 kg und 4 kg belastet. Welches Gewicht muß zwischen diesen Rollen an dem Seile angebracht werden, damit dieses bei Gleichgewicht der Kräfte einen rechten Winkel bildet?

5 kg.

19. Ein Gewicht G (Fig. 165) liegt auf einer gegen den Horizont geneigten vollkommen glatten Ebene und wird durch drei gleiche Kräfte, gleich $\frac{1}{3} G$, an seinem Platz erhalten.

Die vier Kräfte liegen in einer Ebene und greifen den Massenmittelpunkt des Körpers an. Das Gewicht G wirkt in einer zur Horizontalebene normalen Richtung. $\frac{1}{3} G$ wirkt horizontal, $\frac{1}{3} G$ wirkt parallel der geneigten Ebene, und $\frac{1}{3} G$ wirkt der Kraft G gerade entgegengesetzt.

Welchen Winkel bildet die geneigte Ebene mit der Horizontalebene?

$53^0\,7'\,48''$.

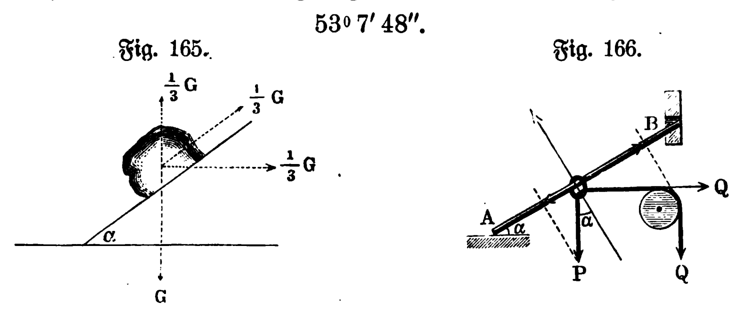


Fig. 165. Fig. 166.

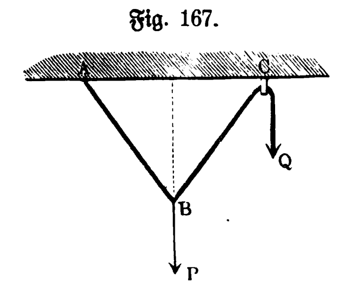
20. Es sei eine Stange AB (Fig. 166) in fester Lage gegeben, um den Winkel α gegen die Horizontalebene geneigt. An einem Ringe, der sich an der Stange verschieben läßt, wirken zwei Kräfte P und Q, die mit der Stange in derselben Ebene liegen, von denen P normal zur Horizontalebene wirksam ist, während die Kraft Q ihre Richtung mit der Lage des Ringes ändert. Es ist für diese Anordnung der Gleichgewichtszustand des Ringes

zu bestimmen, wenn die Lage der festen Rolle, sowie deren Halbmesser bekannt ist.

Die Lage des Ringes wird durch die Tangente des Rollenumfangs bestimmt, welche die Stange unter ε schneidet für $Q \cos \varepsilon = P \sin \alpha$.

21. Es sind zwei feste Punkte A und C gegeben (Fig. 167), ein vollkommen biegsamer Faden ist in A befestigt, bei C durch einen Ring geführt und in einem dazwischen liegenden Punkte B durch eine Kraft P angegriffen, die normal zur Verbindungslinie AC wirkt. Das über C fortgeführte Ende des Fadens trägt ein Gewicht Q, so daß AC und die beiden Kraftrichtungen sich in derselben Ebene befinden. Es möge Gleichgewicht stattfinden und dabei AC durch die Kraftrichtung P halbiert werden. Welche Größe muß das Gewicht Q erhalten?

Fig. 167.



Bezeichnen wir AB mit a, AC mit b, so ist für den Gleichgewichtszustand:

$$Q = P \frac{a}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

22. Zwei unverrückbare Ebenen sind unter einem Winkel fest miteinander verbunden, und zu der Durchschnittslinie wirkt normal eine Kraft P, welche mit der einen Ebene einen Winkel α, mit der anderen den Winkel β bildet.

a. Welche Größe haben die daraus zu den Ebenen resultierenden normalen Druckkräfte?

b. Welche Größe erhalten dieselben, wenn die Kraftrichtung mit der Durchschnittslinie den Winkel γ bildet, und wenn α und β die Winkel sind, welche die durch Kraftrichtung und Durchschnittslinie gelegte Ebene mit den gegebenen Ebenen bildet?

$$\text{a.} \begin{cases} P \dfrac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ P \dfrac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \end{cases} \qquad \text{b.} \begin{cases} P \dfrac{\sin \gamma \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ P \dfrac{\sin \gamma \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \end{cases}.$$

23 bis 44. Die Aufgaben 1 bis 22 sind konstruktiv (graphisch) zu behandeln. Die Ergebnisse der Konstruktion sind mit den Ergebnissen der Rechnung in Bezug auf ihre Genauigkeit zu vergleichen.

45. Ein Körper von dem Gewichte 20 kg wird durch eine Kraft in eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung versetzt, deren Beschleunigung gleich $2{,}7 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ sein mag. Welche Größe hat die Kraft?

5,5 kg.

46. Ein Körper von dem Gewichte 50 kg besitzt eine Geschwindigkeit von $13 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Er wird durch eine konstant wirkende Kraft P in eine gleichmäßig verzögerte Bewegung gebracht und kommt nach 10 Sekunden zur Ruhe. Wie groß ist die wirksame Kraft? Welchen Weg hat der Körper zurückgelegt?

$$j = 1{,}3 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}; \quad P = 6{,}6 \text{ kg}; \quad s = 65 \text{ m}.$$

47. Eine Kraft von 150 kg hat eine Sekunde lang auf einen Körper von 200 kg Gewicht eingewirkt. Welche Geschwindigkeit erhält der Körper?

$$7{,}3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

48. Zwei Körper von den Gewichten 5 und 12,5 kg befinden sich in gleichmäßig beschleunigter Bewegung bezw. mit den Beschleunigungen $4 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ und $4{,}5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

Wie verhalten sich die bewegenden Kräfte der Größe nach?

Wie verhalten sich dieselben bei den oben angegebenen Beschleunigungen, wenn die Körper dasselbe Gewicht haben?

Wie verhalten sich die Kräfte bei den oben angegebenen Gewichten, wenn die Beschleunigungen bei den beiden Bewegungen gleich groß sein sollen?

$$1 : 2{,}8; \quad 1 : 1{,}125; \quad 1 : 2{,}5.$$

49. Ein Körper von 50 kg Gewicht wird vermittelst eines Fadens aufgehängt. Es ist die Spannung des Fadens zu bestimmen, wenn der Aufhängepunkt mit einer Beschleunigung von 1,5 m in senkrechter Richtung abwärts oder aufwärts bewegt wird.

42,4 kg und 57,6 kg.

50. Zwei Körper von 25 und 36 kg Gewicht besitzen Geschwindigkeiten von $10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Wie verhalten sich die Bewegungsgrößen (Antriebe)? Wie verhalten sich dieselben bei gleichen Gewichten und wie bei gleichen Geschwindigkeiten?

$$1 : 2{,}16; \quad 1 : 1{,}5; \quad 1 : 1{,}44.$$

51. Wie lauten die Bewegungsgleichungen für Fig. 151, falls $P = 5$ kg und $Q = 195$ kg ist?

$$j = \tfrac{1}{40} g \text{ u. s. w.}$$

52. Wie lauten die Bewegungsgleichungen für Fig. 152, falls $P = 500{,}5$ kg und $Q = 499{,}5$ kg ist?

$$j = \tfrac{1}{1000} g \text{ u. s. w.}$$

53. Wie groß ist die Centripetalkraft einer Bleikugel von 2,5 kg Gewicht, die sich mit einer Geschwindigkeit von $5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ in einem Kreise von 2 m Halbmesser bewegt?

3,2 kg.

54. Eine eiserne Kugel, die durch ein Seil mit einer stehenden Welle verbunden ist, wird um diese in drehende Bewegung versetzt, so daß das Seil zerreißt. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Kugel? Wie viel Umdrehungen werden in der Minute gemacht?

Die Kugel habe ein Gewicht von 175 kg, das Seil eine Länge von 7 m, einen Querschnitt von 3,42 qcm und der Zug, welcher das Seil zu zerreißen vermag, betrage 500 kg pro Quadratcentimeter.

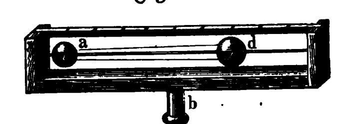
$$\frac{175}{9{,}81} \cdot \frac{v^2}{7} = 3{,}42 \,.\, 500$$

$$v = 25{,}9 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$n = 35^1/_3 \text{ in der Minute.}$$

55. Zwei durch eine Kette miteinander verbundene Kugeln (Fig. 168) von 0,07 und 0,12 kg Gewicht stecken leicht beweglich auf einem Metalldraht, der in horizontaler Lage mit der Hülse b an der vertikalen Drehachse einer Schwungmaschine befestigt ist. Die erste Kugel befindet sich 9 cm von der Drehachse entfernt. Auf welche Entfernung ist die zweite Kugel zu schieben, damit bei einer beliebigen Winkelgeschwindigkeit γ der Maschine

Fig. 168.



a. beide Kugeln ihren Ort behaupten?
b. die schwerere Kugel die leichtere nach sich ziehe?
c. die leichtere Kugel die schwerere in Bewegung setze?

a. 5,25 cm.
b. Alle Entfernungen der schwereren Kugel, die größer als 5,25 cm sind.
c. Alle Entfernungen der schwereren Kugel, die kleiner als 5,25 cm sind.

56. Welche Neigung α gegen die Vertikale muß ein Reiter bei einer Geschwindigkeit von $4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ annehmen, wenn er einen Kreis von 2,5 m Radius beschreiben will?

$$tang\, \alpha = 0{,}652.$$

57. Um wieviel (h) muß in einer horizontalen Eisenbahnkurve vom Radius r die äußere Schiene gegen die innere für eine bestimmte Geschwindigkeit v überhöht werden, damit sich die Radflantschen nicht an die äußere Schiene legen?

Soll die nötige Centripetalkraft nicht durch die äußere Schiene, sondern durch die eine Gewichtskomponente des schief gelagerten Wagens geliefert werden, so muß dessen Gewicht in horizontaler Richtung und senkrecht zur Geleisoberfläche zerlegt werden.

Für die Spurweite s ergiebt sich:

$$h = \frac{v^2 s}{g r}.$$

Bei den Werten $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $s = 1{,}5$ m, $r = 300$ m hat man:

$$h \sim 0{,}05 \text{ m}.$$

58. Ein Eisenbahnwagen hat eine Geschwindigkeit von $10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und bewegt sich horizontal nur unter dem Einfluß der Reibung, welche $\frac{1}{200}$ seines Gewichts beträgt. In welcher Zeit kommt er zur Ruhe? Welche Strecke durchläuft er noch?

$$j = -\tfrac{1}{200}\, g \text{ u. s. w.}$$

59. Eine Welle, die einschließlich ihres Radwerkes das Trägheitsmoment $\mathfrak{Tr}$ hat, dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit γ. In welcher Zeit (t) kommt sie zur Ruhe und wieviel (x) Umdrehungen macht sie noch, wenn sie plötzlich ausgeschaltet wird, so daß nur das Moment M der Reibung als Kraftwirkung in Betracht zu ziehen ist?

$$\iota = \frac{M}{\mathfrak{Tr}},\ 0 = \gamma - \iota t, \text{ d. h. } t = \gamma \cdot \frac{\mathfrak{Tr}}{M}.$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\iota t^2 = \tfrac{1}{2}\gamma^2 \frac{\mathfrak{Tr}}{M},$$

$$x = \frac{\sigma}{2\pi} = \frac{\gamma^2 \cdot \mathfrak{Tr}}{4\pi M}.$$

Entspricht γ der Tourenzahl 40, während $\frac{\mathfrak{Tr}}{M} = 238{,}5$ ist, so ist $t \sim 1000''$ und $x \sim 333$.

60. Welche Arbeit wird bei einem Hube von einem Pochstempel verrichtet, der ein Gewicht von 97 kg hat, und dessen Hubhöhe 0,4 m ist?

38,8 mkg.

61. Welche Arbeitsstärke entspricht den Angaben von Nr. 60 bei 50 Schlägen in der Minute?

$$32{,}33 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}} = 0{,}43 \text{ PS}.$$

62. Welche Arbeit nimmt der Körper der Aufgabe 140 des ersten Abschnittes auf, wenn er 25 kg wiegt?

20 681 mkg.

63. Welche Arbeit nimmt der Körper der Aufgabe 143 des ersten Abschnittes auf, wenn er 100 kg wiegt?

2038,7 mkg.

64. Eine geneigte Ebene von der Länge 40 m und dem Neigungswinkel 50^0, die allmählich in die Horizontalebene übergeführt ist, durchläuft ein 200 kg schwerer Körper.

Wie weit bewegt der Körper, in der Horizontalebene angekommen, ein Hindernis von 14 kg und nach welcher Zeit kommt der Körper zur Ruhe?

437,7 m; 35,7 Sekunden.

65. Ein Pferd hat eine Last 70 m weit fortgeschafft. Der mittels eines Kraftmessers gefundene Druck in den Zugsträngen betrug zu Anfang der Bewegung 55 kg, und in den Entfernungen von 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70 m war derselbe gleich 62, 52, 55, 65, 60, 57, 63, 70, 55, 65 kg. Wie groß ist hiernach die Arbeit des Pferdes gemäß der Simpsonschen Regel (vergl. S. 70)?

$$\mathfrak{A} = {}^1/_3 \,.\, {}^1/_{10} \,.\, 70 \,.\, \{55 + 4\,(62 + 55 + 60 + 63 + 55) + 2\,(52 + 65 + 57 + 70) + 65\} = 4172\,\text{mkg}.$$

66. Es ist die Arbeit einer veränderlichen Kraft P zu berechnen, deren Angriffspunkt einen Weg s von 0,7 m zurücklegt. Die Veränderlichkeit von P ist durch folgende Angaben bestimmt: Auf der Strecke von $s = 0$ bis $s = 0{,}2$ m ist der Druck gleich 2500 kg, von $s = 0{,}2$ bis $s = 0{,}3$ nimmt derselbe stetig bis 1600 kg ab, für die folgenden Strecken von 0,1 m erreichen die Drucke, unter Annahme stetiger Abnahme, die Werte 1250, 1000, 830 und 720 kg.

$$\mathfrak{A} = 2500 \,.\, 0{,}2 + \frac{0{,}1}{2}\,(2500 + 2 \,.\, 1600 + 2 \,.\, 1250 + 2 \,.\, 1000 + 2 \,.\, 830 + 720)$$

$$\mathfrak{A} = 1129\,\text{mkg}.$$

67. Die tägliche mechanische Arbeitsleistung (L) belebter Wesen schätzt man ab, indem man die durchschnittliche Arbeitsstärke mit der Arbeitszeit (t) in Stunden multipliziert.

Bezeichnet man die angewandte Kraft mit K und die Geschwindigkeit der Kraftverwendung mit v, so ist:

$$L = K v t.$$

Für den Menschen ist bei $t = 8$ Stunden $= 28\,800$ sec als Norm zu setzen $K = 10$ kg und $v = 0{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, für das Pferd bei $t = 8$ ebenso $K = 70$ kg und $v = 1{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Demnach ist für den Menschen $L = 230\,400$ mkg, für das Pferd $L = 2\,520\,000$ mkg.

Will man von der Norm abweichen, indem man statt K, v, t die Werte K', v', t' einführt, so gilt für die Abschätzungen der außergewöhnlichen Leistungen, falls keine Überanstrengung eintreten soll, erfahrungsmäßig die sogenannte Gerstnersche Formel:

$$K' = K\left(2 - \frac{v'}{v}\right)\left(2 - \frac{t'}{t}\right).$$

Will man z. B. für einen Menschen $v' = 1\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $t' = 10$ Stunden ansetzen, so folgt $K' \sim 5{,}6$ kg, d. h. unter diesen Umständen darf man nur einen durchschnittlichen Kraftaufwand von 5,6 kg fordern.

Bei je einer starken, aber kurzen Anspannung, der jedesmal eine Ruhepause folgt, hat man $t' = 0$ zu setzen.

Wie groß ist die Kraft, die ein Arbeiter mit sehr geringer Geschwindigkeit augenblicklich ausüben kann? $K' \sim 4\,K$.

Wie groß ist diese Kraft bei normaler Geschwindigkeit? $K' = 2\,K$.

Welche Kraft darf man von einem Pferde bei sechsstündiger Arbeitszeit fordern, falls die Geschwindigkeit $2\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ist? $K' = 0{,}5\,K$.

68. Nr. 58 ist durch die Gleichung zwischen Energie und Arbeit zu lösen.

$$\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2 = \frac{G}{200}\cdot s.$$

69. Nr. 59 ist durch die Gleichung zwischen Energie und Arbeit zu lösen.

$$M\,.\,2\pi\,.\,x = \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}\mathfrak{r}\,.\,\gamma^2.$$

70. Welchen durchschnittlichen Zug muß eine Lokomotive entwickeln, um Wagen im Gewichte von 60000 kg in einer Minute die Geschwindigkeit $10\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ zu erteilen, wenn die Reibung $\frac{1}{200}$ des Gewichtes ist?

Angenähert 1319 kg.

71. Bei einem Gefälle von 6 m strömen in einer Sekunde 3 cbm Wasser zu. Welche Pferdestärke ist vorhanden?

240 PS.

72. Eine Kugel von 10 kg schlägt mit einer Geschwindigkeit von $105\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ auf einen Körper, der sie bei Annahme eines konstanten Widerstandes 52 mm eindringen läßt. Wie groß ist hiernach der durchschnittliche Widerstand, welcher der Kugel entgegengesetzt wird?

$P = 108\,060$ kg.

73. Welche Arbeit ist notwendig, um einen Wagen von 3000 kg Gewicht in eine Geschwindigkeit von $10\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ zu versetzen?

15290 mkg.

74. Ein Wagen von 2000 kg Gewicht hat eine Geschwindigkeit von $3{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Wie groß ist die Zunahme der Arbeit, wenn die Geschwindigkeit auf $12\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ gebracht wird?

13569 mkg.

75. Ein Körper von 250 kg Gewicht bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $1{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und erhält einen Zuwachs an Arbeit von 780 mkg. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Körpers nach Aufnahme dieser Arbeit?

$7{,}91\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

76. Eine Kraft verrichte in der Sekunde eine Arbeit von 3200 mkg und bringe dem bewegten Körper eine Geschwindigkeit von $1{,}6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ bei. Wie groß ist der ausgeübte Druck?

Wie groß ist die Geschwindigkeit des bewegten Körpers, wenn der Widerstand der Bewegung 250 kg beträgt?

$$2000 \text{ kg}; \; 12{,}8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

77. Es werden 20 Pferdestärken übertragen. Mit welcher Geschwindigkeit wird ein Körper bewegt, der einen Widerstand von 27 kg leistet?

Wie groß ist der ausgeübte Druck bei einer Geschwindigkeit von $3{,}6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

$$55{,}6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}; \; 416{,}7 \text{ kg}.$$

78. Auf der stehenden Welle einer Turbine befindet sich zur Übertragung der Bewegung einen Zahnrad von 2 m Durchmesser. Wie groß ist der im Umfange des Zahnrades wirksame Druck, wenn die Turbine 40 Pferdestärken überträgt und dabei 120 Umdrehungen in der Minute macht?

$$Pr = 716 \frac{N}{n}$$

$$P = 238{,}7 \text{ kg}.$$

79. Wieviel Arbeit giebt ein Schwungrad von 3000 kg Gewicht ab, dessen Masse sich im Abstande 2 m von der Drehungsachse verdichtet denken läßt, wenn es von 5 Umdrehungen auf 4 Umdrehungen in der Minute herabgeht?

60,36 mkg.

80. Der Kolben einer Wasserpumpe hat einen Durchmesser von 0,4 m bei einer Hubhöhe von 1,5 m. Das Wasser wird auf eine Höhe von 10 m gehoben, wobei die Pumpe in einer Minute 20 Kolbenspiele machen soll. Welche Arbeit entspricht einem Kolbenspiele?

Wie groß ist die Arbeitsstärke?

$$\text{Arbeit} = 1885 \text{ mkg}.$$

$$\text{Arbeitsstärke} = 1885 \cdot \frac{20}{60} = 628 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}} = 8{,}4 \text{ PS}.$$

81. Bei einer Dampfmaschine ist der Kolbendurchmesser 40 cm, der Kolbenhub 0,8 m, die Dampfspannung 6 Atm., d. h. 6 kg für das Quadratcentimeter. Welche Arbeitsstärke hat sie ohne Berücksichtigung der Reibungen für die Tourenzahl 45, falls bei Doppelwirkung Volldruck vorhanden ist?

120,67 PS.

82. Ein Moment von 20 mkg erteilt einem ruhenden Cylinder in gleichmäßiger Steigerung die Tourenzahl 120 bei einer Drehung um seine geometrische Achse.

In welcher Zeit geschieht dies, falls der Radius des Cylinders, dessen Gewicht 4000 kg ist, den Wert 20 cm hat? Das Trägheitsmoment für die geometrische Achse des Cylinders ist $\frac{1}{2} m r^2$.

$$\iota = \frac{20}{\frac{1}{2} m r^2} = 2{,}45 \cdot$$

$$t = \frac{\varphi}{\iota} = \frac{\frac{120 \cdot 2\pi}{60}}{2{,}45} = 5{,}13''.$$

83. Wenn eine Feder (innerhalb der Proportionalitätsgrenze) beim Spannen durch eine Belastung K um die Strecke s zusammengedrückt wird, so entspricht, wie vorgreifend bemerkt wird, die in der Feder aufgespeicherte Arbeit (potenzielle Energie) dem gleichmäßigen Wachsen der Kraft von 0 bis K für die Strecke s, so daß die entsprechende Fläche ein Dreieck ist. ($\mathfrak{A} = \frac{1}{2} K s$.)

Wie lange (t) reicht die Energie einer Feder, falls $\frac{1}{n}$ PS erfordert wird?

$$\frac{75}{n} \cdot t = \mathfrak{A}.$$

Für $K = 2000$ kg und $s = 5$ cm $= 0{,}05$ m ist bei $n = 1000$:

$$\mathfrak{A} = 50 \text{ mkg und } n = 666{,}6''.$$

84. Beim gewöhnlichen Stoße (dem geraden Centralstoße) zweier Körper ist die Bewegungsgröße eine Konstante. Wie groß ist die Geschwindigkeit c der zu einem Körper vereinigten Körper, wenn sie im Stoße aneinander haften bleiben? Welche Zerlegung der Energie tritt in diesem Falle ein?

Wenn die Körper vor dem Stoße bezw. die Massen m_1 und m_2 und die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 haben, so ist

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) c.$$

Die (aktuelle) Energie vor dem Stoße ist $E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$, nach dem Stoße $E_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) c^2$, so daß ein scheinbarer Verlust

$$V = E - E_1 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

eintritt, welcher neben der Erwärmung u. s. w. der Körper deren Formänderung bewirkt.

85. Welche Arbeit ist erforderlich, um ein Kilostück aus dem Erdmittelpunkte in unendliche Ferne zu bringen? Vergl. S. 282.

9675000 mkg.

86. Mit welcher Geschwindigkeit würde ein Kilostück, das aus unendlicher Ferne im freien Falle in einen Schacht der Erde stürzt, deren Mittelpunkt durchlaufen? Vergl. S. 282.

$$13778 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

87. Wie groß ist die Fallgeschwindigkeit an der Oberfläche der Sonne? Vergl. S. 280.

$$278 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 28{,}3 \text{ g}.$$

88. Wie groß ist die Erdgeschwindigkeit in der Sonnennähe und in der Sonnenferne? Vergl. S. 281.

$$30\,750 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{und} \quad 29\,250 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

89. Wie groß ist die Masse des Jupiters, wenn für den äußersten seiner Monde $T = 16{,}689$ Sterntage und $r = 27{,}00\,a$ beträgt, wobei a den Radius des Jupiters (70000 km) bezeichnet, und wenn der mittlere Abstand des Jupiters von der Sonne $r' = 806\,789\,250$ km und seine Umlaufszeit $T = 11{,}815$ Jahre beträgt? Die Masse der Sonne enthält 355500 Erdmassen.

340 Erdmassen.

90. Im Abstande ϱ von einem festen Centrum hat die nach diesem gerichtete Kraft den Wert $C \cdot \frac{1}{\varrho}$. Es ist das entsprechende Potential zu bestimmen, gemäß dem Verfahren für Fig. 102 oder Fig. 103.

Die Fläche erhält für $q = \sqrt[n]{\frac{\varrho}{\varrho_0}}$ den Wert

$$F = C \,.\, lim\,[n(1 - q)]_{n=\infty}.$$

Für $\varrho = \varrho_0 - a$ liefert die binomische Entwickelung der Klammer für $lim\, n = \infty$ die Reihe für $-\,log.\,nat.\left(1 - \frac{a}{\varrho_0}\right)$, so daß sich ergiebt:

$$F = -C\,log.\,nat.\left(1 - \frac{a}{\varrho_0}\right) = -C\,log.\,nat.\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)$$

$$= C\,log.\,nat.\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) = C\,(log.\,nat.\,\varrho_0 - log.\,nat.\,\varrho).$$

91. Welches Ergebnis hat die Betrachtung der Nr. 90 für $C \,.\, \varrho^n$?

92. Welches Ergebnis hat die Betrachtung der Nr. 90 für $C \cdot \frac{1}{\varrho^n}$?

93. Welches Potential ergiebt sich auf Grund der vorigen Betrachtungen, wenn

$$a_m \frac{1}{\varrho^m} + a_{m-1} \frac{1}{\varrho^{m-1}} + \cdots a_1 \frac{1}{\varrho} + b + c_1\,\varrho + c_2\,\varrho^2 + \cdots c_n\,\varrho^n$$

die entsprechende Kraft darstellt?

Antwort für Nr. 91, 92, 93 vergl. S. 282.

94. Für eine Gußeisenkugel vom Radius $r = 0{,}03$ m soll der Vertikalwurf nach oben bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes verglichen werden mit dem Vertikalwurf nach oben bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes: a. für die Geschwindigkeit $25 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; b. für die Geschwindigkeit $50 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; c. für die Geschwindigkeit $500 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Vergl. Anwendung. 4.

Für Gußeisen ist das Gewicht des Kubikmeters als 7200 kg anzusetzen, so daß $k = \frac{1}{292014 \, . \, r}$ ist, also hier den Wert $\frac{1}{8760{,}42}$ hat.

95. Bei einem vertikal aufgehängten Stabe entspricht nach dem Hookeschen Gesetze eine Verlängerung x einer Spannkraft $\frac{E \, . \, f}{l} \cdot x$, falls E eine Materialkonstante (Elasticitätsmodul), f den Querschnitt und l die Länge des Stabes bezeichnet. Wird ein solcher Stab, an dessen Stelle man sich auch eine Spiralfeder denken kann, an seinem unteren Ende durch eine Kugel vom Gewicht G belastet und durch einen Zug nach unten in Schwingungen versetzt, so gelten für diese die Entwickelungen der Anwendung 5.

Setzt man $\frac{E \, . \, f}{l} \cdot x = k m x$, so ist $k m = \frac{E \, . \, f}{l}$ und $O O' = \frac{G \, . \, l}{E \, . \, f}$. Die Verschiebung $O O'$ hat eine bestimmte Bedeutung, da die Belastung G an der ruhenden Stange, gemäß der Gleichung $G = \frac{E \, . \, f \, . \, x}{l}$, die Verlängerung $\lambda = \frac{G \, . \, l}{E \, . \, f}$ hervorruft, d. h. es ist $O O' = \lambda$.

Für die Schwingung um O' gilt:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{1}{k}} = 2 \pi \sqrt{\frac{l \, . \, G}{E \, . \, f \, . \, g}}$$

und demnach ist:

$$E = \frac{4 \pi^2}{T^2} \cdot \frac{l \, . \, G}{f \, . \, g}.$$

Findet man an einem Stahlstabe, für den $l = 5$ m und $f = 1$ qcm ist, bei einer Belastung $G = 1000$ kg durch Beobachtung $T = \frac{1}{11}$ Sekunde, so ist $E = 2\,500\,000$.

96. Ein Körper soll, nachdem er sich aus der Ruhelage auf einer schiefen Ebene von der Länge 7 m und dem Neigungswinkel 75° bewegt hat, eine in der Vertikalebene liegende kreisförmige Bahn vollständig durchlaufen.

a. Welche Größe darf der Halbmesser des Kreises höchstens erhalten?
b. Wie groß kann der Halbmesser gewählt werden, wenn der Körper zu Anfang seiner Bewegung bereits eine Geschwindigkeit von 12 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ besaß?

a. $r < 2{,}7$ m. b. $r < 5{,}64$ m.

97. Welche Zeit braucht eine Kugel mehr, wenn sie ohne Anfangsgeschwindigkeit auf der Geraden $C S$ der Figur 156 fällt anstatt auf dem Cykloidenbogen $C D S$?

Für die Cykloide ist $\frac{1}{4} T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, für die Gerade hat die entsprechende Zeit den Wert $\sqrt{4 + \pi^2} \sqrt{\frac{r}{g}} = 1{,}19 \, . \, \pi \, . \sqrt{\frac{r}{g}}$.

98. Ein Schwungkugel-Regulator ist gemäß der Figur 161 zu bestimmen, falls gegeben ist:

$$n = 80, \quad PQ = y = 0{,}5 \text{ m}.$$

99. Für Aufgabe 151 des ersten Abschnittes sind bei einem Ausschlage von 5^0 die Fadenspannungen der Pendel im tiefsten Punkte zu berechnen.

Man erhält für beide Pendel $1{,}0076 \,.\, m \,.\, g$, falls die Masse der Kugel mit m bezeichnet wird.

100. Der Zwang der Bewegung des Pendels ist für einen Ausschlag von 5^0 für die ganze Bahn graphisch darzustellen.

101. Der Zwang der Bewegung ist bei der Centrifugalbahn für den kreisförmigen Teil der Bahn graphisch darzustellen, falls $a = 4\,r$ ist.

102. Auf der Scheitellinie eines Kreiscylinders mit horizontaler Achse (z. B. Straßenwalze) liegt eine Kugel von der Masse m. Giebt man dem Mittelpunkte der Kugel in der Vertikalebene, welche die Achse des Cylinders senkrecht schneidet, einen kleinen Stoß, so bewegt sich die Kugel auf dem Cylindermantel abwärts. An welcher Stelle verläßt sie den Cylinder, wenn man von der Reibung absieht? Die parabolische Bahn, welche der Bewegung auf dem Cylinder folgt, ist zu bestimmen.

Nachdem sie einen Bogen von ungefähr 48^0 beschrieben, bewegt sich die Kugel mit der zuletzt erhaltenen Geschwindigkeit konstant weiter und unterliegt außerdem der Beschleunigung $[g]$.

103. Es ist der Zwang zu untersuchen für die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Parabel mit vertikaler Achse (zwei Lagen!), unter Vernachlässigung der Reibung.

Unter welchen Bedingungen entsteht die freie Bahn der Wurfbewegung?

104. Es ist der Zwang zu untersuchen für die Bewegung eines materiellen Punktes auf eine Schraubenlinie mit senkrechter Achse.

105. Es ist der Zwang zu bestimmen für eine Kugel, deren Mittelpunkt sich auf einem Meridian der (sich drehenden) Erde bewegen muß. Nach Aufhebung des Zwanges ist die entsprechende freie Bewegung (Schuß in der Meridianebene) zu bestimmen.

